

(19) 日本国特許庁(JP)

## (12) 特許公報(B2)

(11) 特許番号

特許第6495292号  
(P6495292)

(45) 発行日 平成31年4月10日(2019.4.10)

(24) 登録日 平成31年3月15日(2019.3.15)

(51) Int.Cl.

HO3M 7/30 (2006.01)

F 1

HO3M 7/30

Z

請求項の数 14 (全 56 頁)

(21) 出願番号	特願2016-542071 (P2016-542071)
(86) (22) 出願日	平成26年9月10日 (2014.9.10)
(65) 公表番号	特表2016-535962 (P2016-535962A)
(43) 公表日	平成28年11月17日 (2016.11.17)
(86) 國際出願番号	PCT/US2014/054993
(87) 國際公開番号	W02015/038648
(87) 國際公開日	平成27年3月19日 (2015.3.19)
審査請求日	平成29年8月14日 (2017.8.14)
(31) 優先権主張番号	61/877,162
(32) 優先日	平成25年9月12日 (2013.9.12)
(33) 優先権主張国	米国(US)
(31) 優先権主張番号	14/481,581
(32) 優先日	平成26年9月9日 (2014.9.9)
(33) 優先権主張国	米国(US)

(73) 特許権者	595020643 クアルコム・インコーポレイテッド QUALCOMM INCORPORATED アメリカ合衆国、カリフォルニア州 92121-1714、サン・ディエゴ、モアハウス・ドライブ 5775
(74) 代理人	100108855 弁理士 蔵田 昌俊
(74) 代理人	100109830 弁理士 福原 淑弘
(74) 代理人	100158805 弁理士 井関 守三
(74) 代理人	100194814 弁理士 奥村 元宏

最終頁に続く

(54) 【発明の名称】ストリーミングデータの圧縮センシングのための方法およびそれを実行するための装置

## (57) 【特許請求の範囲】

## 【請求項 1】

ストリーミングデータの圧縮センシングを実行する方法であって、

データの入力ストリームにおいてオーバーラップするウィンドウのためのセンシング行列 A のシーケンスを再帰的に選択することと、第 ( $i + 2$ ) のオーバーラップするウィンドウのための前記センシング行列  $A^{(i+1)}$  は、式  $A^{(i+1)} = [a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}, a_1^{(i)}]$  によって定義され、ここで、 $a_L^{(i)}$  は、前記センシング行列  $A^{(i)}$  の第 L 列であり、n は各オーバーラップするウィンドウの長さであり、i は 0 以上であり、

式  $y^{(i+1)} = y^{(i)} + (x_{i+n} - x_i) a_1^{(i)}$  を使用して、前記第 ( $i + 2$ ) のオーバーラップするウィンドウのための測定値  $y^{(i+1)}$  を取得することと、ここで、i は 0 以上であり、第 ( $i + 1$ ) のオーバーラップするウィンドウに対応するデータの前記入力ストリームの信号  $x^{(i)}$  は、式  $x^{(i)} = [x_i \ x_{i+1} \ \dots \ x_{i+n-1}]$  によって定義され、最初のオーバーラップするウィンドウのための前記測定値  $y^{(0)}$  は、式  $y^{(0)} = A^{(0)} x^{(0)}$  によって定義される、

に少なくとも部分的によって、データの入力ストリームを、連続するオーバーラップするウィンドウを使用して再帰的にサンプリングすること

を備える、方法。

## 【請求項 2】

前記測定値  $y^{(i+1)}$  を取得する前記ステップは、前記センシング行列 A のうちの 1

10

20

つを含む行列乗算を実行することなく実行される、請求項 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

【請求項 3】

前記測定値  $y^{(i)}$  を取得する前記ステップは、データの前記入力ストリームを再帰的にサンプリングするステップの間にサンプリングされたデータを、再帰的な推定を介して、処理することを備える、請求項 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

【請求項 4】

前記入力データストリームに関する情報を受信することをさらに備え、ここにおいて、前記情報は、以前の推定値取得ステップの間に取得された以前の推定値に関係し、前記以前の推定値取得ステップは、前記再帰的なサンプリングステップの前に実行される、  
10 請求項 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

【請求項 5】

データストリームを検出することと、

前記データストリーム検出ステップの間に取得される情報に基づいて、回数推定を実行することと

をさらに備える、請求項 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

【請求項 6】

前記再帰的な推定ステップの間に取得されるデータに基づいて、データストリームの集合に対して最小 2 乗推定 (LSE) 値を算出することをさらに備える、請求項 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。  
20

【請求項 7】

平均された値を算出するために、前記算出された最小 2 乗推定値と、前記回数推定値と、前記以前の推定値とを平均することをさらに備える、請求項 6 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

【請求項 8】

前記ストリーミングデータに対する新しい推定値を取得するために、前記平均された値を使用することをさらに備える、請求項 7 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。  
30

【請求項 9】

ストリーミングデータの前記圧縮センシングの計算量を分析することをさらに備える、請求項 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

【請求項 10】

ストリーミングデータを感知するための前記方法の誤差の程度を推定することをさらに備える、請求項 9 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法  
。

【請求項 11】

前記連続するオーバーラップするウィンドウから取得される信号推定値を平均することをさらに備え、ここにおいて、ストリーミングデータの圧縮センシングを実行することは  
40

集合検出を実行することと、

信号振幅推定と

を備える、請求項 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための  
方法。

【請求項 12】

大きい測定雑音の存在下で、ロバストな推定のために投票方式を適用することをさらに備える、請求項 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法  
。

【請求項 13】

10

20

30

40

50

記録されたプログラムを有するコンピュータ可読記憶媒体であって、前記プログラムは、コンピュータに請求項1乃至12のうちの一項に記載の方法を実行させる、コンピュータ可読記憶媒体。

**【請求項14】**

ストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置であって、センサデータの入力ストリームからのデータを記憶するように構成されたメモリと、プロセッサと

を備え、前記プロセッサは、

センサデータの入力ストリームにおいてオーバーラップするウィンドウのためのセンシング行列Aのシーケンスを再帰的に選択することと、第( $i+2$ )のオーバーラップするウィンドウのための前記センシング行列 $A^{(i+1)}$ は、式 $A^{(i+1)} = [a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}, a_1^{(i)}]$ によって定義され、ここで、 $a_L^{(i)}$ は、前記センシング行列 $A^{(i)}$ の第L列であり、nは各オーバーラップするウィンドウの長さであり、iは0以上であり、

式 $y^{(i+1)} = y^{(i)} + (x_{i+n} - x_i) a_1^{(i)}$ を使用して、前記第( $i+2$ )のオーバーラップするウィンドウのための測定値 $y^{(i+1)}$ を取得することと、ここで、iは0以上であり、第( $i+1$ )のオーバーラップするウィンドウに対応するセンサデータの前記入力ストリームの信号 $x^{(i)}$ は、式 $x^{(i)} = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]$ によって定義され、最初のオーバーラップするウィンドウのための前記測定値 $y^{(0)}$ は、式 $y^{(0)} = A^{(0)} x^{(0)}$ によって定義される、

に少なくとも部分的によって、センサデータの入力ストリームを、連続するオーバーラップするウィンドウを使用して再帰的にサンプリングする

ように構成される、装置。

**【発明の詳細な説明】**

**【技術分野】**

**【0001】**

[0001]本発明は、ストリーミングデータの圧縮センシングのための方法およびそれを実行するための手段を対象とする。より詳細には、いくつかの実施形態は、ストリーミングデータ上で圧縮センシングを実行するための再帰的なアルゴリズムを使用するストリーミングデータの圧縮センシングの方法と、ストリーミングデータの圧縮センシングのための方法を実行することができる装置またはシステムまたはコンピュータプログラム製品とを含む。

**【背景技術】**

**【0002】**

[0002]信号処理の分野では、対象の信号は、適切に選択された正規直交基底において、わずかしかない係数を使用することによってスパースとして表され得る。例示的に、フーリエ基底は、画像などの区分的で継続的な信号に関する帯域制限信号またはウェーブレット基底に対して使用される。それぞれの基底の中のわずかな数の係数は、そのような信号を表すために十分であるが、ナイキスト/シャノンのサンプリング定理は、信号帯域幅の少なくとも2倍のサンプリングレートを示唆する。そのようなサンプリングレートは、当技術分野でナイキストレートとして知られている。多くの場合、示されるサンプリングレートは、十分な数の係数よりもずっと大きい。

**【0003】**

[0003]最近、信号を、それらの帯域幅に従うのでなく、むしろそれらの情報量、すなわち、信号の自由度の数に従ってサンプリングすることを目指して、圧縮センシング(CS)の枠組みが発表された。サンプリングに対するこのパラダイムは、いくつかの所与の基底の中でスパースな表現を有する信号に対して、古典的なサンプリング理論と比較してより低いサンプリングレートを示唆する。天文学および生物医学のイメージングに自然に生じる典型的な信号が、このモデルに適する。

**【発明の概要】**

10

20

30

40

50

**【 0 0 0 4 】**

[0004]本発明は、その実施形態のうちの1つに従って、ストリーミングデータを感知するためのコンピュータ実施方法を提案し、コンピュータ実施方法は、データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングすることと、後続の測定値を取得するために、前記少なくとも1つの以前の測定値を使用することとを備える。

**【 0 0 0 5 】**

[0005]本発明の別の実施形態によれば、ストリーミングデータを感知するためのシステムが提案され、システムは複数のモジュールを含み、各モジュールは、データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングし、後続の測定値を取得するために、前記少なくとも1つの以前の測定値を使用するための、コンピュータ実行可能な命令をその上に有するコンピュータ可読媒体を備える。10

**【 0 0 0 6 】**

[0006]本発明のさらに別の実施形態によれば、ストリーミングデータを感知するための、その上に記録されたコンピュータプログラムを有するコンピュータ可読記憶媒体が提案され、コンピュータプログラムは、データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングし、後続の測定値を取得するために、前記少なくとも1つの以前の測定値を使用することが可能なアルゴリズムを備える。20

**【 0 0 0 7 】**

[0007]本発明のさらなる実施形態によれば、ストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置が提案され、装置は、データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングするために構成された再帰的なサンプラーと、後続の測定値を取得するために、少なくとも1つの以前の測定値を使用するユニットとを備える。

**【 0 0 0 8 】**

[0008]本発明の一実施形態によれば、ストリーミングデータを感知することは、ストリーミングデータの圧縮センシングであり、ストリーミングデータを感知するための方法は、サンプリングを実行するための再帰的な方式を使用する。後続の測定値を取得するために少なくとも1つの以前の測定値を使用するステップは、再帰的な推定を介した再帰的なサンプリングのステップの間にサンプリングされたデータとしての、入力ストリームを処理することを備える。30

**【 0 0 0 9 】**

[0009]本発明の別の実施形態によれば、本発明によって提案される方法および手段は、以前の推定値取得ステップの間に取得された以前の推定値に関するデータストリームに関する入力情報を伴い、以前の推定値取得ステップは、再帰的なサンプリングステップの前にある。方法は、データストリームの台検出ステップの間に取得される情報に基づいて、回数推定を実行することと、前記再帰的な推定ステップの間に取得されるデータに基づいて、データストリームの台の集合に対して最小2乗推定(LSE)値を算出することとを、さらに備える。さらに、方法は、本発明の別の実施形態に従って、平均するステップを備え、平均された値を算出するために算出された最小2乗推定値、回数推定値、および以前の推定値は、平均された値を取得するために平均される。平均された値は、ストリーミングデータに対する新しい推定値を取得するために使用される。40

**【 0 0 1 0 】**

[0010]本発明のさらに別の実施形態によれば、本発明によって提案される方法は、ストリーミングデータの圧縮センシングの計算量を分析し、ストリーミングデータを感知するための方法の誤差の程度を推定するステップを、さらに備える。方法は、新しいウィンド50

ウを復号するために、反復的な最適化アルゴリズムにおいて収束を達成することをさらに備え、達成するステップは、オーバーラップするウィンドウ処理のステップによって使用されるオーバーラップするウィンドウ構造と、以前のウィンドウに関する信号推定値とを活用することを備える。方法は、複数のウィンドウから取得される信号推定値を平均することと、台集合検出を実行することと、信号振幅推定とを、さらに備える。

大きい測定雑音の存在下でのロバストな台推定のための投票方式が、同様に本発明に従つて適用され得る。

#### 【0011】

[0011]本発明のさらなる目的および利点は、それらの含まれる各図面に関連して行われる以下の説明から諒解されよう。

10

#### 【図面の簡単な説明】

#### 【0012】

【図1】[0012]本発明の一実施形態によるストリーミングデータを感知するための方法のブロック図。

【図2】[0013]単一の時間ウィンドウにわたる再帰的な圧縮センシング対「単純な手法」に関する平均処理時間を表す図。

#### 【図3】[0014]LASSOを使用する台集合の推定の結果を表す図。

【図4】[0015]a) 平均された推定値、b) バイアス除去および平均された推定値、およびc) 投票および平均化によって取得された推定値に関する誤差プロットを表す図。

【図5】[0016]ストリーミングデータ上の平均されたLASSO推定値ならびに「投票および平均化」に関する誤差プロットを表す図。

20

#### 【発明を実施するための形態】

#### 【0013】

[0017]本発明を実施することの現在熟考される最良の方式の以下の説明は、限定的な意味に理解されるべきでなく、単に本発明の一般的な原理について説明するためになされる。本発明の範囲は、特許請求の範囲に関して決定されるべきである。

#### 【0014】

[0018]圧縮センシングの分野において多くの進歩がなされてきたが、ストリーミングデータ上で圧縮センシングを実行するための再帰的なアルゴリズムは、依然として取り組まれないままである。連続するウィンドウ処理を通じて入力ストリームに圧縮センシングを適用することによる、雑音のあるサンプルからの信号推定の計算量および安定性は、当技術分野においてまだ取り組まれていない。

30

#### 【0015】

[0019]当業者によって理解されるように、本発明の態様は、システム、方法、またはコンピュータプログラム製品として具現化され得る。したがって、本発明の態様は、完全にハードウェアの実施形態、完全にソフトウェアの実施形態（ファームウェア、常駐のソフトウェア、マイクロコードなどを含む）、または、まったく一般に本明細書で「回路」、「モジュール」または「システム」と呼ばれ得る、ソフトウェアおよびハードウェアの態様を組み合わせる実施形態の形態をとり得る。さらに、本発明の態様は、その上に記録されたコンピュータ可読プログラムコードを有する、1つまたは複数のコンピュータ可読媒体（すなわち、データ記憶媒体）で実現されるコンピュータプログラム製品の形態をとり得る。

40

#### 【0016】

[0020]1つまたは複数のコンピュータ可読媒体の任意の組合せが、利用され得る。コンピュータ可読媒体は、コンピュータ可読信号媒体またはコンピュータ可読記憶媒体であり得る。コンピュータ可読記憶媒体は、たとえば、それだけには限らないが、電子、磁気、光学、電磁気、赤外線、もしくは半導体のシステム、装置、もしくはデバイス、または前述のものの任意の適当な組合せであり得る。コンピュータ可読記憶媒体のより具体的な例（非網羅的なリスト）は、以下のもの、すなわち、ポータブルコンピュータのディスクケット、ハードディスク、ランダムアクセスメモリ（RAM）、読み出し専用メモリ（ROM）

