(19)中华人民共和国国家知识产权局

(12)发明专利

(10)授权公告号 CN 105279307 B
(45)授权公告日 2020.08.18

(21)申请号 201510412040.1

(22)申请日 2015.07.14

(65)同一申请的已公布的文献号
申请公布号 CN 105279307 A

(43)申请公布日 2016.01.27

(30)优先权数据
14/331,442 2014.07.15 US

(73)专利权人 达索系统西姆利亚公司
地址 美国罗德岛州

(72)发明人 M·贝伊 V·贝尔斯基
V·G·翁西亚

(74)专利代理机构 永新专利商标代理有限公司 72002
代理人 刘瑜 王英

(51)Int.Cl.
G06F 30/20(2020.01)

(56)对比文件
CN 101464205 A,2009.06.24

审查员 刘洛

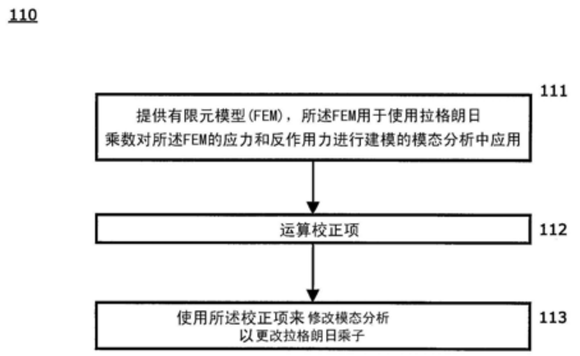
权利要求书2页 说明书8页 附图3页

(54)发明名称

在模态动态分析中重新获得拉格朗日乘子的系统和方法

(57)摘要

用于包括拉格朗日乘子的有限元模型(FEM)的模态动态分析可能产生不准确的应力或反作用力。因此,本发明的实施例提供了用于执行对这些错误进行校正的模态分析的方法和系统。一个这样的实施例开始于提供FEM,所述FEM在使用拉格朗日乘子来对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用。接下来,运算校正项。然后,所述方法结束于使用所述校正项来修改(并由此改进)所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。



CN 105279307 B

1.一种执行模态分析的方法,所述方法包括:

提供有限元模型FEM,所述FEM在用于对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用,所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为表示所述FEM的运动并且包括施加于所述FEM的约束的方程组,所述约束是使用拉格朗日乘子来表示的;

运算校正项,所述校正项包括对所述FEM的结构响应进行建模的所述方程组的拉格朗日乘子的经校正的值,所述运算包括使对所述FEM的结构响应进行建模的所述方程组的残差的范数最小化;以及

使用所述校正项来修改所述模态分析以对所述拉格朗日乘子的值进行校正。

2.根据权利要求1所述的方法,其中,运算所述校正项包括:

通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解表示所述FEM的运动的所述方程组。

3.根据权利要求2所述的方法,其中,在所述模态分析中,对所述线性代数方程组的稀疏矩阵进行一次因子分解。

4.根据权利要求1所述的方法,其中,使用所述校正项来修改所述模态分析以对所述拉格朗日乘子的值进行校正包括:

修改与所述拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度。

5.根据权利要求1所述的方法,其中,所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为表示所述FEM的运动的所述方程组的振型的叠加。

6.根据权利要求5所述的方法,其中,在频率提取分析中获取所述振型,所述频率提取分析是所述模态分析的组成部分。

7.根据权利要求1所述的方法,其中,针对所述模态分析的所有频率点来对所述拉格朗日乘子进行校正。

8.一种用于执行模态分析的系统,所述系统包括:

仿真模块,其被配置为提供有限元模型FEM,所述FEM在用于对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用,所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为表示所述FEM的运动并且包括施加于所述FEM的约束的方程组,所述约束是使用拉格朗日乘子来表示的;以及

校正模块,其能够操作地耦合到所述仿真模块并且被配置为:

运算校正项,所述校正项包括对所述FEM的结构响应进行建模的所述方程组的拉格朗日乘子的经校正的值,所述运算包括使对所述FEM的结构响应进行建模的所述方程组的残差的范数最小化;并且

使用所述校正项来修改所述模态分析以对所述拉格朗日乘子的值进行校正。

9.根据权利要求8所述的系统,其中,所述校正模块被配置为运算所述校正项,运算所述校正项包括通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解表示所述FEM的运动的所述方程组。

10.根据权利要求9所述的系统,其中,所述校正模块被配置为在所述模态分析中对所述线性代数方程组的稀疏矩阵进行一次因子分解。

11.根据权利要求8所述的系统,其中,所述校正模块被配置为通过修改与所述拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度来使用所述校正项修改所述模态分析以对所述拉格朗日乘子的值进行校正。

12.根据权利要求8所述的系统，其中，所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为表示所述FEM的运动的所述方程组的振型的叠加。

13.根据权利要求12所述的系统，其中，所述仿真模块被配置为在频率提取分析中获取所述振型，所述频率提取分析是所述模态分析的组成部分。

14.根据权利要求8所述的系统，其中，所述校正模块被配置为针对所述模态分析的所有频率点来对所述拉格朗日乘子进行校正。

15.一种包括程序指令的计算机可读介质，所述程序指令当由处理器执行时，使得：

提供有限元模型FEM，所述FEM在用于对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用，所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为表示所述FEM的运动并且包括施加于所述FEM的约束的方程组，所述约束是使用拉格朗日乘子来表示的；

运算校正项，所述校正项包括对所述FEM的结构响应进行建模的所述方程组的拉格朗日乘子的经校正的值，所述运算包括使对所述FEM的结构响应进行建模的所述方程组的残差的范数最小化；以及

使用所述校正项来修改所述模态分析以对所述拉格朗日乘子的值进行校正。

16.根据权利要求15所述的计算机可读介质，其中，运算所述校正项包括：

通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解表示所述FEM的运动的所述方程组。

17.根据权利要求16所述的计算机可读介质，其中，所述程序指令当由处理器执行时，使得在所述模态分析中，对所述线性代数方程组的稀疏矩阵进行一次因子分解。

18.根据权利要求15所述的计算机可读介质，其中，使用所述校正项来修改所述模态分析以对所述拉格朗日乘子的值进行校正包括：

修改与所述拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度。

19.根据权利要求15所述的计算机可读介质，其中，所述程序指令当由处理器执行时，使得所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为表示所述FEM的运动的所述方程组的振型的叠加。

20.根据权利要求19所述的计算机可读介质，其中，所述程序指令当由处理器执行时，使得在频率提取分析中获取所述振型，所述频率提取分析是所述模态分析的组成部分。

在模态动态分析中重新获得拉格朗日乘子的系统和方法

背景技术

[0001] 本发明概括而言涉及计算机程序和系统领域，并且具体涉及计算机辅助设计(CAD)、计算机辅助工程(CAE)、建模和仿真领域。

[0002] 市场上供应有大量的用于零件的设计或零件的组装件的系统和程序。这些通常所说的CAD系统允许用户构造或操纵对象或对象的组装件的复杂三维模型。由此CAD系统使用边或线，某些情况下使用面来提供对建模对象的表示。可以采用多种方式(例如，非均匀有理B样条(NURBS))来表示线、边、面、或多边形。

[0003] 这些CAD系统管理主要是几何图形的规范的建模对象的零件或零件的组装件。特别地，CAD文件包含根据其生成几何图形的规范。根据几何图形，生成表示。可以将规范、几何图形、以及表示存储在单个CAD文件或多个CAD文件中。CAD系统包括用来向设计者呈现建模对象的图形化工具；这些工具专用于对复杂对象进行显示。例如，组装件可能包含几千个零件。可以使用CAD系统来管理存储于电子文件中的对象模型。

[0004] CAD和CAE系统的出现允许对象的广泛表示的可能性。一种这样的表示就是有限元分析(FEA)模型。在本文中，术语FEA模型、有限元模型(FEM)、有限元网格、以及网格可以互换使用。FEM通常表示CAD模型，并且由此可以表示一个或多个零件或整个组装件。FEM是一组称作节点的点，这些节点互连而形成被称为网格的栅格。可以以使FEM具有底层(underlying)对象或其所表示的对象的特性的这样的方式来对FEM进行编程。当以这样的方式对FEM进行编程时，可以使用FEM来执行对它所表示的对象进行仿真。例如，可以使用FEM来表示车辆的内部空腔、环绕结构的声学流体、以及任何数量的现实世界的对象，包括诸如支架等的医疗设备。当给定的FEM表示对象并且被相应地编程时，可以使用所述给定的FEM来对现实世界对象自身进行仿真。例如，可以使用表示支架的FEM来对现实医疗装置的支架的使用进行仿真。

发明内容

[0005] 本发明的实施例提供了用于执行模态分析的方法和装置。根据至少一个示例性实施例，执行模态分析的方法包括：提供有限元模型(FEM)，所述FEM在用于使用拉格朗日乘子对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用；运算校正项；并且使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。

[0006] 在所述方法的实施例中，运算校正项包括通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解所述FEM的运动方程组。根据这样的实施例，在模态分析中，所述线性代数方程组的稀疏矩阵可以只进行一次因子分解。在可替换的实施例中，使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子包括修改与所述拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度。

[0007] 根据另一个实施例，所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为振型的叠加。在这样的实施例中，在频率提取分析中获取所述振型，所述频率提取分析是所述模态分析的组成部分。在又一个实施例中，针对所述模态分析的所有频率点来对拉格朗日乘子进行校正。