50

、消去可能プログラム可能読み出し専用メモリ(EEPROMまたはフラッシュメモリ)、光ファイバ、ポータブルのコンパクトディスク読み出し専用メモリ(CD-ROM)、光記憶デバイス、磁気記憶デバイス、または前述のものの任意の適当な組合せを含むはずである。本明細書の文脈では、コンピュータ可読記憶媒体、すなわち、データ記憶媒体は、命令実行システム、装置、またはデバイスによって使用される、またはそれらと組み合わせて使用されるプログラムを含むことができる、または記憶することができる、任意の有形の媒体であり得る。

#### 【0017】

[0021]コンピュータ可読信号媒体は、コンピュータ可読プログラムコードが組み入れられた伝搬されるデータ信号を、たとえばベースバンド内に、または搬送波の一部として含み得る。そのような伝搬される信号は、それだけには限らないが、電磁気、光学、またはそれらの任意の適当な組合せを含む、様々な形態のうちの任意の形態をとり得る。コンピュータ可読信号媒体は、コンピュータ可読記憶媒体でなく、命令実行システム、装置、またはデバイスによって使用される、またはそれらと組み合わせて使用されるプログラムを、通信、伝搬、または搬送し得る、任意のコンピュータ可読媒体であり得る。

#### 【0018】

[0022]コンピュータ可読媒体に組み込まれるプログラムコードは、それだけには限らないが、ワイヤレス、ワイヤライン、光ファイバケーブル、RFなど、または前述のものの任意の適当な組合せを含む、任意の適切な媒体を使用して送信され得る。

#### 【0019】

[0023]本発明の態様の動作を実行するためのコンピュータプログラムコードは、Java(登録商標)、Smalltalk、C++などのオブジェクト指向プログラム言語、および「C」プログラミング言語または同様のプログラミング言語などの従来の手続き型プログラム言語を含む、1つまたは複数のプログラミング言語の任意の組合せで記述され得る。プログラムコードは、完全にユーザのコンピュータ上で、部分的にユーザのコンピュータ上で、スタンドアロンのソフトウェアパッケージとして、部分的にユーザのコンピュータ上および部分的に遠隔のコンピュータ上で、または完全に遠隔のコンピュータまたはサーバ上で、実行され得る。後者のシナリオでは、遠隔コンピュータは、ローカルエリアネットワーク(LAN)またはワイドエリアネットワーク(WAN)を含む任意のタイプのネットワークを介してユーザのコンピュータに接続され得、その接続は、(たとえばインターネットサービスプロバイダを使用してインターネットを介して)外部コンピュータに対しても行われてもよい。

#### 【0020】

[0024]本発明の態様は、本発明の実施形態による、フローチャートの例示ならびに/または方法、装置(システム)およびコンピュータプログラム製品のブロック図を参照して以下に記載される。フローチャートの例示および/またはブロック図の各ブロック、ならびにフローチャートの例示および/またはブロック図でのブロックの組合せは、コンピュータプログラム命令によって実施され得ることが理解されよう。これらのコンピュータプログラム命令は、汎用コンピュータ、専用コンピュータ、またはマシンを形成する他のプログラム可能データ処理装置のプロセッサに提供されてよく、コンピュータまたは他のプログラム可能データ処理装置のプロセッサを介して実行されて、フローチャートおよび/またはブロック図のブロックもしくはブロック群で指定される機能/動作を実装するための手段を生成する。

#### 【0021】

[0025]これらのコンピュータプログラム命令はまた、特定の方式で機能するように、コンピュータ、他のプログラム可能データ処理装置、または他のデバイスを直接指示し得るコンピュータ可読媒体に記憶され得る。コンピュータプログラム命令はまた、コンピュータまたは他のプログラム可能装置上で実行される命令が、フローチャートおよび/あるいはブロック図のブロックまたはブロック群で指定された機能/動作を実装するためのプロセスを提供するようなコンピュータ実装プロセスを形成するために、コンピュータ、他の

10

20

30

40

50

プログラム可能装置、または他のデバイス上で一連の動作ステップを実行させるように、コンピュータ、他のプログラム可能データ処理装置、または他のデバイスにロードされ得る。

**【0022】**

[0026]以下の説明全体にわたって、大文字でボールド体の文字は行列を表し（たとえば、**A**）、ボールド体で小文字の文字はベクトルを表す（たとえば、**x**）。

**【0023】**

[0027]以下において、 $x_i$ はベクトル  $x$  の第  $i$  のエントリを表すために使用され、 $a_i$ は行列  $A$  の第  $i$  列を表すために使用される。

**【0024】**

[0028]入力ストリームの第  $i$  のウィンドウのような第  $i$  のサンプルベクトル、または第  $i$  のサンプリング行列は、上付き文字によって表される（たとえば、 $x^{(i)}$ または $A^{(i)}$ ）。

**【0025】**

[0029]2つのベクトル  $a$  と  $b$  との間の内積は、

$$\langle a, b \rangle := a^T b$$

として表される。

**【0026】**

[0030]  $|S|$  は集合  $S$  の濃度のために示す。

**【0027】**

[0031]  $E_x[\cdot]$  は、条件付き期待値  $E_x[\cdot] = E[\cdot | x]$  を示す。

**【0028】**

[0032]圧縮センシングの分野では、ベクトルまたは行列のいずれかの特徴を述べるために頻繁に使用される用語は、「 $k$ -スパース性」、「相互コヒーレンス」、「制限等長性」および「一般  $k$ -スパースモデル」である。以下において、本明細書を通して意図されるそれらの意味を示すために、しばらくの間、前記用語が詳しく述べられる。

**【0029】**

[0033]ベクトル  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して、その台は  $\text{supp}(x) := \{i : x_i \neq 0\}$  として定義される。

**【0030】**

[0034]同じベクトル  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して、その擬ノルム  $l_0$  は、 $x_0 := |\text{supp}(x)|$  として定義され、ここで、 $x_0$  は台の濃度である。

**【0031】**

[0035]  $x_0 = k$  の場合に限って、ベクトル  $x$  はスパースである。

**【0032】**

[0036]一般に、 $k \leq n$  であり、 $n$  は行列  $A$  の列の数である。

**【0033】**

[0037]例示的に、 $x = [0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 5 \ 0]^T$  の場合、 $x \in \mathbb{R}^{10}$  、 $x_0 = 3$  であり、 $x$  は 3 スパースである。

**【0034】**

[0038]行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  に関して、相互コヒーレンスは、行列  $A$  の 2 つの異なる任意の列の間の、正規化された最大の内積として、次のように定義される。

**【0035】**

**【数1】**

$$\mu(A) := \max_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \frac{|\langle a_i, a_j \rangle|}{\|a_i\|_2 \cdot \|a_j\|_2}.$$

**【0036】**

10

20

30

40

50

[0039] 行列 A  $\in \mathbb{R}^{m \times n}$  に対して  $0 < k < n$  が与えられると、

【0 0 3 7】

【数 2】

$$(1 - \delta_k) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|_2^2.$$

【0 0 3 8】

のような  $k \in [0, 1]$  が存在する場合、行列 A は制限等長性 (RIP) を満たすと言われる。

【0 0 3 9】

[0040] この条件は、すべての  $x \in \mathbb{R}^n$  の  $k$ -スパースなベクトルにとって有効なはずであり、ただし、 $k$  は十分小さい必要がある。

【0 0 4 0】

[0041] ガウス行列、ベルヌーイ行列、DFT 行列からランダムに選択された行などのランダム行列は、それらが高い確率で制限等長性を満たすので、文献では圧縮センシング用の行列として使用してきたことが知られている。制限等長性を満たす行列の例は、

a)  $m$  次元の単位球面からサンプリングされた  $n$  個のランダムベクトル、

b)  $n$  次元のフーリエ行列から一様でランダムに  $m$  行を選択することによって取得されるランダムな部分フーリエ行列、

c)  $A_{i,j} \sim N(0, 1/m)$  を有するランダムなガウス行列、

d) 等確率で

【0 0 4 1】

【数 3】

$$A_{i,j} \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}}, -\frac{1}{\sqrt{m}} \right\}$$

【0 0 4 2】

となるランダムなベルヌーイ行列、である。

【0 0 4 3】

[0042] 最後の 2 つのケースに関して、行列 A は、

【0 0 4 4】

【数 4】

$$1 - 2e^{-c_2 m}$$

【0 0 4 5】

以上の確率で、任意の  $k \in c_1 m / \log(n/k)$  に対して規定された  $k$  を満たし、ただし、 $c_1$  および  $c_2$  は  $k$  のみに依存する定数である。

【0 0 4 6】

[0043] 本明細書を通して使用されるさらなる用語が、以下に定義される。

【0 0 4 7】

[0044] 「再帰的に」は、手順が、自己相似のやり方でものを繰り返すことによって実行されることを示すために使用される。数学およびコンピュータ科学では、その用語は、定義されている関数がそれ自体の定義内で適用される関数を、定義する方法を指す。詳細には、このことは、いくつかのインスタンスに対して他のインスタンスを指し得る有限の表現を使用して、ただし参照のループまたは無限鎖が発生し得ないようなやり方で、無限数のインスタンス（関数値）を定義する。その用語はまた、より一般に、自己相似のやり方で対象を繰り返すプロセスを述べるために使用される。再帰とは、手順のステップのうち

10

20

30

40

50

の1つが手順それ自体を呼び出すことを伴うとき、その手順が経るプロセスである。再帰を経る手順は、「再帰的」であると言われる。

#### 【0048】

[0045]信号処理では、ウィンドウ関数（アポダイゼイション関数またはテーパリング関数とも呼ばれる）は、選ばれたいいくつかの区間の外側がゼロ値にされる数学関数である。たとえば、区間の内側が定数であり他の場所がゼロである関数は、矩形ウィンドウと呼ばれ、これはその図式表現の形状を述べている。別の関数または波形／データ列がウィンドウ関数によって乗算されると、その積も区間の外側がゼロ値にされ、残されるものはすべてそれらがオーバーラップする部分であり、「ウィンドウを通した見え方」となる。ウィンドウ関数の適用は、スペクトル分析、フィルタ設計、およびビームフォーミングを含む。典型的な適用例では、使用されるウィンドウ関数は非負の滑らかな「ベル形」曲線であるが、矩形、三角形、および他の関数が使用され得る。ウィンドウ関数のより一般的な定義は、その引数によって乗算されたウィンドウの積が二乗可積分である限り、より詳細には、関数が十分急速にゼロに向かっていく限り、区間の外側が等しくゼロであることをそれらに求めない。変換されるべきデータ集合の長さが所望の周波数分解能をもたらすために必要となる長さよりも長いとき、一般的な操作は、データをより小さい集合へ、またウィンドウ自身を別々に、再分割することである。ウィンドウの縁部における「損失」を低減するために、個々の集合は時間的にオーバーラップしてよい。

#### 【0049】

[0046] $x$ が線形ベクトル $x \in R^n$ であり、 $y \in R^m$ が、 $A \in R^{m \times n}$ をサンプリング（センシング）行列として取得されたサンプルのベクトル

#### 【0050】

#### 【数5】

$$y = Ax \quad (1)$$

#### 【0051】

である場合、本発明は $m < n$ のときに $x$ を復元するための方法および手段を提案する。式(1)を用いて表されるシステムは、劣決定の線形システムである。圧縮センシングによれば、主な成果は、 $x$ が $k$ -スパースで $k < c_m / \log(n/k)$ となる場合、この未定の線形システムの解があり得ることである。

#### 【0052】

[0047]測定値 $y$ に至る最もスパースなベクトル $x$ を見つけるために、以下に述べる問題 $P_0$ が解かれるべきである。この問題は、非決定性多項式時間困難、すなわち、NP困難であり、 $A$ の列のすべての部分集合にわたる探索を必要とする。当技術分野から知られているように、 $H$ に対して多項式時間チューリング還元可能であるNP完全な問題 $L$ が存在する（すなわち、 $L \leq_T H$ ）場合に限って、問題 $H$ はNP困難である。言い換えれば、 $L$ は、 $H$ にとっての神託を有する神託機械によって、多項式時間において解かれ得る。

#### 【0053】

[0048]問題 $P_0$ は、

#### 【0054】

#### 【数6】

$$Ax = y \text{ を条件として } \|x\|_0 \text{ を最小にする、}$$

#### 【0055】

として提示される。

#### 【0056】

[0049]問題 $P_0$ が一般にNP困難であるので、この問題は扱いやすい方法によって「近

10

20

30

40

50

似」されなければならない。線形の測定値からスパースなベクトルを復元するために、2つの凸最適化問題が使用される。

## 【0057】

[0050]第1の最適化問題は「基底追跡」と呼ばれ、問題  $P_0$  を解くことは  $\ell_1$  最小化問題  $B P$ 、

## 【0058】

## 【数7】

$Ax = y$  を条件として  $\|x\|_1$  を最小にする、

10

## 【0059】

をすべての  $k$ -スパースなベクトル  $x$  について解くことと同等であり、 $A$  が

## 【0060】

## 【数8】

$$\delta_{2k} \leq \sqrt{2} - 1$$

## 【0061】

20

に関して制限等長性 ( $RIP$ ) を満たす場合、上述の問題は  $P_0$  と同等である。最適化問題 ( $B P$ ) は基底追跡と呼ばれる。 $(BP)$  は線形プログラムとして書き直され得るので、 $(BP)$  を解くことは、大きいインスタンスに対して概して扱いにくい ( $P_0$ ) を解くことと比べて、たとえば、内点法を介すると計算量的に効率がよい。

## 【0062】

[0051]第2の最適化問題は、最小絶対選択収縮演算子 ( $LASSO$ ) と呼ばれる。雑音の存在下で、測定モデル  $y = Ax$  は、

## 【0063】

## 【数9】

$$y = Ax + w; \quad (2)$$

30

## 【0064】

となり、ここで、 $w \in R^m$  は加法的測定雑音を表す。

## 【0065】

[0052]この設定では、基底追跡の変形、すなわち、統計学の文献において  $LASSO$  として最もよく知られている、

## 【0066】

## 【数10】

$$\|Ax - y\|_2 \leq \hat{\sigma} \text{ を条件として } \|x\|_1 \text{ を最小にする、} \quad (3)$$

40

## 【0067】

のような基底追跡雑音除去 ( $BDN$ ) が適用されてよく、ただし、

## 【0068】

## 【数11】

$$\hat{\sigma} \in R^+$$

50

## 【0069】

は測定値の中に加法的雑音の割合を占めるように適切に選ばれる。

## 【0070】

[0053]当技術分野で知られているように、双対性によって、問題は非制約形最適化問題、すなわち、

## 【0071】

## 【数12】

$$\|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{を最小にする,} \quad (4)$$

10

## 【0072】

として同等に与えられ得、ここで、 $\lambda$ は、スパース性と再構成誤差との間のトレードオフを制御する正則化パラメータである。

## 【0073】

[0054]ストリーミングデータ上で圧縮センシングを実行するための再帰的な方式を編み出す際に有用な定理は、Aが

## 【0074】

## 【数13】

$$\delta_{2k} \leq \sqrt{2} - 1$$

20

## 【0075】

に関して制限等長性 (RIP) を満たす場合に、式(3)の解  $x_*$  が公式

## 【0076】

## 【数14】

$$\|x_* - x\|_2 \leq C_0 \cdot \|x - x_k\|_1 / \sqrt{k} + C_1 \cdot \tilde{\sigma} \quad (5)$$