[0008] 本发明的实施例针对用于执行模态分析的系统。在这样的实施例中，所述系统包括：被配置为提供FEM的仿真模块，所述FEM在用于使用拉格朗日乘子来对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用。在这样的实施例中，所述系统还包括校正模块，其可操作地耦合到所述仿真模块并且被配置为运算校正项以及使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。

[0009] 根据所述系统的一个实施例，所述校正模块可以被配置为通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解所述FEM的运动方程组以运算所述校正项。在这样的实施例中，所述校正模块可以被配置为在所述模态分析中对所述线性代数方程组的稀疏矩阵进行一次因子分解。在又另一实施例中，所述校正模块被配置为通过修改与所述拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度来使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。

[0010] 根据该系统的一个实施例，所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为振型的叠加。在这样的实施例中，所述仿真模块可以被配置为在频率提取分析中获取所述振型，所述频率提取分析是所述模态分析的组成部分。在所述系统的可替换的实施例中，所述校正模块被配置为针对所述模态分析的所有频率点来对拉格朗日乘子进行校正。

[0011] 本发明的又另一实施例针对一种用于执行模态分析的云计算实现。这样的实施例针对由通过网络与一个或多个客户端进行通信的服务器所执行的计算机程序产品。在这样的实施例中，所述计算机程序产品包括计算机可读介质，所述计算机可读介质包括程序指令，当所述程序指令由处理器执行时，使得：提供FEM，所述FEM在用于使用拉格朗日乘子来对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用；运算校正项；并且使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。

[0012] 在这样的云计算实施例中，运算所述校正项可以包括通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解所述FEM的运动方程组。进一步地，在另一个实施例中，所述计算机程序产品被配置为在模态分析中对所述线性代数方程组的稀疏矩阵进行一次因子分解。在所述计算机程序产品的进一步实施例中，使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子包括修改与所述拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度。根据计算机程序产品的实施例，所述模态分析将所述FEM的结构响应建模为振型的叠加。在这样的实施例中，可以在频率提取分析中获取所述振型，所述频率提取分析是所述模态分析的组成部分。

附图说明

[0013] 根据正如在附图中示出的以下对本发明示例性实施例的更特别的描述，上文内容将变得显而易见，在附图中，所有不同的视图中的类似附图标记指代相同的零件。附图不一定按照比例绘制，相反地，其重点在于举例示出本发明的实施例。

[0014] 图1是描绘了根据至少一个示例性实施例的执行模态分析的方法的流程图；

[0015] 图2是根据本发明的实施例的用于执行模态分析的系统的简化框图；

[0016] 图3是可以在其中实现本发明的实施例的计算机网络环境的简化框图。

具体实施方式

[0017] 以下是对本发明的示例性实施例的描述。

[0018] 模态分析是一种利用FEM的仿真技术。模态分析研究动态激励(例如，振动)下的机

械机构的动态特性或结构特征。可以使用诸如由Dassault Systèmes Simulia公司提供的Abaqus®等仿真软件来执行模态分析。此外，尽管可以以多种方式执行模态分析，但是一种执行模态分析的这样的方式是将FEM的结构响应运算为在频率提取分析中由振型求解器(eigensolver)所获取的振型(eigenmode)的叠加。本发明的一个或多个实施例通过改进模态结构响应中的拉格朗日乘子自由度的准确性来改进这项技术。

[0019] 许多有限元表示法(例如，混合、接触、连接器、分布式耦合、以及其他元素类型等)都是基于拉格朗日乘子的概念。对包括拉格朗日乘子的FEM进行的模态动态分析可能产生非常不准确的应力和反作用力结果，并且，通过增加分析中使用的振型的数量来达到针对这些结果的可接受的准确性可能是很难，甚至实际上不可能的。

[0020] 本发明的实施例通过对模态动态解中的拉格朗日乘子的计算值进行校正，克服了这些现有方法的缺陷。在示例性的实施例中，通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来运算校正项。这样的实施例的一个优点是在分析期间，方程组的矩阵仅需要进行一次因子分解，由此，几乎不影响整个求解的计算性能。

[0021] 图1是根据本发明的实施例的用于执行模态分析的方法110的流程图。方法110通过提供FEM(111)开始。框111处提供的FEM在用于使用拉格朗日乘子来对该FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用。可以通过本领域中任何已知的手段来提供/获取该FEM。例如，在执行于计算设备上的方法110的实施例中，可以经由通过本领域中任何已知手段通信地耦合到该计算设备的任何点来提供FEM。例如，可以经由局域网(LAN)或广域网(WAN)来提供FEM。可以使用根据本文描述的原理而进行修改的任何现有CAD/CAE/仿真工具(例如，Abaqus®)来实施应用了FEM的模态分析。

[0022] 方法110通过运算校正项(112)继续。根据方法110的实施例，运算校正项112包括通过求解带有稀疏矩阵的线性代数方程组来求解FEM的运动方程组。根据这样的实现，在实施例中，在模态分析中该线性代数方程组的稀疏矩阵仅进行一次因子分解。在方法110的另一个实施例中，如下文所述地来运算校正项。

[0023] 方法110结束于使用所述校正项来修改113所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。根据方法110的实施例，更改拉格朗日乘子包括对与该拉格朗日乘子相关联的一个或多个自由度进行修改。在方法110的又另一个实施例中，针对模态分析的所有频率点来对拉格朗日乘子进行校正。进一步地，使用校正项来修改模态分析113包括对模态分析结果进行修改。此外，可以根据本文描述的任何方法来执行对模态分析进行修改113。

[0024] 根据方法110的实施例，模态分析可以将FEM的结构响应建模为振型的叠加。在这样的实施例中，可以在频率提取分析中获取振型，所述频率提取分析是模态分析的组成部分。进一步地，根据方法110的示例性实施例，可以针对模态分析的所有频率点来对拉格朗日乘子进行校正。

[0025] 应该理解的是，可以以多种不同的方式来实现本文描述的方法110的示例性实施例。在一些实例中，各种实施例中的每一个都可以通过物理、虚拟、或混合通用计算机来实现。例如，在被实现在计算设备中的方法110的实施例中，用于执行方法110的软件指令可以被加载到存储器中，并且通过一个或多个处理器来执行。此外，在示例性实施例中，可以将方法110的各种组成部分并入到现有的系统和/或软件应用程序/套件中以用于执行模态分

析。

[0026] 如上文所描述的，根据方法110的实施例，运算校正项112包括求解FEM的运动方程组。根据这样的实施例，方法110可以包括定义约束系统的运动方程。例如，可以如下定义自由度为n的FEM的运动方程组：

[0027] $M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f(t)$

[0028] 其中，u＝u(t)为位移向量，K为刚度矩阵，C为阻尼(粘滞阻尼)矩阵，M为质量矩阵，以及f(t)为可以取决于时间的右端向量。上方的点表示对时间的导数。可以根据本领域任何已知的原理来定义刚度矩阵K、阻尼矩阵C、质量矩阵M、以及右端向量f(t)，使得FEM可以对其表示的现实世界对象进行仿真。在这样的实施例中，可以假定施加了m＜n个约束，使得解u满足以下的线性约束方程：

[0029] $G^Tu=0$

[0030] 其中，G为包含该线性约束方程系数的矩阵。下文中，上标T定义矩阵的转置。在这样的实施例中，可以进一步假定rank(G)＝m。因此，n×m矩阵G的列是线性无关的。

[0031] 可以进一步利用所定义的运动方程来运算校正项(112)。根据一个实施例，使用拉格朗日乘子技术，可以将针对自由度为n的初始模型的约束问题表述为针对自由度为(n+m)的系统的无约束问题，其中，解向量采取以下形式：

[0032] $\begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} \in R_{n+m}$

[0033] 在将解向量表述为以上所示之后，然后可以将运动方程组写为：

[0034] $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\lambda} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$

[0035] 其中，向量λ表示拉格朗日乘子的集合。

[0036] 利用上述方程组，则在框112(运算校正项)处，方法110可以继续开发解的表示。这样的实施例开始于在R_{n+m}中构造适合于对约束的动态问题解进行表示的基。这样的基可以由三组向量组成，特别地，Φ—特征向量(模态子空间)、Ψ—拉格朗日乘子校正、以及Z—互补基向量。

[0037] Φ—特征向量，包括以下广义特征值问题的特征向量：

[0038] $\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\lambda \end{bmatrix}\Omega^2$

[0039] 其中，Ω＝diag(ω$_1$，ω$_2$，...)为自然角频率的对角矩阵，并且Φ为振型(mode shape)矩阵：

[0040] $\Phi=\begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\lambda \end{bmatrix}$

[0041] 由矩阵Φ的列表示的子空间Φ的向量具有以下特性：

[0042] $G^T\Phi_u=0$

[0043] $\Phi_u^TK\Phi_u=\Omega^2$

[0044] $\Phi_u^T M \Phi_u = I_u$

[0045] 从最后一个方程可以得知，对于可以写为向量形式$\varphi=\begin{Bmatrix}u\\\lambda\end{Bmatrix}$的矩阵Φ的任何列，其中，u表示物理自由度，即位移，并且λ表示拉格朗日乘子，其物理自由度不全为0，u≠0。