30

## 【0077】

に従うことを見提示する、LASSOの誤差に関する定理であり、ここで、

## 【0078】

## 【数15】

$$C_0 \cdot \|x - x_k\|_1 / \sqrt{k}$$

## 【0079】

はモデルの不整合を示し、

40

## 【0080】

## 【数16】

$$C_1 \cdot \tilde{\sigma}$$

## 【0081】

は雑音を示す。 $C_0$ および $C_1$ は定数であり、ここで、 $x_k$ は大きい方の k 個の成分以外は 0 に設定されたベクトル  $x$  である。言い換えれば、 $x_k$  は、最大の大きさを有する  $x$  の k 個の多くの要素を維持することによって取得されるベクトルである。

## 【0082】

50

[0055]特に、 $x$ が $k$ -スパースであり  
 【0083】  
 【数17】

$$\delta_{2k} \leq \sqrt{2} - 1$$

【0084】  
 の場合、  
 【0085】  
 【数18】

$$\|x_* - x\|_2 \leq C_1 \cdot \tilde{\sigma}$$

【0086】  
 である。  
 【0087】  
 [0056]その定理は、再構成誤差が2つの項の和によって上界を有し、その1番目はモデルの不整合による誤差であり、2番目は測定雑音分散に比例することを提示する。  
 【0088】  
 [0057]かぎとなるのは、Cを各インスタンスに依存する定数として、  
 【0089】  
 【数19】

$$m \geq C_k \log(n/k)$$

【0090】  
 の場合、等長定数における仮定が、単位球面からサンプリングされたランダムなベクトル、ランダムなガウス行列およびランダムなベルヌーイ行列から取得される行列によって高い確率で満たされることである。

【0091】  
 [0058]当技術分野において、LASSOの誤差が、ほぼ理想的な台検出のために使用され得ることが示された。ほぼ理想的な台検出について特徴的な成果を提示するために、一般 $k$ -スパースモデルが定義される。

【0092】  
 [0059] $x \in \mathbb{R}^n$ が $k$ -スパースな信号を表し、 $I_x := \text{supp}(x)$ がその台集合である場合、  
 1)  $x$ の台 $I_x = \{1, 2, \dots, n\}$ が一様でランダムに選択され、 $|I_x| = k$ であり、  
 2) 非ゼロの符号が等しく $-1$ および $1$ でありそうなことが $I_x$ に条件付けられる場合、信号 $x$ は、一般 $k$ -スパースモデルによって生成されると言われる。

【0093】  
 [0060] $k$ -スパースな信号の台集合は、次のように検出され得る。  
 【0094】

[0061]定数 $c_1 > 0$ について $\mu(A) \leq c_1 / \log n$ と仮定すれば、 $x$ は一般 $k$ -スパースモデルから生成され、定数 $c_2$ に関して、  
 【0095】

10

20

30

40

50

【数20】

$$k \leq \frac{c_2 n}{\left( \|A\|_2^2 \log n \right)}$$

【0096】

である。

【0097】

[0062]  $I_x := \text{supp}(\mathbf{x})$  について、

【0098】

【数21】

$$\min_{i \in I_x} |x_i| > 8\sigma\sqrt{2\log n}$$

【0099】

となる場合、

 $w \sim N(0, \sigma^2 I)$ 

の場合の測定について

【0100】

【数22】

$$\lambda = 4\sigma\sqrt{2\log n}$$

【0101】

を選択によって取得される LASSO 推定値は、

少なくとも

【0102】

【数23】

$$1 - \frac{2}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \log n}} + \frac{|I_x|}{n} \right) - O\left(\frac{1}{n^{2\log 2}}\right)$$

【0103】

の確率で、

【0104】

【数24】

$$\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}) = \text{supp}(\mathbf{x})$$

【0105】

【数25】

$$i \in I_x \text{ について、} \text{sgn}(\hat{x}_i) = \text{sgn}(x_i)$$

【0106】

に従う。

【0107】

[0063] 要素

10

20

30

40

50

$A_{i,j} \sim N(0, 1/m)$

を有するサンプリング行列に関して、作用素ノルムは

【0108】

【数26】

$$\|A\|_2 \sim \sqrt{n/m}$$

【0109】

であり、したがって、定理におけるスパース性の条件は、 $k \leq c_1 m / \log n$  となる。 10

【0110】

[0064] この不等式が満たされるために、m としての値は

【0111】

【数27】

$$m = c_1 k \log n$$

【0112】

となる必要がある。 20

【0113】

[0065] さらに、ランダムなガウス行列

【0114】

【数28】

$$\mu(A) \sim \sqrt{2 \log n / m}$$

【0115】

について、コヒーレンスにおける条件は  $m > O(\log^3 n)$  の場合に満たされる。

30

【0116】

[0066] 境界を組み合わせると、m が

$$m = \min\{O(k \log n), O(\log^3 n)\}$$

であることが必要である。

【0117】

[0067] 直交マッチング追跡 (OMP) は、スパースなベクトル  $x$  を雑音のない測定値  $y = Ax$  から復元することを目指すグリーディーアルゴリズムである。アルゴリズムは、すでに選択された列の線形スパンに投影することによって  $y$  を近似することの、残余誤差を最小限にする列を反復的に選択することによって、 $A$  の列の部分集合を出力する。測定行列  $A$  の相互コヒーレンスが 40

【0118】

【数29】

$$\mu(A) < \frac{1}{2k-1}$$

【0119】

を満たす場合、OMP が  $k$ -スパースな信号を雑音のない測定値から復元することが示される。

【0120】

[0068] LASSOのために編み出され、滑らかでない凸最適化のための近接アルゴリズ 50

ムによってもたらされたアルゴリズムが存在する。すなわち、ISTAは近接勾配法であり、FISTAは加速された近接勾配法であり、SALSAは代替の方向乗数法の適用である。

**【0121】**

[0069]  $G(x)$  が式(4)におけるLASSOの目的関数であり  $x_* = \arg \min G(x)$  の場合に  $G(x_t) - G(x_*)$  として定義される誤差に関して、誤差は、ISTAに対して  $1/t$ 、FISTAに対して  $1/t^2$ 、SALSAに対して  $1/t^2$  につれて減衰し、ここで、tは反復の数である。当技術分野では、また、滑らかでない凸最適化のためのニュートン型の方法が知られており、その場合、収束速度は  $1=t^2$  ほど悪くないが、局所的に2次となる。

10

**【0122】**

[0070] 対象の信号は、ストリーミングデータを処理するときと同様に無限数列、 $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$  である。そのような対象の信号に関して、ストリーミング信号から取り出される第iのウィンドウは、

**【0123】**

**【数30】**

$$x^{(i)} := [x_i x_{i+1} \dots x_{i+n-1}]^T$$

20

**【0124】**

として定義される。

**【0125】**

[0071]  $x^{(i)}$  がスパースであると知られている場合、上記に概説された手段が、各ウィンドウの中の信号部分、したがって、データストリームを復元するために適用可能である。しかしながら、必要とされる演算はコストがかかり、効率のよいオンライン実装は不確かである。

**【0126】**

[0072] したがって、本発明によれば、ストリーミングデータを効率よくサンプリングし復元するための方法が提案される。そのような方法は、再帰的な圧縮センシング方法であり、以下で詳細に説明される。本明細書でさらに詳細に示されるように、本発明の方法は、サンプリングと推定の両方の部分において低複雑度を示し、そのアルゴリズムを効率のよいオンライン実装にとって適当なものにする。

30

**【0127】**

[0073] 無限数列  $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$  が  $\{x_i\}$  を用いて示され、長さnの第iのウィンドウが  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$  を用いて示される。

**【0128】**

[0074] Rにおいて入力を有する動的モデルが

**【0129】**

**【数31】**

40

$$x^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x^{(i-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{i+n-1} \quad (6)$$

**【0130】**

として表される。

50

【 0 1 3 1 】

[0075] 本発明の方法により、推定値

【 0 1 3 2 】

【 数 3 2 】

$$\{\hat{x}_i\}$$

【 0 1 3 3 】

を形式

10

【 0 1 3 4 】

【 数 3 3 】

$$y^{(i)} = A^{(i)} x^{(i)} \quad (7)$$

【 0 1 3 5 】

としての連続する測定値  $y^{(i)}$  を使用して提供する、ロバストで低複雑度のスライディングウィンドウアルゴリズムの設計が可能になり、ここで、 $\{A^{(i)}\}$  は測定行列のシーケンスである。 $\{x_i\}$  が各ウィンドウの中で十分にスパースな場合、すなわち、 $k \ll n$  として各  $i$  について  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^k$  である場合、または、この条件が十分に高い確率で遵守される場合、ロバストで低複雑度のスライディングウィンドウアルゴリズムの設計が可能である。

20

【 0 1 3 6 】

[0076]  $A^{(i)}$  が

【 0 1 3 7 】

【 数 3 4 】

$$\delta_{2k} \leq \sqrt{2} - 1$$

30

【 0 1 3 8 】

に関して制限等長性を満たす場合、本明細書において前に検討された方法は、漸進的に推定値  $\{x^{(i)}\}$  に適用され得る。そのようなアルゴリズムをオンラインで実行することはコストがかかり、したがって、せいぜいアドホックとしてみなされ得るような方法の代替物を設計することが望ましい。

【 0 1 3 9 】

[0077] 本発明によれば、連続するウィンドウの間の信号オーバーラップが活用され、次のように再帰的なサンプリング（符号化ステップ）と再帰的な推定（復号ステップ）とかなる。

40

【 0 1 4 0 】

[0078] 再帰的なサンプリングのステップに関して、各  $y^{(i)}$  に関する行列乗算を避けるために、 $A^{(i)}$  は、最小の計算オーバーヘッドで  $y^{(i+1)}$  を計算する際に  $y^{(i)}$  が再使用され得るように設計され、すなわち、

【 0 1 4 1 】

【 数 3 5 】

$$y^{(i+1)} = f(y^{(i)}, x_{i+n}, x_i)$$

【 0 1 4 2 】

50

となる。

【0 1 4 3】

[0079]再帰的な推定のステップに関して、反復的な最適化方式の収束を高速化するため  
に、以前のウィンドウ

【0 1 4 4】

【数 3 6】

$$\hat{x}^{(t-1)}$$

【0 1 4 5】

10

に対応する推定値が、

【0 1 4 6】

【数 3 7】

$$\hat{x}^{(t)}$$

【0 1 4 7】

としての推定手順の開始点

【0 1 4 8】

【数 3 8】

20

$$\hat{x}_{[0]}^{(t)}$$

【0 1 4 9】

を導くために使用され、すなわち、

【0 1 5 0】

【数 3 9】

$$\hat{x}_{[0]}^{(t)} = g(\hat{x}^{(t-1)}, \hat{y}^{(t)})$$

30

【0 1 5 1】

となる。

【0 1 5 2】

[0080]以下において、再帰的なサンプリングと再帰的な推定の両方のステップが、より  
詳細に説明される。

【0 1 5 3】

[0081]再帰的なサンプリングのステップに関して、最小の計算オーバーヘッドを特色に  
する再帰的なサンプリング方式が提案される。最初の反復  $t = 0$  において事前の推定値は  
存在せず、したがって、計算されるものは

40

【0 1 5 4】

【数 4 0】

$$y^{(0)} = A^{(0)} x^{(0)}$$

【0 1 5 5】

である。

【0 1 5 6】

[0082]センシング行列  $A^{(i)}$  のシーケンスは、

50

【 0 1 5 7 】

【 数 4 1 】

$$A^{(i+1)} = \begin{bmatrix} a_2^{(i)} a_3^{(i)} & a_n^{(i)} a_1^{(i)} \end{bmatrix} = A^{(i)} P \quad (8)$$

【 0 1 5 8 】

として再帰的に選ばれ、ここで、

【 0 1 5 9 】

【 数 4 2 】

$$a_l^{(i)}$$

【 0 1 6 0 】

は  $A^{(i)}$  の第 1 列であり、P は置換行列

【 0 1 6 1 】

【 数 4 3 】

10

$$P := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

20

【 0 1 6 2 】

である。

【 0 1 6 3 】

[0083] 以下の補助定理は、この符号化方式の成功を保証する。すなわち、 $A^{(0)}$  が所与の  $k$  に対する定数  $\kappa$  に対して制限等長性を満たす場合、上式 (8) において定義されたような  $A^{(i)}$  は、同じ  $k$ 、および  $\kappa$  に対して、同様に制限等長性を満たす。

30

【 0 1 6 4 】

[0084]  $A^{(i)} = A^{(0)} P^i$  であることは式 (8) から結果として生じ、 $A^{(i)}$  は  $A^{(0)}$  の列を並べ替えることによって取得される。定義により、制限等長性は  $x_0$  のみに依存し、 $x$  のエントリの置換、すなわち、 $A^{(0)}$  の列の置換に影響を受けない。

【 0 1 6 5 】

[0085]  $A^{(i)}$  の特定の再帰的な選択が与えられると、 $y^{(i+1)}$  は、

【 0 1 6 6 】

【 数 4 4 】

40

$$\begin{aligned} y^{(i+1)} &= A^{(i+1)} x^{(i+1)} = \sum_{l=1}^n x_{i+l} a_l^{(i+1)} = \sum_{l=1}^{n-1} x_{i+l} \underbrace{a_l^{(i+1)}}_{a_{l+1}^{(i)}} + x_{i+n} \underbrace{a_n^{(i+1)}}_{a_l^{(i)}} = \sum_{l=2}^n x_{i-l+i} a_l^{(i)} + x_i a_1^{(i)} - x_i a_1^{(i)} + x_{i+n} a_1^{(i)} = \\ &= y^{(i)} + (x_{i+n} - x_i) a_l^{(i)}. \end{aligned}$$

【 0 1 6 7 】

として計算される。

【 0 1 6 8 】

[0086] 対象の信号が雑音を備えるとき、雑音のある測定値は、

50

【 0 1 6 9 】

【 数 4 5 】

$$y^{(i)} = b^{(i)} + w^{(i)}, \text{ただし, } b^{(i)} = A^{(i)}x^{(i)}$$

【 0 1 7 0 】

として言及される。

【 0 1 7 1 】

[0087]したがって、

【 0 1 7 2 】

【 数 4 6 】

10

$$b^{(i+1)} = A^{(i+1)}x^{(i+1)} = b^{(i)} + (x_{i+n} - x_i)a_1^{(i)}$$

【 0 1 7 3 】

となる。

【 0 1 7 4 】

[0088]この式の  $b^{(i+1)}$  の値の代わりに  $y^{(i+1)}$  を用いることによって、得られるものは  
、

20

【 0 1 7 5 】

【 数 4 7 】

$$y^{(i+1)} = b^{(i+1)} + w^{(i+1)} = b^{(i)} + (x_{i+n} - x_i)a_1^{(i)} + w^{(i+1)} = y^{(i)} + (x_{i+n} - x_i)a_1^{(i)} + w^{(i+1)} - w^{(i)}$$

【 0 1 7 6 】

である。

【 0 1 7 7 】

30

[0089]  $z^{(i)} := w^{(i)} - w^{(i-1)}$  を定義することによって、 $\{w^{(i)}\}$  が独立増分プロセスの場合、 $z^{(i)}$  および  $z^{(i+1)}$  は独立している。