[0046] 拉格朗日乘子校正向量Ψ，其是具有零位移自由度和非零拉格朗日乘子的向量的子空间。在这个m个向量的子空间中的自然基是：

[0047] $\Psi=\begin{bmatrix}0\\I_\lambda\end{bmatrix}$

[0048] 注意到，在这样的实施例中，被处理为向量的矩阵Ψ的所有列都满足约束方程。来自子空间Ψ的矩阵具有特定的机械意义(mechanical sense)。当解的展开仅包含来自子空间Ψ的向量时，由静态地载有均匀外部压力的不可压缩的弹性材料制成的球体给出了示例。在这样的情况中，解中的所有物理自由度(位移)都为零，但是拉格朗日乘子不为零。因此，解向量被包括在子空间Ψ中。通过构造，来自子空间Ψ的向量与来自子空间Φ的向量是线性无关的。

[0049] 适合于对约束的动态问题解进行表示的第三组向量是互补基向量Z。要在R_{n+m}中构造完整的基，需要额外的一组m个线性无关的向量。以下矩阵的列表示这样的向量组：

[0050] $Z=\begin{bmatrix}G\\0\end{bmatrix}$

[0051] 来自由矩阵Z的列表示的子空间Z的向量是线性无关的，这是因为rank(G)＝m。此外，这些向量与来自子空间Ψ的向量是线性无关的。来自子空间Z的向量与来自子空间Φ的向量是线性无关的，这是因为特征向量满足以下约束方程：

[0052] $Z^T\Phi=\left[G^T 0\right]\begin{bmatrix}\Phi_u\\\Phi_\varphi\end{bmatrix}=G^T\Phi_u=0$

[0053] 然而，来自子空间Z的向量不满足该约束方程，这是因为矩阵G的列是线性无关的，并且：

[0054] $[G^T\ 0]Z=G^TG\neq0$

[0055] 因此，来自子空间Z的向量不能对约束问题的解起到作用。

[0056] 总结基向量、Φ-特征向量、Ψ-拉格朗日乘子校正、以及Z-互补基向量的特性，可以得出结论，即可以将约束的动态问题的解表示为以下形式：

[0057] $\begin{Bmatrix}u\\\lambda\end{Bmatrix}=\Phi q+\Psi\xi=\begin{bmatrix}\Phi_u\\\Phi_\lambda\end{bmatrix}q+\begin{Bmatrix}0\\\xi\end{Bmatrix}$

[0058] 其中，q为广义位移向量，并且ξ为拉格朗日乘子校正向量。在这样的实施例中，向量ξ的大小(size)为m。向量q的大小等于由模态子空间Φ的模态内容所定义的子空间中的向量数量。通常，在模态分析中，该子空间Φ被截断，并且对于实际工程应用，dim(q)＜n-m。

[0059] 方法110的这样的实施例通过校正瞬时模态动态分析中的拉格朗日乘子(113)继续。通过求解以下运动模态微分方程组来获得广义位移向量q：

[0060] $$\overline{M}\ddot{q}+\overline{C}\dot{q}+\overline{K}q=\overline{f}(t)$$

[0061] 其中，$\overline{M}$ 、 $\overline{C}$ 、 $\overline{K}$ 、以及 $\bar{f}$ 定义如下：

[0062] $$\overline{M}=\Phi^T\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Phi=\Phi_u^T M\Phi_u=I_u$$

[0063] $$\overline{C}=\Phi^T\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Phi=\Phi_u^T C\Phi_u$$

[0064] $$\overline{K}=\Phi^T\begin{bmatrix}K & G\\ G^T & 0\end{bmatrix}\Phi=\Phi_u^T K\Phi_u+(G^T\Phi_u)^T\Phi_\lambda+\Phi_\lambda^T(G^T\Phi_u)=\Omega^2$$

[0065] $$\bar{f}=\Phi^T\begin{Bmatrix}f(t)\\ 0\end{Bmatrix}=\Phi_u^T f(t)$$

[0066] 为了运算拉格朗日乘子校正，将解写成以下形式：

[0067] $$\begin{Bmatrix}u\\ \lambda\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_u\\ \Phi_\lambda\end{bmatrix}q+\begin{Bmatrix}0\\ \xi\end{Bmatrix}$$

[0068] 并且对运动有限元方程组的残差向量r进行运算，其中：

[0069] $$r=\begin{Bmatrix}G\xi-\eta\\ 0\end{Bmatrix},$$

[0070] $$\eta=f(t)-M\Phi_u\ddot{q}-C\Phi_u\dot{q}-(K\Phi_u+G\Phi_\lambda)q$$

[0071] 将残差范数(norm)最小化，获得如下所示的用于拉格朗日乘子校正的方程组：

[0072] $$\|r\|^2=\|G\xi-\eta\|^2\xrightarrow[\xi]{}\min$$

[0073] $(G^TG)\xi=G^T\eta$

[0074] 矩阵$A=G^TG$为$m\times m$的稀疏矩阵，在有限元分析期间该稀疏矩阵可以仅进行单次因子分解。此外，根据实施例，上文定义的向量η的元素仅需要针对在约束方程中用到的拉格朗日乘子的自由度来进行运算。进一步地，根据这样的实施例，在模态分析完成后，可以同时针对所有时间增量来执行对拉格朗日乘子的重新获得。

[0075] 本发明的实施例可以在有限元仿真的频率响应分析中对拉格朗日乘子进行校正。在这样的实施例中，在频域中的运动方程具有以下形式：

[0076] $(-\omega^2M+i\omega C+K+iS)u=f$

[0077] 其中，K、C、以及M分别为刚度矩阵、粘滞阻尼矩阵、以及质量矩阵，如上文所述的。此外，S表示结构阻尼矩阵，并且f和u分别为复杂载荷和响应振幅。在这样的实施例中，针对约束问题的方程组可以是如下形式：

[0078] $$\left(-\omega^2\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K & G\\ G^T & 0\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}u\\ \lambda\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f\\ 0\end{Bmatrix}$$

[0079] 进一步，可以将解(频率响应)表示为以下形式：

[0080] $$\begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\lambda \end{bmatrix} q + \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi \end{Bmatrix}$$

[0081] 其中，q为通过求解以下方程而获取的模态频率响应：

[0082] $$(-\omega^2 \overline{M} + i\omega\overline{C} + \overline{K} + i\overline{S})q = \bar{f}$$

[0083] 其中，$\overline{M} = I_u$，$\overline{C} = \Phi_u^T C \Phi_u$，$\overline{K} = \Omega^2$，$\overline{S} = \Phi_u^T S \Phi_u$，$\bar{f} = \Phi_u^T f$。FEM方程组的残差具有以下形式：

[0084] $$r = \begin{Bmatrix} G\xi - \eta \\ 0 \end{Bmatrix},$$

[0085] $\eta = f - (-\omega^2 M + i\omega C + K + iS)\Phi_u q - G\Phi_\lambda q$

[0086] 使用以上形式，可以通过使残差范数最小化来获取用于拉格朗日乘子校正运算的方程组

[0087] $$\|r\|^2 = \|G\xi - \eta\|^2 \xrightarrow[\xi]{} \min$$

[0088] $(G^T G)\xi = G^T \eta$

[0089] 根据实施例，矩阵$A = G^T G$是$m \times m$的稀疏矩阵，在分析期间该稀疏矩阵仅进行一次因子分解。此外，复杂向量η的元素可以只针对约束方程中使用的自由度来运算。在模态分析完成后，可以针对所有频率点同时执行对拉格朗日乘子的重新获得。

[0090] 上文描述的用于执行模态分析以及确定校正项以对拉格朗日乘子进行校正的过程可以在方法110的块112和113中实现。例如，在由计算设备实现的方法110的实施例中，可以通过执行计算机程序指令来实施上文描述的过程。

[0091] 图2是根据本发明的实施例的可以用于执行模态分析的基于计算机的系统220的简化框图。系统220包括总线225。总线225用作系统220的各种部件之间的互联。连接到总线225的是输入/输出设备接口228，其用于将各种输入和输出设备(例如，键盘、鼠标、显示器、扬声器等)连接到系统220。中央处理单元(CPU)222连接到总线225并且提供对计算机指令的执行。存储器227提供用于实施计算机指令的数据的易失性存储。存储装置226提供用于软件指令(例如，操作系统(未示出))的非易失性存储。系统220还包括网络接口221，其用于连接到本领域中已知的各种网络，包括广域网(WAN)和局域网(LAN)。

[0092] 也连接到总线225的是仿真模块223。仿真模块223被配置为提供FEM并且在使用拉格朗日乘子来对FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中使用该FEM。仿真模块223可以通过本领域中已知的任何手段来提供该FEM。例如，仿真模块223可以帮助用户构造FEM。在又另一实施例中，仿真模块223可以获取存储在存储设备226或存储器227上的FEM。此外，仿真模块223还可以从经由网络接口221和/或输入/输出设备接口228通信地耦合到系统220的任何点来提供FEM。

[0093] 系统220还包括通信地/可操作地耦合到仿真模块223的校正模块224。校正模块224被配置为运算校正项，并且通过使用所运算的校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。

[0094] 应该理解的是，可以以多种方式来实现本文描述的示例性实施例。在一些实例中，本文描述的各种方法和机器的每一个都可以通过物理、虚拟、或混合通用计算机(例如，计

算机系统220)来实现。可以将计算机系统220转变成执行本文描述的方法的机器,例如,通过将软件指令加载到存储器227或非易失性存储设备226中以由CPU 222执行。此外,尽管将仿真模块223和校正模块224示出为单独的模块,但在示例性实施例中,这些模块可以使用多种配置来实现。