【 0 1 7 8 】

[0090] 式 (8) で与えられるサンプリング行列  $\{A^{(i)}\}_{i=0,1,\dots}$  の特定の選択は、条件

【 0 1 7 9 】

【 数 4 8 】

$$A^{(i)}x^{(i)} = A^{(0)}P^i x^{(i)}$$

40

【 0 1 8 0 】

を満たす。

【 0 1 8 1 】

[0091]  $v^{(i)} := P^{(i)}x^{(i)}$  として  $v^{(i)}$  を定義することによって、再帰的なサンプリングは、同じ測定行列  $A^{(0)}$  を使用することによって  $v^{(i)}$  を符号化することとして見られ得る。式 (6) で与えられる  $x^{(i)}$  の特定の構造を用いて、 $v^{(i)}$  および  $v^{(i-1)}$  のエントリのすべては、

【 0 1 8 2 】

【数49】

$$v_{i-1}^{(i)}$$

【0183】

を除いて等しい。

【0184】

[0092] 対象の信号の再帰的な推定に関して、

【0185】

【数50】

10

$$\hat{x}^{(i+1)} = \left[ \hat{x}_{i+1}^{(i+1)} \dots \hat{x}_{i+n}^{(i+1)} \right]$$

【0186】

に対する推定値は、推定値

【0187】

【数51】

20

$$\hat{x}^{(i)} = \left[ \hat{x}_i^{(i)} \dots \hat{x}_{i+n-1}^{(i)} \right]$$

【0188】

を活用することによって見つけられる。

【0189】

[0093] 反復的アルゴリズムでは、収束速度は、開始点の最適解までの距離に依存する。加速された収束を達成するために、ウィンドウ間のオーバーラップが活用され、以下の開始点が使用され、すなわち、

【0190】

【数52】

30

$$x_{[0]}^{(i)} = \left[ \hat{x}_2^{(i-1)} \hat{x}_3^{(i-1)} \dots \hat{x}_{n-1}^{(i-1)} E_{x^{(i-1)}} [x_{i+n-1}] \right]^T$$

【0191】

となり、ただし、 $j = 2, \dots, n-1$  に対して

【0192】

【数53】

$$\hat{x}_j^{(i-1)}$$

40

【0193】

は以前のウィンドウに基づく最適解の部分である。このことは、最適化の文献では「ウォームスタート」と呼ばれる。開始点をそのように選ぶことによって、収束を得るために予期される反復の数が低減される。このことは、本明細書の後の部分で実際に立証され、そこで、定量的な結果が詳細に説明される。

【0194】

[0094] 以下において、対象のスパース信号は、それらが所与の正規直交基底にあるものとして説明される。

50

## 【0195】

[0095] 本明細書ではここまで、所与の  $n \in \mathbb{Z}^+$  に対して、シーケンス  $\{x_i\}$  から取得される長さ  $n$  のウィンドウ  $x^{(i)}$  がスパース性の制約  $x^{(i)}_k = 0$ ,  $k < i$  を満たすことが、暗黙のうちに仮定されていた。一般に、 $x^{(i)}$  は、それ自体スパースでないが、適切に選択された基底においてスパースとして表され得ることがあるかも知れない。

## 【0196】

[0096]  $x^{(i)}$  をスパースとして、 $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$  は、所与の正規直交基底  $\Phi$  において  $x^{(i)} = \Phi \alpha^{(i)}$  のときにスパースとして表せるものである。

## 【0197】

[0097] サイズ  $n$  のウィンドウにわたるシーケンス  $\{x_i\}$  全体に対して共通の基底を仮定すると、得られるものは、

## 【0198】

## 【数54】

$$y^{(t)} = A^{(t)} x^{(t)} = A^{(t)} \Phi \alpha^{(t)}$$

## 【0199】

である。

## 【0200】

[0098] 引き継がせるべき圧縮センシング推定に対して、 $A^{(i)}$  は制限等長性を満たす必要がある。制限等長性は、ランダム行列  $A^{(i)}$  と任意の固定行列との積に関して高い確率で満たされる。このケースでは、信号をスパース性基底において復元するための LASSO 問題、 $\alpha^{(i)}$  は、

## 【0201】

## 【数55】

$$\text{ミニマインズ } \|A^{(i)} \Phi \alpha^{(i)} - y\|_2^2 + \lambda \|\alpha^{(i)}\|_1$$

## 【0202】

として表現され、ここで、入力信号は  $x^{(i)} = \Phi \alpha^{(i)}$  によって与えられる。

## 【0203】

[0099] 解かれるべき必要がある問題は、 $E[\alpha^{(i+1)} | \alpha^{(i)}]$  のような再帰的な推定において、加速された収束を得るために良好な初期推定値を有するように、 $\alpha^{(i+1)}$  に対して  $\alpha^{(i)}$  に基づく再帰的な更新をどのように見つけるかということである。

## 【0204】

[00100] 式(6)を使用すると、得られるものは

## 【0205】

## 【数56】

$$x^{(i+1)} = \prod x^{(i)} + \left[ \frac{0_{n-1}}{1} \right] (x_{i+n} - x_i)$$

## 【0206】

であり、ここで、 $0_{n-1}$  はすべての要素が 0 に設定された長さ  $n - 1$  のベクトルである。

## 【0207】

[00101]  $x^{(i)} = \Phi \alpha^{(i)}$  なので、

## 【0208】

【数 5 7】

$$x_i = x_0^{(i)} = [1 | \mathbf{0}_{n-1}] \Phi \alpha^{(i+1)} \text{ および}$$

【0 2 0 9】

【数 5 8】

$$x_{i+1} = x_{n-1}^{(i+1)} = [\mathbf{0}_{n-1} | 1] \Phi \alpha^{(i+1)}$$

10

【0 2 1 0】

が得られる。

【0 2 1 1】

[00102] 前の式において  $= -^T$  を両側に左から掛けると、それは、

【0 2 1 2】

【数 5 9】

$$\begin{aligned} \alpha^{(i+1)} &= \Psi x^{(i+1)} = \Psi \prod x^{(i)} + \Psi \left[ \frac{\mathbf{0}_{n-1}}{1} \right] (x_{i+n} - x_i) = \\ &= \Psi \prod x^{(i)} + (x_{i+n} - x_i) \psi_{n-1} = \\ &= \Psi \prod \Phi \alpha^{(i)} + \psi_{n-1} \left( (\phi_{n-1}^T)^T \alpha^{(i+1)} - (\phi_0^T)^T \alpha^{(i)} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

20

【0 2 1 3】

に従い、ここで、 $= P^T$  は式 (9) で与えられた置換行列であり、

[00103]

【0 2 1 4】

【数 6 0】

30

$$(\phi_0^T)^T$$

【0 2 1 5】

および

【0 2 1 6】

【数 6 1】

$$(\phi_{n-1}^T)^T$$

40

【0 2 1 7】

は、それぞれ、正規直交基底 の最初の行および最後の行である。

【0 2 1 8】

[00104] フーリエ基底は、効率のよい更新規則がそのような基底に関して導かれ得るので、 について特に興味深い。フーリエ基底に対する再帰的なサンプリングは、次のようなになる。

【0 2 1 9】

[00105] が、エントリ

【0 2 2 0】

50

【数62】

$$\Phi_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)} / \sqrt{n}$$

【0221】

を有する  $n \times n$  の逆離散フーリエ変換 (IDFT) 行列であり、

【0222】

【数63】

$$\omega := e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

10

【0223】

の場合、そのようなケースでは、

【0224】

【数64】

$$\alpha^{(i+1)} = \Omega_n \alpha^{(i)} + \psi_{n-1} \left( (\Phi_{n-1}^T)^T \alpha^{(i+1)} - (\Phi_0^T)^T \alpha^{(i)} \right) \quad (12)$$

20

【0225】

となり、ここで、 $\Omega_n$  は、 $(\Omega_n)_{i,i} = e^{-j(i-1)}$  を有する  $n \times n$  の対角行列であり、 $\psi_{n-1}$  は正規直交フーリエ基底である。

【0226】

[00106] この特定のケースでは、 $\Omega_n = \omega_n$  および  $\psi_{n-1} = I$  のように、時間領域における循環シフトはフーリエ領域における複素指數関数による乗算に相当するので、式(11)は式(12)へと簡単になる。

【0227】

[00107] 上記から、 $\omega^{(i)}$  に基づいて  $\omega^{(i+1)}$  を算出するための計算の数は一般に  $O(n^2)$  であるが、フーリエ基底に関しては、 $\omega^{(i)}$  を乗算する行列が対角なので  $O(n)$  であることが理解され得る。

30

【0228】

[00108] 前に示したように、雑音の存在下で、 $E[\omega^{(i+1)} | \omega^{(i)}]$  としての推定値は、加速された収束を達成するために、反復 LASSO ソルバーにおけるウォームスタートのための開始点として使用される。

【0229】

[00109] 誤差分散を改善するための 1 つのやり方は、連続するウィンドウから取得された推定値を平均することによる。推定値

【0230】

【数65】

40

$$\hat{x}^{(i)}$$

【0231】

を使用すると、平均推定値

【0232】

【数66】

$$\bar{x}_i$$

50

【0233】

は、ストリーミング信号の第  $i$  のエントリ、すなわち、 $x_i$  に対して、

【0234】

【数67】

$$\bar{x}_i := \frac{1}{\min\{i+1, n\}} \sum_{j=\max\{0, i-n+1\}}^i \hat{x}_{i-j}^{(j)} \quad (13)$$

【0235】

として定義され、ここで、 $i = n - 1$  に対する  $n$  個の多くの推定値と、 $i < n - 1$  に対する  $i + 1$  個の多くの推定値とを平均する。 10

【0236】

[00110] 表記上の簡単のために  $i = n - 1$  を考察すると、さらに得られるものは

【0237】

【数68】

$$\frac{1}{n} \sum_{j=i-n+1}^i (\hat{x}_{i-j}^{(j)} - x_i)^2 \stackrel{(a)}{\geq} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=i-n+1}^i (\hat{x}_{i-j}^{(j)} - \bar{x}_i) \right)^2 = (\bar{x}_i - x_i)^2$$

20

【0238】

であり、ここで、(a) は、 $x^2$  に適用されるイエンセンの不等式から結果として生じる。不等式は、再構成誤差が、推定値を平均することのみによって小さくされ得ることを暗示する。

【0239】

[00111] 以下において、再構成誤差

【0240】

【数69】

$$|\bar{x} - x_i|^2$$

30

【0241】

の予期される  $L_2$ -ノルムは、式を拡張すること、および、

【0242】

【数70】

$$j \neq k \text{ について、} Cov[\hat{x}_{j+1}^{(i-j)}, \hat{x}_{k+1}^{(i-k)}] = 0$$

40

【0243】

を使用することによって、分析される。

【0244】

[00112] 表記上の便利のため、 $i = n - 1$  のケースが考察され、 $i < n - 1$  のケースは類似である。

【0245】

【数71】

$$E_x[(\bar{x}_i - x_i)^2] = E_x \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{j=i-n+1}^i \hat{x}_{i-j}^{(i)} - x_i \right)^2 \right] = (E_x[\hat{x}_1^{(i)}] - x_i)^2 + \frac{1}{n} E_x[(\hat{x}_1^{(i)} - E_x[\hat{x}_1^{(i)}])^2]$$

【0246】

[00113]得られた等式は、推定量のいわゆるバイアス分散の分解である。ウィンドウの長さが増大するにつれて、第2項はゼロに近づき、再構成誤差はLASSOのバイアスの二乗に漸近的に収束することが理解される。

10

【0247】

[00114]以下において、本発明に従って提案されるアルゴリズムが説明される。

【0248】

[00115]一般に、最小絶対選択収縮演算子(LASSO)は、 $m = n$ として  $R^m = R^n$  の写像を行うとき、バイアスのある推定量を生じる。ウィンドウ間のオーバーラップがLASSO推定値を直接平均することによって利用される場合、再構成誤差は、バイアスに起因してゼロへ進まない。一方、最小2乗推定(LSE)は、優決定のシステムに関するバイアスのない推定量であり、本明細書で上記に示したように、LASSOは、LSEがその後適用され得る信号の台集合を推定するために使用され得る。これらの観測に基づいて、サンプリングされた信号を推定誤差を低減するように復元するために、2段階の推定手順が提案される。最初に、LASSO推定値

20

【0249】

【数72】

$\hat{x}^{(i)}$

【0250】

が取得され、次いで、それがバイアス除去アルゴリズムへの入力として使用される。バイアス除去に関して、

【0251】

30

【数73】

$\tilde{x}^{(i)}$

【0252】

を得るためにLSEがLASSO推定値の台集合で実行され、 $x^{(i)}$ 。 $m$ であり台が正しく識別されるとき、それは信号の真の非ゼロのバイアスのない推定量を与える。その後、連続するウィンドウにわたって取得されバイアス除去された推定値が、平均される。アルゴリズムのための方法のブロック図および擬似コードが、それぞれ、以下に付加される図およびアルゴリズム1に見られ得る。

40

【0253】

[00116]アルゴリズム1 再帰的な圧縮センシング：

入力： $A^{(0)} \in R^{m \times n}$ 、 $\{x\}$ 、 $0$

出力：推定値

【0254】

【数74】

$\{\bar{x}\}$

【0255】

50

1. 台選択回数 : { v } { 0 }、信号推定値 :  
 【 0 2 5 6 】  
 【 数 7 5 】

$$\{\bar{x}\} \leftarrow \{0\}$$

【 0 2 5 7 】

2 .  
 【 0 2 5 8 】  
 【 数 7 6 】

10

for i=0, 1, 2, ... do

【 0 2 5 9 】  
 3 .  
 【 0 2 6 0 】  
 【 数 7 7 】

$$x^{(i)} \leftarrow (x_i x_{i+1} \dots x_{i+n-1})^T$$

20

【 0 2 6 1 】  
 4 .  
 【 0 2 6 2 】  
 【 数 7 8 】

$$y^{(i)} \leftarrow A^{(i)} x^{(i)} + w^{(i)} \rightarrow \text{符号化}$$

【 0 2 6 3 】  
 5 .  
 【 0 2 6 4 】  
 【 数 7 9 】

30

$$\hat{x}^{(i)} \leftarrow \arg \min_{x \in R^n} \|A^{(i)}x - y^{(i)}\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \text{LASSO}$$

【 0 2 6 5 】  
 6 .  
 【 0 2 6 6 】  
 【 数 8 0 】

40

$$I \leftarrow \sup p(\hat{x}^{(i)}) \rightarrow \text{台推定}$$

【 0 2 6 7 】  
 7 .  
 【 0 2 6 8 】

【数 8 1】

 $v_{I+1} \leftarrow v_{I+1} + 1 \rightarrow$ 台の選択の回数を増やす

【0 2 6 9】

8.

【0 2 7 0】

【数 8 2】

$$\tilde{x}^{(i)} \leftarrow \arg \min_{x \in R^{|I|}} \|A_I^{(i)}x - y^{(i)}\|_2^2 \quad \rightarrow \text{台集合におけるLSE}$$

10

【0 2 7 1】

9.

【0 2 7 2】

【数 8 3】

 $\bar{x}_I^{(i)} \leftarrow ((v_I^{(i)} - 1) \otimes \bar{x}_I^{(i)} + \tilde{x}^{(i)}) \rightarrow$ ゼロと交差した演算子が要素に関する乗算

および除算をそれぞれ表す、平均推定値を更新する

20

【0 2 7 3】

10.

【0 2 7 4】

【数 8 4】

 $A^{(i)} \leftarrow A^{(i-1)}P \quad \rightarrow$ 再帰的なサンプリングとして

【0 2 7 5】

30

11. 終了。

【0 2 7 6】

[00117]本発明の一実施形態によるストリーミングデータを感知するための方法のプロック図が、図1に表される。本実施形態による方法は、データの入力ストリームを、少なくとも以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理のステップを使用して再帰的にサンプリングし、後続の測定値を取得するために、前記以前の測定値を使用するステップとを備える。より正確には、方法は、データの入力ストリームの再帰的なサンプリングのステップ102を備える。再帰的なサンプリングのステップ102の間にサンプリングされたデータは、再帰的な推定ステップ104を介して処理される。再帰的なサンプリングの前の、以前の推定値取得ステップ116の間に取得された以前の推定値に関する情報は、同様に、再帰的な推定のステップ104の間に帰属させられる。再帰的なサンプリングアルゴリズムのステップ6に関して上述したように、再帰的な推定のステップ104の間に取得されたデータは、台検出のステップ106の間に利用される。台検出ステップの結果として処理された情報は、図1のステップ110に図示し再帰的なサンプリングアルゴリズムのステップ7に対応するように、回数推定のために使用され得る。再帰的なサンプリングアルゴリズムのステップ8に関して上述したように、ステップ106において取得された情報は、台集合においてLSEを算出するステップ108の間に利用される。再帰的なサンプリングアルゴリズムのステップ9に関して上述したように、その後、台集合におけるLSE、および推定回数は、ステップ112において平均される。方法の一実施形態によれば、ステップ116の間に取得された以前の推定値は、同様に

40

50

、ステップ112において平均される。再帰的なサンプリングアルゴリズムのステップ10に関して上述したように、新しい推定値がステップ114において取得される。

#### 【0277】

[00118]そのような1つの実施形態による方法は、同様に、方法の計算量と推定誤差とを分析することができる。

#### 【0278】

[00119]より正確には、以下において、方法の複雑度および誤差分散が分析され、よりロバストな台検出のための投票アルゴリズムが導入される。

#### 【0279】

[00120]方法の一実施形態を表す図1のブロック図は、連続するウィンドウ間に可変のオーバーラップを備える方法に拡張され得る。10

#### 【0280】

[00121]考察中に取り上げられることは、感知することが $0 < n$ のオーバーラップを用いた循環するウィンドウ処理を介して実行されることの一般化である。

#### 【0281】

[00122] $A \in R^{m \times n}$ がサンプリング行列を表す場合、 $i$ はウィンドウインデックスを表し、 $\eta_i$ はサンプリング効率であり、それは時間( $n + i$ )までに取得される総サンプルの、感知されるエントリの数に対する比である。1つのウィンドウに関して、サンプリング行列が $A \in R^{m \times n}$ なのでサンプリング効率は $m / n$ である。20

#### 【0282】

[00123]第*i*のウィンドウの端部までに、*i m*個のサンプルを取得しながら $n + (i - 1)$ 個の要素が復元されている。漸近のサンプリング効率は

#### 【0283】

#### 【数85】

$$\eta := \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{im}{n + (i-1)\tau} = \frac{m}{\tau}$$

#### 【0284】

である。30

#### 【0285】

[00124]代わりに、 $e_n$ 符号化において使用される符号化がランクの更新を使用する場合、すなわち、サンプリング行列を1回循環シフトすることによって得られる行列を使用することによる場合、漸近のサンプリング効率は、

#### 【0286】

#### 【数86】

$$\eta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{m + (i-1)\tau}{n + (i-1)\tau} = 1$$

#### 【0287】

となる。

#### 【0288】

[00125]後者のケースでは、再帰的なサンプリング手法は、各時間インスタンスについて1つのサンプルを取得することと漸近的に同等である。そのような手法の利点は、雑音抑圧にある。オーバーラップしたウィンドウを採用することによって、各要素は最小

#### 【0289】

10

20

30

40

【数 8 7】

$$\lfloor n/\tau \rfloor$$

【0 2 9 0】

回の多くの回数において感知され、したがって、複数を使用する協調復号が、推定精度を向上させるために使用され得る。

【0 2 9 1】

[00126]信号の台推定への LASSO の適用が、本明細書において前に説明された。本明細書ではさらに、大きい測定雑音におけるよりロバストな台検出のために、連続するウインドウにわたって推定される台を利用する方法が導入される。信号の大きさが雑音レベルを越えるほど十分大きくなきとき、上述の台検出メカニズムは、非ゼロの位置を逃すことがあり（フォールスネガティブ）、または誤りの台を検出することがある（フォールスポジティブ）。したがって、本明細書において前に説明した台検出定理は、成功確率を低減するという犠牲を伴って、より小さい最小の非ゼロ値に対して台を検出するために、より小さい正則化定数、 $\lambda$  を使用することができる。フォールスポジティブが、すべての  $i$  について集合  $\{0, \dots, n-1\} \setminus supp(x^{(i)})$  の上でランダムに分布すると仮定すると、位置が台として検出されるために必要となる最小の回数にしきい値を導入することによって、低い信号対雑音領域においてフォールスポジティブを低減することができる。

10

【0 2 9 2】

[00127]「投票機」を導入することによって、投票することを用いて得られる 2 段階アルゴリズムが、図 1 における台検出ブロック 106 内に表され得る。2 段階アルゴリズムは、

【0 2 9 3】

【数 8 8】

$$\hat{x}^{(i)} = \arg \min_{x \in R^n} \left( \|A^{(i)}x - y^{(i)}\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right)$$

20

【0 2 9 4】

のような LASSO を解くことによって作用する。

【0 2 9 5】

[00128]  $\lambda$  が  $> 0$  として設定される場合、

【0 2 9 6】

【数 8 9】

$$\hat{x}^{(i)}$$

【0 2 9 7】

30

の絶対値が  $\lambda$  よりも大きいインデックスが、 $x^{(i)}$  の台を推定するために見つけられ、第  $i$  のウインドウにおいて

【0 2 9 8】

【数 9 0】

$$S_t^{(i)} = \left\{ j : |\hat{x}_j^{(i)}| \geq \xi_1 \right\}$$

【0 2 9 9】

となる。

40

投票を含むシーケンスは  $\{v_i\}$  として、インデックス  $i$  が最小 2 乗推定 (LSE) において使用される回数は  $\{l_i\}$  として、定義される。アルゴリズムの初めに、 $\{v_i\}$  および  $\{l_i\}$  はゼロに設定される。各ウィンドウに対して、集合の中にある位置についての投票が加えられ、集合は、

【0300】

【数91】

$$S_t^{(i)} \text{ のときに } v_{S_t^{(i)}+1} \leftarrow v_{S_t^{(i)}+1} + 1$$

10

【0301】

によって示され、ここで、下付き文字

【0302】

【数92】

$$S_t^{(i)} + i$$

【0303】

は、ウィンドウ内のインデックスをストリーミングデータ上の大域的なインデックスに変換するために使用される。投票  $\{v_i\}$  の回数にしきい値  $\zeta_2 \in \mathbb{Z}^+$  を適用することによって、非ゼロとして認められるべきものとして十分多くの回数投票されたインデックスが見つけられ、それらは

20

【0304】

【数93】

$$S_g^{(i)} = \{j : v_{j+i} \geq \zeta_2\}$$

【0305】

30

に記憶される。

【0306】

[00129] しきい値  $\zeta_2$  は、

【0307】

【数94】

$$|S_g^{(i)}| < m$$

【0308】

のように選ばれ、したがって、LSE に対して優決定のシステムをもたらす。優決定の最小 2 乗問題は、これらのインデックス

40

【0309】

【数95】

$$\tilde{x}^{(i)} = \left( A_{S_g^{(i)}}^{(i)T} A_{S_g^{(i)}}^{(i)} \right)^{-1} A_{S_g^{(i)}}^{(i)T} y^{(i)}$$

【0310】

[00130] に基づいて解かれ、ここで、

【0311】

50

【数 9 6】

$$A_{S_g^{(i)}}^{(i)}$$

【0 3 1 2】

は集合

【0 3 1 3】

【数 9 7】

$$S_g^{(i)}$$

10

【0 3 1 4】

によってインデックスが付けられた  $A^{(i)}$  の列を抽出することによって得られる行列である。次いで、最小 2 乗推定値の平均を実行するために、LSE 手順において使用されるエントリに関して、復元の数が

【0 3 1 5】

【数 9 8】

$$L_{S_g^{(i)}+i} \leftarrow L_{S_g^{(i)}+i} + 1$$

20

【0 3 1 6】

のようにインクリメントされる。

【0 3 1 7】

[00131]ベクトル

【0 3 1 8】

【数 9 9】

$$\tilde{x}^{(i)}$$

30

【0 3 1 9】

は、

【0 3 2 0】

【数 1 0 0】

$$R^{|S_g^{(i)}|}$$

40

【0 3 2 1】

の中にあり、ベクトル  $x'$  ,  $R^n$  は、

【0 3 2 2】

【数 1 0 1】

$$S_g^{(i)}$$

【0 3 2 3】

によってインデックスが付けられた要素を

【0 3 2 4】

50

【数102】

$$\hat{x}_{S_k^{(l)}}' = \tilde{x}^{(l)}$$

【0325】

としての最小2乗推定値に設定し、他のすべてインデックスを0に設定することによって生成される。次いで、平均推定値が、

【0326】

【数103】

10

$$j=0, 1, \dots, n-1 \text{について、} \bar{x}_{i+j} \leftarrow \frac{L_i - 1}{L_i} \bar{x}_{i+j} + \frac{1}{L_i} x_j'$$

【0327】

のように更新される。

【0328】

[00132]一実施形態による方法の推定誤差分散および計算量が、以下において分析される。

【0329】

20

[00133]2段階RCS法の推定誤差分散の分析が行われる前に、以下の補助定理が導入される。

【0330】

[00134]補助定理5.1：式(4)におけるLASSOの解を

【0331】

【数104】

$$\hat{\nu}$$

【0332】

30

によって表し、その台集合を

【0333】

【数105】

$$I := \text{supp}(\hat{\nu})$$

【0334】

によって表し、列A<sub>1</sub>に制限される最小2乗解を

【0335】

40

【数106】

$$\tilde{\nu} := \arg \min_{\substack{\nu \in R^* \\ \nu_{I^c} = 0}} \|A\nu - y\|_2^2$$

【0336】

によって表すと、  
次式が満たされる。

【0337】

50

【数107】

$$\|A_I(\tilde{v}_I - \hat{v}_I)\|_2^2 \leq (\|\tilde{v}_I\|_1 - \|\hat{v}_I\|_1) \frac{\lambda}{2}$$

【0338】

[00135]選択される台とは無関係に、以下は、LASSO推定、およびLASSO推定値の台に適用される最小2乗に関して有効である。

【0339】

【数108】

10

$$\hat{v} = \arg \min_{v \in R^n} \|Av - y\|_2^2 + \lambda \|v\|_1 = \arg \min_{\substack{v \in R^n \\ v_{f^*=0}}} \|Av - y\|_2^2 + \lambda \|v\|_1$$

【0340】

【数109】

$$\tilde{v} = \arg \min_{\substack{v \in R^n \\ f^*=0}} \|Av - y\|_2^2$$

20

【0341】

ただし、

【0342】

【数110】

$$I = \text{supp}(\hat{v})$$

【0343】

30

である。LASSOの最適性条件は、

【0344】

【数111】

$$A_I^T(y - A_I \hat{v}_I) = \frac{\lambda}{2} \text{sgn}(\hat{v}_I) \quad (15)$$

【0345】

[00136]をもたらし、ここで、sgn(v)はベクトルに拡張された符号関数である。

正規方程式は、

40

【0346】

【数112】

$$A_I^T A_I \tilde{v}_I = A_I^T y$$

【0347】

を示す。

【0348】

[00137]したがって、

50

【 0 3 4 9 】

【数 1 1 3 】

$$\begin{aligned} \left\| A_I (\tilde{v}_I^{(t)} - \hat{v}_I^{(t)}) \right\|_2^2 &= (\tilde{v}_I - \hat{v}_I)^T A_I^T A_I (\tilde{v}_I - \hat{v}_I) \stackrel{(a)}{=} (\tilde{v}_I - \hat{v}_I)^T \frac{\lambda}{2} \operatorname{sgn}(\hat{v}_I) \leq \left( \|\tilde{v}_I\|_1 - \|\hat{v}_I\|_1 \right) \frac{\lambda}{2} \stackrel{(c)}{=} \\ &\stackrel{(c)}{=} \left( \|\tilde{v}\|_1 - \|\hat{v}\|_1 \right) \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

【 0 3 5 0 】

であり、ここで、(a)は式(15)および正規方程式から結果として生じ、(b)は 10

【 0 3 5 1 】

【数 1 1 4 】

$$\hat{v}_I^T \operatorname{sgn}(\hat{v}_I) = \|\hat{v}_I\|_1 \text{ および}$$

【 0 3 5 2 】

【数 1 1 5 】

$$\tilde{v}_I^T \operatorname{sgn}(\hat{v}_I) \leq \|\tilde{v}_I\|_1$$

20

【 0 3 5 3 】

から結果として生じ、(c)は

【 0 3 5 4 】

【数 1 1 6 】

$$\hat{v}_{I^c} = \tilde{v}_{I^c} = 0$$

【 0 3 5 5 】

30

から結果として生じる。

【 0 3 5 6 】

[00138] 雑音が台検出にかかわらず無相関であると仮定される場合、すなわち、i = j について

【 0 3 5 7 】

【数 1 1 7 】

$$\operatorname{Cov}[w^{(i)}, w^{(j)} | A_i, A_j = 0]$$

40

【 0 3 5 8 】

であり、A\_i が、第 i のウィンドウの中で台検出が成功したという事象を表す場合、

【 0 3 5 9 】

【数 1 1 8 】

$$A_i = \{ \operatorname{supp}(\hat{x}^{(i)}) = \operatorname{supp}(x^{(i)}) \}$$

【 0 3 6 0 】

となる。

50

## 【0361】

[00139]以下の定理は、提案される2段階アルゴリズムの再構成誤差分散における上界を与える。

## 【0362】

[00140]提案されるアルゴリズムに対する誤差分散に関する定理によれば、台検出に関して上記で説明した条件のもとで、また、雑音が、固定のkおよびnに関して台検出にかかるわらず無相関であるという仮定のもとで、以下の条件が有効である。

## 【0363】

## 【数119】

10

$$E[(\bar{x}_i - x_i)^2] \leq P(A) \frac{\sigma^2}{\left(1 - \sqrt{k/m}\right)} + \frac{P(A^c)}{n} \sum_{l=0}^{n-1} E\left[ \frac{\lambda(\|\tilde{x}_l^{(i)}\|_1 - \|\hat{x}_l^{(i)}\|_1)}{2(1 - \sqrt{k/m})} + \|\hat{x}^{(i)} - x^{(i)}\|_2^2 \right]$$

## 【0364】

ただし、

## 【0365】

## 【数120】

20

$$P(A) \geq 1 - 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \log n}} + \frac{|I|}{n} \right) - \frac{c}{n^{2\log 2-1}} \text{ および}$$

## 【0366】

## 【数121】

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

30

## 【0367】

である。

## 【0368】

[00141]上で提示された定理の有効性を立証するために、以下の3つの条件が満たされる必要がある。

## 【0369】

[00142]第1の条件は、

$k = m$ として、 $m$ 、および $k$ が $A_{i,j} \sim N(0, 1/m)$ としての $m \times k$ 行列 $A$ に対して与えられると、特異値 $s_1(A), \dots, s_k(A)$ は条件