[0095] 系统220及其各种部件可以被配置为实施任何本文描述的本发明的实施例。例如,系统220可以被配置为实施上文描述的与图1有关的方法110。在示例性实施例中,仿真模块223和校正模块224可以在存储于存储器227和/或存储设备226上的软件中实现。在这样的示例性实施例中,CPU 222和存储器227与存储在存储器227和/或存储设备226上的计算机代码指令一起实现了仿真模块,该仿真模块提供FEM并且在使用拉格朗日乘子来对该FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用该FEM。此外,系统220的部件实现了校正模块,其可操作地耦合到仿真模块并且被配置为运算校正项以及使用所述校正项来修改所述模态分析以更改所述拉格朗日乘子。在示例性实施例中,系统220根据本文描述的一个或多个实施例来执行模态分析并且对该模态分析进行修改(和改进)。在又另一实施例中,系统220通信地耦合到执行模态分析的系统,并且用于如本文所述的来对模态分析进行修改。

[0096] 图3示出了可以在其中实现本发明的实施例的计算机网络环境330。在计算机网络环境330中,服务器331通过通信网络332链接到客户端333a-n。环境330可以用于允许客户端333a-n单独地或与服务器331结合地执行上文描述的任何方法。

[0097] 应该理解的是,上文描述的示例性实施例可以以许多不同的方式实现。在一些实例中,本文描述的各种方法和机器中的每一个都可以通过物理、虚拟、或混合通用计算机或计算机网络环境(例如,计算机环境330)来实现。

[0098] 实施例或其各方面可以以硬件、固件、或软件的形式实现。如果以软件实现,则该软件可以存储于被配置为使计算机能够加载该软件或软件的指令的子集的任何非瞬时性计算机可读介质上。处理器随后执行指令并且被配置为操作装置或使得装置以本文描述的方式进行操作。

[0099] 此外,在本文中,可以将固件、软件、例程、或指令描述为执行数据处理器的某些动作和/或功能。然而,应该意识到,本文包含的这样的描述仅是为了便利,并且这样的动作实际上由计算设备、处理器、控制器、或另外执行固件、软件、例程、指令等的其他设备产生。

[0100] 应该理解的是,流程图、框图、以及网络图可以包括更多或更少的元素、被不同地布置、或被不同地表示。但是还应该理解的是,某些实现可以规定示出了对以特定的方式实现的实施例的执行的块和网络图以及块和网络图的编号。

[0101] 因此,进一步的实施例还可以被实现在多种计算机架构、物理、虚拟、云计算机、和/或其某种组合中,并且因此,本文描述的数据处理器只是出于举例示出的目的而并非是要作为对实施例的限制。

[0102] 尽管已经参照其示例性实施例特别地示出并描述了本发明,但是本领域的技术人员应该理解的是,可以在其中做出形式和细节上的各种改变,而不偏离所附的权利要求所涵盖的本发明的范围。