## 【0370】

## 【数122】

40

$$\max \left\{ P(s_i(A) \geq 1 + \sqrt{k/m} + t), P(s_k(A) \leq 1 - \sqrt{k/m} - t) \right\} < \exp(-mt^2/2)$$

## 【0371】

を満たすことである。

## 【0372】

[00143]第2の条件は、

## 【0373】

50

【数123】

$$P(A_i) \geq 1 - \frac{2}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \log n}} + \frac{|I_i|}{n} \right) - O\left(\frac{1}{n^{2\log 2}}\right)$$

【0374】

である。

【0375】

[00144] 和集合上界により、

【0376】

【数124】

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) \geq 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \log n}} + \frac{|I|}{n}\right) - \frac{c}{n^{2\log 2-1}}$$

【0377】

である。

【0378】

[00145]

【0379】

【数125】

$$\hat{v}^{(i)}$$

【0380】

が Lasso 推定値として定義される。それは、最小2乗が Lasso の台

【0381】

【数126】

20

$$\hat{v}^{(l)}$$

【0382】

に適用されることによって得られる。

【0383】

[00146] LASSO 推定値は

【0384】

【数127】

30

$$\tilde{v}^{(i)}$$

【0385】

と定義され、推定値は、最小2乗が LASSO の台

【0386】

【数128】

40

$$\tilde{v}^{(i)}$$

50

【 0 3 8 7 】

に、

【 0 3 8 8 】

【 数 1 2 9 】

$$\hat{v}^{(i)} = \arg \min_{v \in R^n} \|Av - y^{(i)}\|_2^2 + \lambda \|v\|_1$$

【 0 3 8 9 】

【 数 1 3 0 】

10

$$\tilde{v}^{(i)} = \arg \min_{\substack{v \in R^n \\ v_{j^c} = 0}} \|Av - y^{(i)}\|_2^2$$

【 0 3 9 0 】

のように適用されることによって得られ、ここで、

【 0 3 9 1 】

【 数 1 3 1 】

20

$$I = \text{supp}(\hat{v}^{(i)})$$

【 0 3 9 2 】

である。

【 0 3 9 3 】

[00147] 引き続くすべてのウィンドウの中の台が正しく検出される場合、

【 0 3 9 4 】

【 数 1 3 2 】

30

$$A_1 \cap \dots \cap A_n$$

【 0 3 9 5 】

となり、通常の最小 2 乗推定値は、

【 0 3 9 6 】

【 数 1 3 3 】

$$\tilde{v}^{(i)} = (A_{I^{(i)}}^T A_{I^{(i)}})^{-1} A_{I^{(i)}}^T y^{(i)}$$

40

【 0 3 9 7 】

となる。

【 0 3 9 8 】

[00148]

【 0 3 9 9 】

【 数 1 3 4 】

$$A_{I^{(i)}}$$

50

【 0 4 0 0 】

の特異値が高い確率で非ゼロなので、行列

【 0 4 0 1 】

【 数 1 3 5 】

$$A_{I^{(l)}}^T A_{I^{(l)}}$$

【 0 4 0 2 】

は可逆である。

【 0 4 0 3 】

[00149] 標準的な L S E から、

【 0 4 0 4 】

【 数 1 3 6 】

$$E[\tilde{v}^{(l)}] = v_{I^{(l)}}^{(l)} \text{ および } Cov[\tilde{v}^{(l)}] = \sigma^2 (A_{I^{(l)}}^{(l)T} A_{I^{(l)}}^{(l)})^{-1}$$

【 0 4 0 5 】

である。

【 0 4 0 6 】

[00150] n 回推定される信号における最初のエントリである  $v_{n-1} = x_{n-1}$  などの、任意の固定のエントリに対して、

【 0 4 0 7 】

【 数 1 3 7 】

$$A_0^{n-1} := A_0 \cup \dots A_{n-1}$$

【 0 4 0 8 】

が与えられると、

【 0 4 0 9 】

【 数 1 3 8 】

$$\begin{aligned} E_v \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{v}_{n-1}^{(i)} - v_{n-1})^2 \right)^2 \middle| A_0^{n-1} \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{n-1} E_v [(\tilde{v}_{n-1}^{(l)} - v_{n-1})^2 | A_0^{n-1}] + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} E_v [(\tilde{v}_{n-1}^{(i)} - v_{n-1})(\tilde{v}_{n-1}^{(j)} - v_{n-1}) | A_0^{n-1}] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} E_v [(\tilde{v}_{n-1}^{(i)} - v_{n-1})^2 | A_0^{n-1}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T (A_{I^{(i)}}^T A_{I^{(i)}})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^2 \frac{1}{\sigma_k(A_{I^{(i)}})} \leq \frac{\sigma^2}{n(1 - \sqrt{k/m})} \end{aligned}$$

【 0 4 1 0 】

【 数 1 3 9 】

$$m \sim k \log(n/k)$$

【 0 4 1 1 】

となる。

【 0 4 1 2 】

10

20

30

40

50

[00151] mに関するこの値は、ほぼ  $1/n$  につれて減少し、したがって、引き続く n 個のウィンドウの中で台検出が成功する場合において、再構成分散はゼロへ進む。

【0 4 1 3】

[00152] 第 3 の場所では、前のケースの補完物

【0 4 1 4】

【数 1 4 0】

$$\left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c$$

10

【0 4 1 5】

において、知る起こることが重要である。

【0 4 1 6】

【数 1 4 1】

$$\hat{v}^{(t)}$$

【0 4 1 7】

20

および

【0 4 1 8】

【数 1 4 2】

$$\tilde{v}^{(t)}$$

【0 4 1 9】

に対して、上記の補助定理は、

【0 4 2 0】

【数 1 4 3】

30

$$\left\| A_I (\tilde{v}_I^{(t)} - \hat{v}_I^{(t)}) \right\|_2^2 \leq \left( \left\| \tilde{v}_I^{(t)} \right\|_1 - \left\| \hat{v}_I^{(t)} \right\|_1 \right) \frac{\lambda}{2}$$

【0 4 2 1】

をもたらす。

【0 4 2 2】

[00153] したがって、

【0 4 2 3】

【数 1 4 4】

40

$$\left\| \tilde{v}_I^{(t)} - \hat{v}_I^{(t)} \right\|_2^2 \leq \left( \left\| \tilde{v}_I^{(t)} \right\|_1 - \left\| \hat{v}_I^{(t)} \right\|_1 \right) \frac{\lambda}{2(1 - \sqrt{k/m})}$$

【0 4 2 4】

となる。

【0 4 2 5】

[00154] 三角不等式を使用すると、台集合における L S E 推定値と真の信号との間の差の  $\ell_2$ -ノルムに対する上界を得る。

50

【 0 4 2 6 】  
【 数 1 4 5 】

$$\left\| \tilde{v}^{(t)} - v^{(t)} \right\|_2^2 \leq \left\| \tilde{v}^{(t)} - \hat{v}^{(t)} \right\|_2^2 + \left\| \hat{v}^{(t)} - v^{(t)} \right\|_2^2 \leq \frac{\lambda \left( \left\| \tilde{v}_I^{(t)} \right\|_1 - \left\| \hat{v}_I^{(t)} \right\|_1 \right)}{2(1 - \sqrt{k/m})} + \left\| \hat{v}^{(t)} - v^{(t)} \right\|_2^2$$

(16, 17)

【 0 4 2 7 】  
【 0 4 2 8 】  
【 数 1 4 6 】

$$E[(\bar{v}_{n-1} - v_{n-1})^2] = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{v}_{n-1}^{(i)} - v_{n-1})\right)^2\right] \leq E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{v}_{n-1}^{(i)} - v_{n-1})^2\right] \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left\| \tilde{v}^{(i)} - v^{(i)} \right\|_2^2\right]$$

【 0 4 2 9 】  
である。  
【 0 4 3 0 】  
【 0 4 3 1 】  
【 数 1 4 7 】

 $A_0^n$ 

【 0 4 3 2 】  
および  
【 0 4 3 3 】  
【 数 1 4 8 】

 $(A_0^n)^c$ 

【 0 4 3 4 】  
に関する確率を使用し、  
v、  
【 0 4 3 5 】  
【 数 1 4 9 】

 $\tilde{v}$ 

【 0 4 3 6 】  
、および  
【 0 4 3 7 】

10

20

40

【数 1 5 0】

 $\tilde{v}$ 

【0 4 3 8】

が、それぞれ、 $\times$ 、

【0 4 3 9】

【数 1 5 1】

 $\tilde{x}$ 

10

【0 4 4 0】

および

【0 4 4 1】

【数 1 5 2】

 $\hat{x}$ 

【0 4 4 2】

と交換され得ることに言及して、不等式 17 を置き換えることによって得られる。

20

【0 4 4 3】

[00157] 以下において、再帰的な圧縮センシングのアルゴリズムの計算量が分析される。  
。

【0 4 4 4】

[00158]  $i$  がウィンドウインデックスである場合、 $A^{(i)} \in R^{m \times n}$  はサンプリング行列であり、 $i$  は連続するウィンドウ間のスライディングステップのスライディングスロットの数を示し、第  $i$  のウィンドウの終わりまでに  $n + (i - 1)$  個のエントリが復元されている。

【0 4 4 5】

[00159] 第 1 のウィンドウは、 $A^{(0)} \times x^{(0)}$  によってサンプリングされる。このことは、加算および乗算などの  $O(mn)$  回の基本演算を必要とする。初期ウィンドウの後、ウィンドウのサンプリング

30

【0 4 4 6】

【数 1 5 3】

$$x^{(i)} = [x_{i\tau} x_{i\tau+1} \cdots x_{i\tau+n-1}]$$

【0 4 4 7】

は、複雑度  $O(m)$  を伴うランク  $k$  の更新を有する再帰的なサンプリングによって実現される。したがって、第  $i$  のウィンドウの終わりまでに、サンプリングの総複雑度は、再帰的なサンプリングに関する平均複雑度としての  $O(m)$  に対して  $O(mn) + O(m)$  となる。

40

【0 4 4 8】

[00160] 計算量への他の寄与は、反復ソルバーから生じる。予期される複雑度は、各反復における演算の数に、収束を得るために予期される反復の数を掛けたものとして算出され得る反復ソルバーに起因する。前者は特定のアルゴリズムに依存し、後者は開始点の最適解までの距離の関数であり、再帰的な推定を使用するケースに次のように拘束される。

【0 4 4 9】

[00161]

【0 4 5 0】

50

【数154】

$$\hat{x}_{[0]}^{(i)} = \left[ x_{\tau}^{(i-1)} \cdots x_{n-1}^{(i-1)} 0^T \right]^T$$

【0451】

を使用する。

【0452】

[00162] 開始点として、得られるものは、

【0453】

【数155】

10

$$\left\| \hat{x}_{[0]}^{(i)} - x_*^{(i)} \right\|_2 \leq C_0 \left\| x^{(i-1)} - x_k^{(i-1)} \right\|_1 / \sqrt{k} + C_0 \left\| x^{(i)} - x_k^{(i)} \right\|_1 / \sqrt{k} + C_1 \tilde{\sigma} + \left\| \left[ x_{n-\tau}^{(i)} \cdots x_{n-1}^{(i)} \right] \right\|_2$$

【0454】

である。

【0455】

[00163] 上でなされた提示の有効性は、次のように証明される。

【0456】

【数156】

20

$$e^{(i)} := \left[ x_{\tau}^{(i-1)} \square x_{n-1}^{(i-1)} 0^T \right]^T - \left[ x_{*0}^{(i)} \square x_{*n-1}^{(i)} \right]^T$$

【0457】

【数157】

$$e^{(i)} := x_*^{(i)} - x^{(i)}$$

30

【0458】

【数158】

$$e^{(i+1)} = \left[ x_{\tau}^{(i)} \square x_{n-1}^{(i)} 0^T \right]^T - x^{(i)} + x^{(i)} - \left[ x_{*0}^{(i)} \square x_{*n-1}^{(i)} \right]^T$$

【0459】

[00164] ノルムを取り出し三角不等式を使用することが、

【0460】

【数159】

40

$$\left\| e^{(i+1)} \right\|_2 \leq \left\| e^{(i-1)} \right\|_2 + \left\| e^{(i)} \right\|_2 + \left\| \left[ x_{n-\tau}^{(i)} \cdots x_{n-1}^{(i)} \right] \right\|_2$$

【0461】

をもたらす。

【0462】

[00165] Lasso の誤差を与える定理への観点を用いると、得られるものは、

【0463】

【数 1 6 0】

$$\|e^{(i+1)}\|_2 \leq C_0 \|x^{(i-1)} - x_k^{(i-1)}\|_1 / \sqrt{k} + C_0 \|x^{(i)} - x_k^{(i)}\|_1 / \sqrt{k} + C_1 \tilde{\sigma} + \|[x_{n-r}^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}]\|_2 \quad (18)$$

【0 4 6 4】

である。

【0 4 6 5】

[00166] 各反復の正確な計算量はアルゴリズムに依存する。最小限、LASSOのための反復ソルバーは、サンプリング行列と、 $O(mn)$ 回の演算を必要とする反復における推定値との乗算を必要とする。FISTAにおけるように、費用関数がほぼ線形（たとえば、 $1/t^2$ ）に減衰するアルゴリズムでは、

【0 4 6 6】

【数 1 6 1】

$$G(\hat{x}) - G(x_*) \leq \varepsilon$$

【0 4 6 7】

のような

【0 4 6 8】

【数 1 6 2】

$$\hat{x}$$

【0 4 6 9】

を得るために必要とされる反復の数は、 $x_*$ を最適解として

【0 4 7 0】

【数 1 6 3】

$$\frac{\|x_{[0]} - x_*\|_2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

【0 4 7 1】

に比例し、ここで、 $x_{[0]}$ はアルゴリズムの開始点である。この境界から、反復の平均の数が、アルゴリズムの開始点の最適点からのユークリッド距離に比例することが理解される。

【0 4 7 2】

[00167] すべての  $i$  について、 $C > 0$  を定数とし、 $|x^{(i)}|_0 \leq k$  および

【0 4 7 3】

【数 1 6 4】

$$\max_{j=0, \dots, n-1} |x_j^{(i)}| \leq C$$

【0 4 7 4】

として、シーケンス  $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$  に対して費用関数がほぼ線形に減衰するアルゴリズムの収束のために予期される反復の数は、雑音のない測定値に対して

10

20

30

40

50

【 0 4 7 5 】  
【 数 1 6 5 】

$$O(\sqrt{\tau})$$

【 0 4 7 6 】  
であり、 i . i . d . の測定雑音に対して  
【 0 4 7 7 】  
【 数 1 6 6 】

10

$$O(\sqrt{\tau}) + O(\sqrt{m})$$

【 0 4 7 8 】  
である。

【 0 4 7 9 】  
[00168]上の記述は真である。というのも、  $x^{(i)}$  が k - スペースなので、項  
【 0 4 8 0 】  
【 数 1 6 7 】

20

$$\left\| x^{(i-1)} - x_k^{(i-1)} \right\|$$

【 0 4 8 1 】  
および  
【 0 4 8 2 】  
【 数 1 6 8 】

30

$$\left\| x^{(i)} - x_k^{(i)} \right\|_1$$

【 0 4 8 3 】  
は、式 1 8 に従って消える。  
【 0 4 8 4 】  
[00169] |  $x_i$  | C により、  
【 0 4 8 5 】  
【 数 1 6 9 】

40

$$\left\| [x_{n-\tau}^{(i)} \dots x_{n-1}^{(i)}] \right\|_2 \leq C\sqrt{\tau}$$

【 0 4 8 6 】  
が得られる。  
【 0 4 8 7 】  
[00170] 雜音のある測定値に関して、項  
【 0 4 8 8 】

【数170】

$$C_l \tilde{\sigma}$$

【0489】

は雑音レベルに関係する。雑音が分布  $N(0, \sigma^2 I)$  を有するので、高い確率で、

【0490】

【数171】

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( m + \lambda \sqrt{2m} \right)$$

10

【0491】

したがって、LASSOにおける誤差と関係する定理による前もっての条件によって、

【0492】

【数172】

$$\tilde{\sigma} O(\sqrt{m})$$

20

【0493】

となる。式(18)におけるこの結果を使用すると、予期される反復の数が、雑音のあるケースにおいて

【0494】

【数173】

$$O(\sqrt{\tau}) + O(\sqrt{m})$$

【0495】

であることが見つけられる。

30

【0496】

[00171]上記の分析において、平均複雑度は、再帰的なサンプリングに対して  $O(m)$  であり、最適化アルゴリズムに対して  $O(mn)$  である（最小限で）。入力ストリームの各成分を復元するとともに要素を除外しないために  $n$  であり、したがって、反復的な最適化の複雑度が平均複雑度を支配することが理解される。

【0497】

[00172]条件

【0498】

【数174】

$$\delta_{2k} \leq \sqrt{2} - 1$$

40

【0499】

を満たすために、単位球面からサンプリングされたランダムなベクトル、ランダムなガウス行列およびランダムなベルヌーイ行列に対して条件  $m \geq k \log(n/k)$  を使用することによる。以下の表1は、 $k$  における様々なスパース性の種類に関する平均計算量を示す。

【0500】

【表 1】

k	計算量
O(1)	$O(n \log n)$
O(logn)	$O(n \log n \cdot \log(n/\log n))$
$O(\sqrt{n})$	$O(n^{3/2} \log n)$
O(n)	$O(n^2)$

10

【0 5 0 1】

実験の結果

[00173] シミュレーションで使用されるデータは、ランダムモデル

【0 5 0 2】

【数 1 7 5】

$$f_x(x) = \begin{cases} x \in [-1,1] の場合、 (1-p)\delta(x) + \frac{1}{2p} & \\ 0 & \end{cases} \quad (19)$$

20

【0 5 0 3】

から生成され、別段に述べられない限り  $p = 0.05$  である。

【0 5 0 4】

[00174] 測定モデルは、

【0 5 0 5】

【数 1 7 6】

 $w^{(i)} \sim N(0, \sigma^2 I)$  として、

30

【0 5 0 6】

【数 1 7 7】

$y^{(i)} = A^{(i)}x^{(i)} + w^{(i)}$

【0 5 0 7】

【数 1 7 8】

ただし、 $\sigma > 0$ 

40

【0 5 0 8】

、サンプリング行列は、

【0 5 0 9】

【数 1 7 9】

$A^{(0)} \in R^{m \times n}$

【0 5 1 0】

であり、ただし、 $m$  は 1 つのウィンドウの中の非ゼロのエントリの予期される数の 6 倍、

50

すなわち、 $m = 6 p n$ であり、ここで、 $n$ はウィンドウの長さに等しい。

【0511】

[00175] LASSOを解くためにFISTA、加速された近接勾配法を使用しながら、所与のウィンドウを推定するために必要とされる平均時間と比較することによって、RCSによって達成される速度の向上がどのようなものなのかが、実験的に示されている。RCSはいわゆる「単純な手法」に対して比較され、ここで、サンプリングは各ウィンドウにおける行列乗算によって行われ、FISTAはすべてゼロのベクトルから開始される。各ケースにおいて1つのウィンドウを復元するために必要とされる平均時間が、図2に示される。図2で観測され得るように、RCSに関する平均処理時間は、他の方法によって必要とされる処理時間よりも短い。

10

【0512】

[00176] LASSOを使用する台推定における実験の結果が、本明細書とともに説明される。測定において、 $x \in R^{m \times 6000}$ 、 $x_0 = 60$ 、 $A \in R^{m \times 6000}$ が、 $A_{i,j} \sim N(0, 1/m)$ を伴うガウス分布によって生成され、 $w$ は $= 0.1$ を有する。LASSO定理において示唆されるように、これらのパラメータに対して、LASSOは、

【0513】

【数180】

$$\lambda = 4\sigma\sqrt{2\log n}$$

20

【0514】

を用いて解かれ、 $x$ の非ゼロの振幅は $U([-3.34, -4 : 3.4] \cup [3.34, 4.34])$ からサンプリングすることによって

【0515】

【数181】

$$\min_{i=1,2,\dots,n} |x_i| \geq 3.34$$

30

【0516】

を満たす。

【0517】

[00177] シミュレーションでは、取得されるサンプルの数は信号と異なり、 $m$ 、および台推定の精度が、 $= |$ 検出された台 真の台対 $| / |$ 真の台 $|$ に等しい検出率と、 $= |$ 検出された台\真の台 $| / |$ 真の台 $|$ であるフォールスポジティブの比率とを使用することによって検討され、ここで、 $| . |$ は集合の濃度を表し、\は集合差分作用素である。この定義を用いると、フォールスポジティブの比率が1よりも大きくなり得ることに留意されたい。

【0518】

[00178] 台検出のための2つの方法が比較される。第1の方法は、LASSOを解き非ゼロの位置を台として採用することによるものであり、第2の方法は、推定値の絶対値がしきい値よりも大きい位置を採用することによるものである。図3は、 $m$ の各値に対して入力信号をランダムに20回生成し、得られた検出率とフォールスポジティブとを平均することによって取得された、2つの方法に関して得られた曲線を示す。図から見られ得るように、検出率は両方の方法において同様に挙動するが、フォールスポジティブは、得られたLASSO推定値へのしきい値を適切に調整することによって、著しく低減され得る。

40

【0519】

[00179] 図3に詳細に示されるものは、 $n = 6000$ 、 $\sigma = 0.1$ 、 $\min |x_i| = 3$

50

.34、しきい値  $\gamma_1 = 0.01, 0.10$ 、および  $1.00$ について、LASSOを使用する台集合推定である。円形のマーカーは検出率を表し、正方形のマーカーはフォールスポジティブの比率を表す。

#### 【0520】

[00180]上記で詳細に説明したように、LASSO法は、バイアスのない推定量をもたらすために、投票の方策および最小2乗推定と一緒に使用され得る。図4は、a) 単一のLASSO推定値、b) 平均された推定値、c) 投票の方策、およびd) バイアス除去および平均化の性能の比較を示す。

#### 【0521】

[00181]図は、固定の  $\times R^n$  を使用し、無相関の雑音を有する測定値を取り出すことによって得られる。誤差が、平均された推定値に対してゼロへ減少しないことが見られ得、それは、本明細書において前に説明したように、LASSOがバイアスのある推定量であることに起因する。詳細には、図4は、a) 平均された推定値、b) バイアス除去および平均された推定値、c) 投票および平均化によって取得された推定値に関する、誤差プロットの描写である。

#### 【0522】

[00182]次に図5を参照すると、図は、ストリーミングデータ上の平均されたLASSO推定値ならびに「投票および平均化」に関する誤差プロットを示す。

#### 【0523】

[00183]図5は、ストリーミングデータ上で、平均されたLASSO推定値を用いて取得されたウィンドウ再構成誤差と、「投票および平均化」アルゴリズムを用いて取得されたウィンドウ再構成誤差との比較を示す。データはランダムに生成され、ここで、エントリは  $p = 0.05$  を有する台として選択され、その振幅は、台検出定理の条件を満たすために一様分布

#### 【0524】

#### 【数182】

$$U([-1.3847, -2.3847] \cup [1.3847, 2.3847])$$

10

20

30

#### 【0525】

から独立同分布で引き出され、 $n = 400$ 、 $m = 5$  且  $p = 100$  であり、サンプリング行列はガウス型である。測定は、

#### 【0526】

#### 【数183】

$$w^{(i)} \sim N(0, \sigma^2 I_m)$$

#### 【0527】

を用いて劣化させられ、ここで、 $\gamma_1 = 0.05$  であり、投票アルゴリズムは  $\gamma_1 = 0.5$  および  $\gamma_2 = 20$  を使用する。見られ得るように、投票は、LSEにおいてエントリを使用するために集められるべき  $\gamma_2$  回の投票を待つことに起因する跳躍を示す再構成誤差を与える。しかしながら、位置が台の一部として認められた後、LASSO推定値を単に平均するよりも小さい値へ誤差が直ちに下落することも見られ得る。

#### 【0528】

[00184]したがって、一実施形態に従って提案されるものは、ストリーミングデータ上の圧縮センシングに適切な、再帰的なサンプリングおよび反復的な復元のための効率のよい方法である。方法は、雑音の存在下で推定分散の低減を達成しながら、信号の推定値に対するより速い収束速度を達成する際に、連続する処理ウィンドウ間の信号のオーバーラップを活用する。

40

50

## 【0529】

[00185]さらに、別の実施形態によれば、信号のバイアスのない推定量をLASSOに基づいて近似するための2段階推定手順が提案され、その場合、a)台検出はLASSOを解くことによって実行され、また、b)信号推定は推定される台集合で通常の最小2乗を解くことによって達成される。mを取得されるサンプルの数、nをウィンドウの長さとして、アルゴリズムの計算量はO(mn)である。収束時間は、ストリーミングデータ上のオンライン実装にとって適切であることが、実験によって示されている。

## 【0530】

[00186]したがって、要約すれば、実施形態は、ストリーミングデータの圧縮センシングのための方法を含み、方法は、ストリーミングデータ上で圧縮センシングを実行するための再帰的な方式を実行することを伴い、同様に、方法の計算量と推定誤差とを分析することができる。一実施形態によれば、次の測定値を取得する際に以前の測定値を利用しながら、データの入力ストリームが、オーバーラップするウィンドウ処理を解して再帰的にサンプリングされる。オーバーラップしたウィンドウ構造を活用すると、反復的な最適化アルゴリズムにおけるより速い収束を達成して新しいウィンドウを復号するために、以前のウィンドウからの信号推定値が利用される。推定精度は、複数のウィンドウから取得される信号推定値を平均することによって高められる。推定量のバイアスを除去するために、台集合検出と信号振幅推定とを備える一実施形態に従って、2段階推定手順が提案される。さらに、一実施形態は、大きい測定雑音の存在下でロバストな台推定を得るために投票方式を含む。

10

20

## 【0531】

[00187]ストリーミングデータの圧縮センシングの一実施形態による手段を使用しながら取得されるシミュレーション結果は、信号の大きさおよび雑音レベルにおける軽い条件のもとで、著しく小さい再構成誤差を得ながら、従来の圧縮センシングをデータのストリームに適用することに対して10倍の高速化を示す。

## 【0532】

[00188]別の実施形態によれば、ストリーミングデータを感知するための手段が、同様に提案される。ストリーミングデータを感知するための前記手段は、データの入力ストリームを再帰的にサンプリングするための手段と、後続の測定値を取得するために以前の測定値を使用するための手段とを備える。データの入力ストリームを再帰的にサンプリングするための手段は、少なくとも以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理のステップを使用することができる。

30

## 【0533】

[00189]一実施形態は、超広帯域信号を用いた測距を含む。たとえば、デバイスは、規則正しく送信されるスパイクへのリターンパルスを継続的に監視し得る(放射される信号が周期的である)。一般に、デバイスは、主エコーを、付加された複数のエコーを加えて受信する。デバイスが移動している場合、主エコーは、複数のエコーがするように、ある期間から別の期間へほんのわずかに変化する。これは周期的な信号でなく、まさにほぼ周期的な信号であり、スライディングウィンドウアルゴリズムは、これらのシフトしているエコーを当然のことながら追跡する。そのような実施形態では、音響センサからのエコードは、それによって距離データへと変換される。

40

## 【0534】

[00190]別の例では、生物医学的サンプルデータが、上述された方法およびシステムに従って変換され得る。たとえば、電気信号を人体から受信するように構成される1つまたは複数の電気センサからのサンプルは、心電図信号または脳波信号を再構成するために、本明細書での実施形態の開示に従って処理され得る。いくつかの実施形態では、再構成された信号は、1つまたは複数の診断条件に特徴的な兆候に一致することがある。

## 【0535】

[00191]別の例では、カメラ、光電、または他の画素アレイセンサ(たとえば、可視光または赤外光を受信するように構成される)からのサンプルデータが、本明細書で説明さ

50

れるように処理され得る。たとえば、そのような技法を使用して、装置はまた、電力効率を改善することができ、またはセンサの感度を効果的に高めることができる。

#### 【 0 5 3 6 】

[00192]他の実施形態では、温度、風速、風向き、降水量などの環境センサのデータが、本明細書で説明されるように処理され得る。

#### 【 0 5 3 7 】

[00193]本発明の手段は、ソフトウェア手段、ハードウェア手段、またはそれらの組合せとして実装され得る。

#### 【 0 5 3 8 】

[00194]上述されたシステムおよび方法は、たとえば、そのようなモデムを組み込むワイヤレスモデムまたはワイヤレスデバイスで実施され得る。 10

#### 【 0 5 3 9 】

[00195]実施形態によっては、本明細書で説明された方法のうちいずれかの、いくつかの動作またはイベントは、異なる順序で実施されてよく、追加され、統合され、または完全に除外されてよい（たとえば、すべての説明した動作またはイベントが、本方法の実施のために必要であるとは限らない）ことを認識されたい。その上、いくつかの実施形態では、動作またはイベントは、連続してではなくむしろ、同時に、たとえば、マルチスレッド処理、割込み処理、または複数のプロセッサを通して実施され得る。

#### 【 0 5 4 0 】

[00196]本明細書で開示する方法、システムおよび装置と関連して説明する様々な例示的論理ブロック、モジュール、回路、およびアルゴリズムのステップは、電子ハードウェア、プロセッサによって実行されるコンピュータソフトウェア、または両方の組合せとして実装され得ることを、当業者は認識するであろう。ハードウェアとソフトウェアのこの互換性を明確に示すために、様々な例示的な構成要素、ブロック、モジュール、回路、およびステップは、全体的にそれらの機能性の点から上記に説明された。そのような機能性がハードウェアまたはソフトウェアとして実施されるかどうかは、特定の適用例および全体的なシステムに課せられた設計制約に依存する。当業者は、特定の適用例ごとに様々な方法で記載された機能を実装し得るが、そのような実装の決定が、本発明の範囲からの逸脱を引き起こすと解釈されるべきではない。 20

#### 【 0 5 4 1 】

[00197]その上、本明細書で開示する実施形態は、汎用プロセッサ、デジタル信号プロセッサ（D S P）、特定用途向け集積回路（A S I C）、フィールドプログラマブルゲートアレイ（F P G A）もしくは他のプログラマブル論理デバイス、個別ゲートもしくはトランジスタロジック、個別ハードウェアコンポーネントなどの電子デバイスもしくは回路、または本明細書で説明した機能を実行するように設計されたそれらの任意の組合せを用いて実装または実施され得る。汎用プロセッサはマイクロプロセッサであり得るが、代替として、プロセッサは任意の従来のプロセッサ、コントローラ、マイクロコントローラ、またはストートマシンであり得る。プロセッサはまた、コンピューティングデバイスの組合せ、たとえば、D S Pとマイクロプロセッサの組合せ、複数のマイクロプロセッサ、D S Pコアと連携する1つまたは複数のマイクロプロセッサ、または任意の他のそのような構成として実施され得る。 40

#### 【 0 5 4 2 】

[00198]本明細書で開示する実施形態に関連して説明する方法またはアルゴリズムのステップは、ハードウェアで直接的に、プロセッサによって実行されるソフトウェアモジュールで、またはそれら2つの組合せで実施され得る。ソフトウェアモジュールは、R A Mメモリ、フラッシュメモリ、R O Mメモリ、E P R O Mメモリ、E E P R O M（登録商標）メモリ、レジスタ、ハードディスク、リムーバブルディスク、C D - R O M、または当技術分野で知られている任意の他の形態の記憶媒体に常駐し得る。例示的な記憶媒体は、プロセッサが記憶媒体から情報を読み取り、記憶媒体に情報を書き込むことができるようプロセッサに結合される。代替として、記憶媒体はプロセッサと一体であり得る。プロ 50

セッサおよび記憶媒体は、A S I C の中に存在してよい。A S I C はユーザ端末の中に存在してよい。代替として、プロセッサおよび記憶媒体は、ユーザ端末の中で個別コンポーネントとして存在してよい。

**【 0 5 4 3 】**

[00199] 詳細には、本発明の一実施形態によれば、ストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置は、データの入力ストリームを、入力データストリームに関する少なくとも 1 つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングするために構成された再帰的なサンプラーと、後続の測定値を取得するために、少なくとも 1 つの以前の測定値を使用するユニットとを備える。

**【 0 5 4 4 】**

[00200] 本発明の一実施形態に従って提案される装置は、感知することを実行するための再帰的な方式に基づく再帰的なサンプラーを備える。本発明のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置はまた、再帰的な推定を介した再帰的なサンプリングのステップの間にサンプリングされたデータとしての、ストリームを彼女が入力することを処理するための処理ユニットを備える。

**【 0 5 4 5 】**

[00201] 本発明によれば、ストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置はまた、以前の推定値取得ステップの間に取得された以前の推定値のデータストリームに関する入力情報を受け渡すための記憶手段を備える。さらに、本発明のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置は、データストリームの台検出ステップの間に取得される情報に基づいて、回数推定を実行するために構成されたカウンタを備える。さらに、本発明の装置はまた、前記再帰的な推定ステップの間に取得されるデータに基づいて、データストリームの台の集合に対して最小 2 乗推定 ( L S E ) 値を算出するための計算器を備えてよい。平均された値を取得するために平均された値を算出するために、算出された最小 2 乗推定値と、回数推定値と、以前の推定値とを平均するための処理ユニットは、本発明の一実施形態に従って提案される装置によって同様に備えられる。ストリーミングデータを感知するための方法の誤差の程度を推定するための推定器が、本発明に従って提案される装置によって備えられることが同様に想定される。加えて、複数のウィンドウから取得される信号推定値を平均するための処理ユニットは、本発明によって提案される装置によって同様に備えられてよい。

**【 0 5 4 6 】**

[00202] 様々な例が、記載された。これらおよび他の例は、以下の特許請求の範囲内である。

以下に、本願出願の当初の特許請求の範囲に記載された発明を付記する。

**[ C 1 ]**

ストリーミングデータの圧縮センシングを実行する方法であって、  
データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも 1 つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングすることと、  
後続の測定値を取得するために、前記少なくとも 1 つの以前の測定値を使用することとを備える方法。

**[ C 2 ]**

ストリーミングデータを感知するための前記方法は、前記サンプリングを実行するために再帰的な方式を使用する、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

**[ C 3 ]**

後続の測定値を取得するために前記少なくとも 1 つの以前の測定値を使用する前記ステップは、再帰的な推定を介した再帰的なサンプリングの前記ステップの間にサンプリングされたデータとしての、前記入力ストリームを処理することを備える、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

10

20

30

40

50

## [ C 4 ]

前記データストリームに関する情報を受信することをさらに備え、ここにおいて、前記情報は、以前の推定値取得ステップの間に取得された以前の推定値に関係し、前記以前の推定値取得ステップは、前記再帰的なサンプリングステップの前に実行される、

C 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 5 ]

データストリームの台を検出することと、

前記データストリームの台検出ステップの間に取得される情報に基づいて、回数推定を実行することとをさらに備える、

C 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

10

## [ C 6 ]

前記再帰的な推定ステップの間に取得されるデータに基づいて、データストリームの台の集合に対して最小2乗推定(LSE)値を算出することをさらに備える、C 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 7 ]

平均された値を算出するために、前記算出された最小2乗推定値と、前記回数推定値と、前記以前の推定値とを平均することをさらに備える、C 6 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 8 ]

前記ストリーミングデータに対する新しい推定値を取得するために、前記平均された値を使用することをさらに備える、C 7 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

20

## [ C 9 ]

ストリーミングデータの前記圧縮センシングの計算量を分析することをさらに備える、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 10 ]

ストリーミングデータを感知するための前記方法の誤差の程度を推定することをさらに備える、C 9 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

30

## [ C 11 ]

新しいウィンドウを復号するために、反復的な最適化アルゴリズムにおいて収束を達成することをさらに備える、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 12 ]

前記達成するステップは、オーバーラップするウィンドウ処理の前記ステップによって使用されるオーバーラップするウィンドウ構造と、前記以前のウィンドウに関する信号推定値とを活用することを備える、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 13 ]

複数のウィンドウから取得される信号推定値を平均することをさらに備える、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

40

## [ C 14 ]

台集合検出を実行することと、

信号振幅推定とをさらに備える、

C 1 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 15 ]

大きい測定雑音の存在下で、ロバストな台推定のために投票方式を適用することをさらに備える、C 1 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための方法。

## [ C 16 ]

ストリーミングデータの圧縮センシングを実行するためのシステムであって、複数のモジュールを含み、各モジュールは、

50

データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングし、

後続の測定値を取得するために、前記少なくとも1つの以前の測定値を使用するための、

コンピュータ実行可能な命令をその上に有するコンピュータ可読媒体を備える、システム。

[C 17]

ストリーミングデータを感知するための、その上に記録されたコンピュータプログラムを有する非一時的コンピュータ可読記憶媒体であって、

10

前記コンピュータプログラムは、

データの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングし、

後続の測定値を取得するために、前記少なくとも1つの以前の測定値を使用することが可能なアルゴリズムを備える、

非一時的コンピュータ可読記憶媒体。

[C 18]

ストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置であって、

20

センサデータの入力ストリームからのデータを記憶するように構成されたメモリと、

プロセッサとを備え、前記プロセッサは、

センサデータの入力ストリームを、前記入力データストリームに関する少なくとも1つの以前の測定値を取得するために、オーバーラップするウィンドウ処理を使用して再帰的にサンプリングし、

後続の測定値を取得するために、前記少なくとも1つの以前の測定値を使用するよう構成される、

装置。

[C 19]

前記プロセッサは、前記感知することを実行するために、再帰的な方式に基づいて再帰的なサンプリングするように構成される、C 18に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置。

30

[C 20]

前記プロセッサは、再帰的な推定を介した再帰的なサンプリングの前記ステップの間にサンプリングされたデータの前記入力ストリームを処理するようにさらに構成される、C 18に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置。

[C 21]

以前の推定値取得ステップの間に取得された以前の推定値に関する前記データストリームに関する入力情報を受け渡すための記憶装置をさらに備える、C 20に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置。

40

[C 22]

前記プロセッサは、データストリームの台検出ステップの間に取得される情報に基づいて、回数推定を実行するようにさらに構成される、C 20に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置。

[C 23]

前記プロセッサは、前記再帰的な推定ステップの間に取得されるデータに基づいて、データストリームの台の集合に対して最小2乗推定(LSE)値を実行するようにさらに構成される、C 20に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための装置。

[C 24]

前記プロセッサは、平均された値を取得するために平均された値を算出するために、前

50

記算出された最小 2 乗推定値と、前記回数推定値と、前記以前の推定値とを平均するよう  
にさらに構成される、C 2 3 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行する  
ための装置。

[ C 2 5 ]

前記プロセッサは、ストリーミングデータを感知するための前記方法の誤差の程度を平  
均するようにさらに構成される、C 2 4 に記載のストリーミングデータの圧縮センシング  
を実行するための装置。

[ C 2 6 ]

前記プロセッサは、複数のウィンドウから取得される信号推定値を平均するようにさ  
らに構成される、C 1 8 に記載のストリーミングデータの圧縮センシングを実行するための  
装置。

10

[ C 2 7 ]

センサデータの前記ストリームを測定するように構成された 1 つまたは複数のセンサを  
さらに備える、C 1 8 に記載の装置。

【図 1】

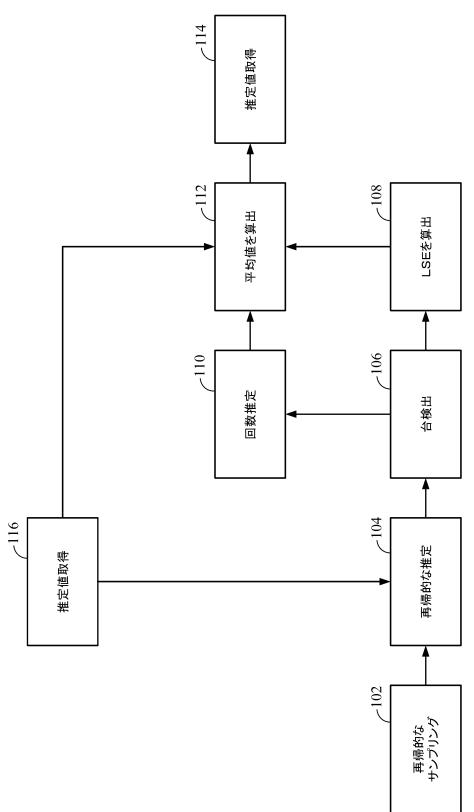


FIG. 1

【図 2】

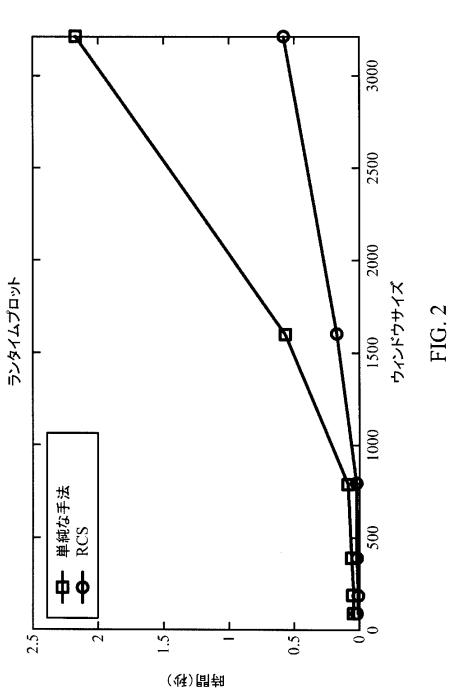
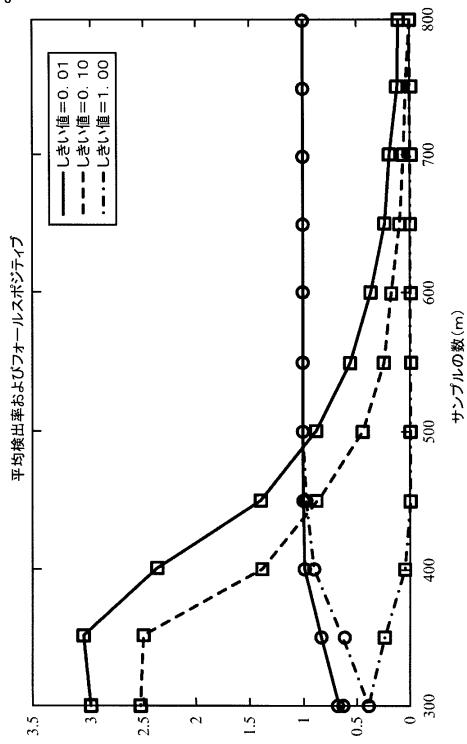


FIG. 2

【図3】

図3



【図4】

図4

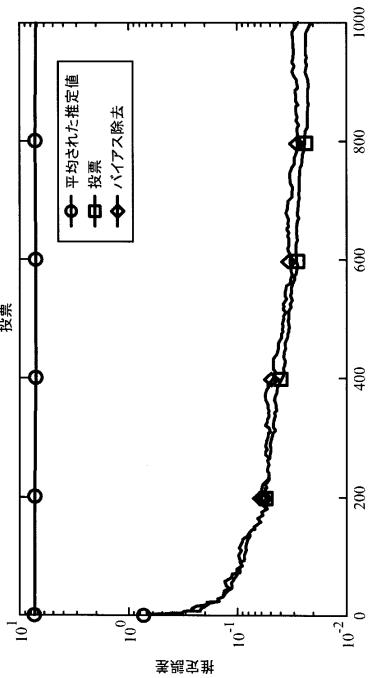


FIG. 4

【図5】

図5

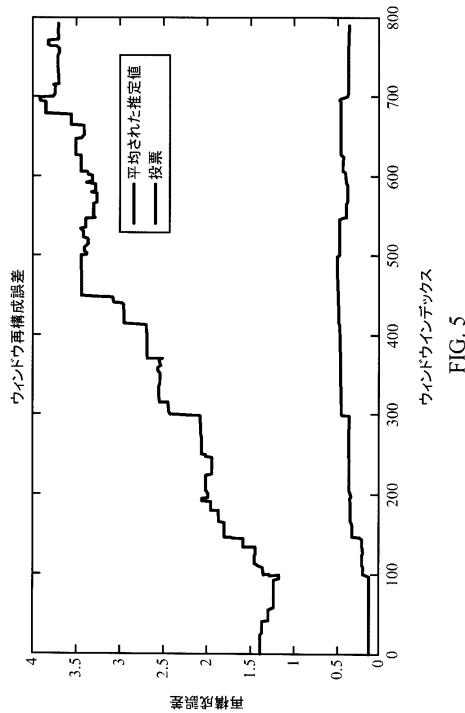


FIG. 3

FIG. 5

---

フロントページの続き

(72)発明者 フレリス、ニコラオス

スイス国、シーエイチ - 1015 ローザンヌ、ビーシー 322 (パティモン・ビーシー)

(72)発明者 オカル、オルハン

スイス国、シーエイチ - 1015 ローザンヌ、ビーシー 322 (パティモン・ビーシー)

(72)発明者 ベッテルリ、マーティン

スイス国、シーエイチ - 1015 ローザンヌ、ビーシー 322 (パティモン・ビーシー)

審査官 北村 智彦

(56)参考文献 特開2011-137817 (JP, A)

特開2011-097570 (JP, A)

Nikolaos M. Freris, Orhan Ocal, Martin Vetterli, Compressed sensing of streaming data  
, 2013 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing(Allerton), 2013年10月, pp.1242-1249

(58)調査した分野(Int.Cl., DB名)

H03M 3/00 - 9/00

IEEE Xplore