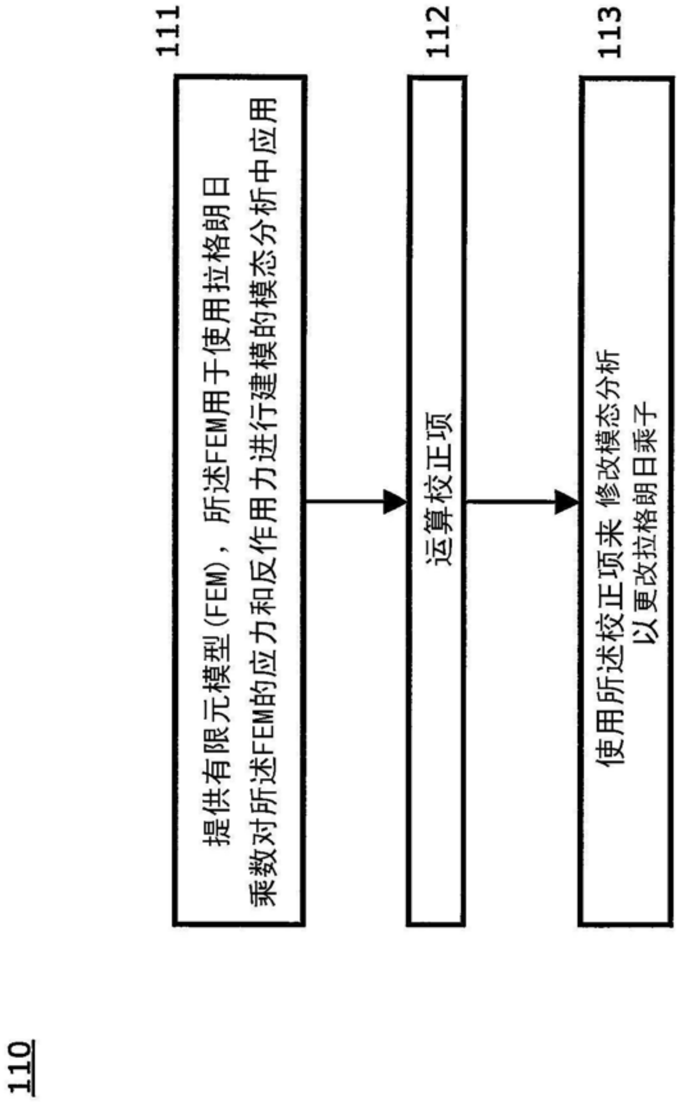

111
提供有限元模型(FEM)，所述FEM用于使用拉格朗日
乘数对所述FEM的应力和反作用力进行建模的模态分析中应用
112
运算校正项
113
使用所述校正项来 修改模态分析
以更改拉格朗日乘子
110

图1

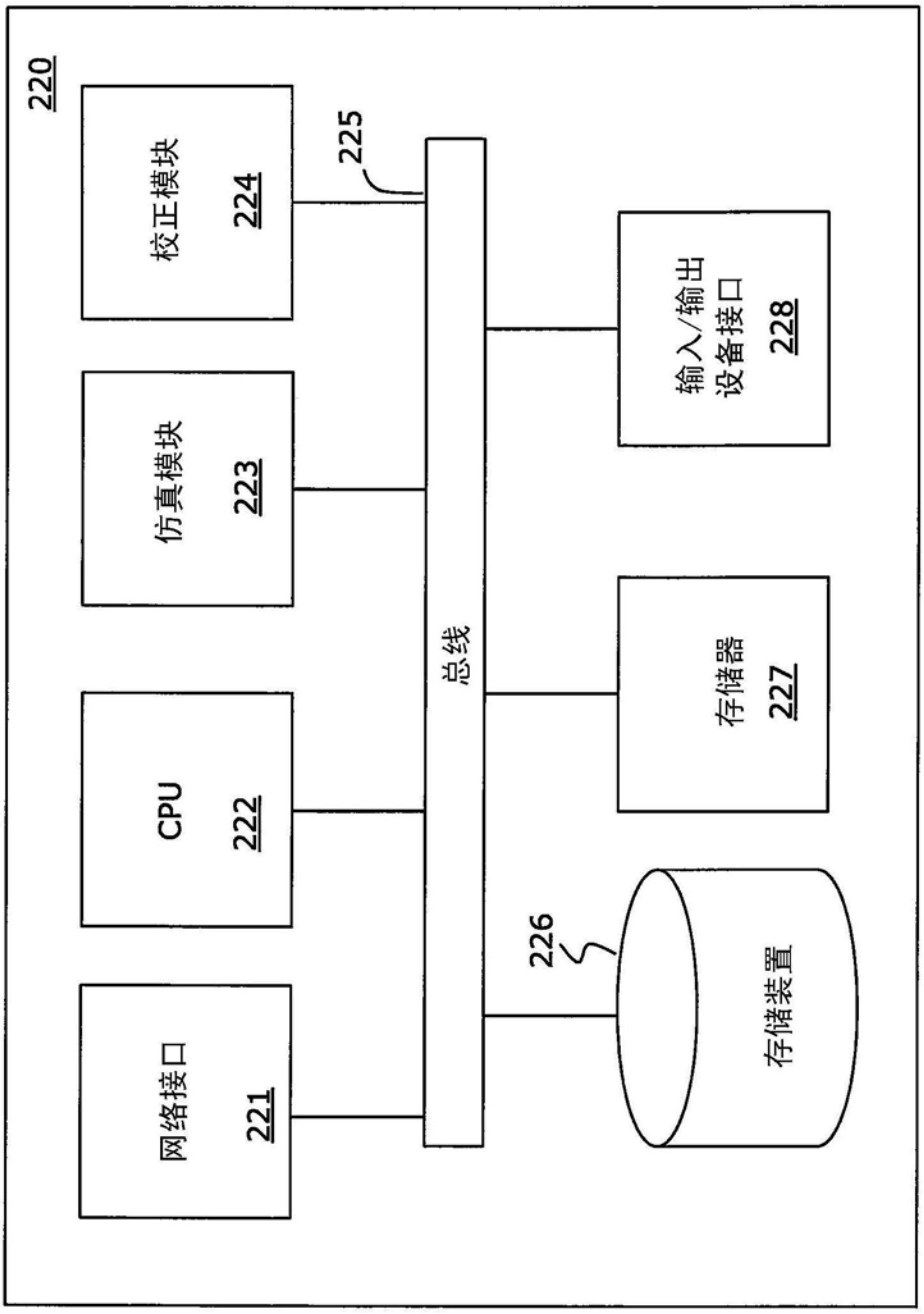

220
校正模块
224
225
仿真模块
223
CPU
222
网络接口
221
总线
输入/输出
设备接口
228
存储器
227
226
存储装置

图2

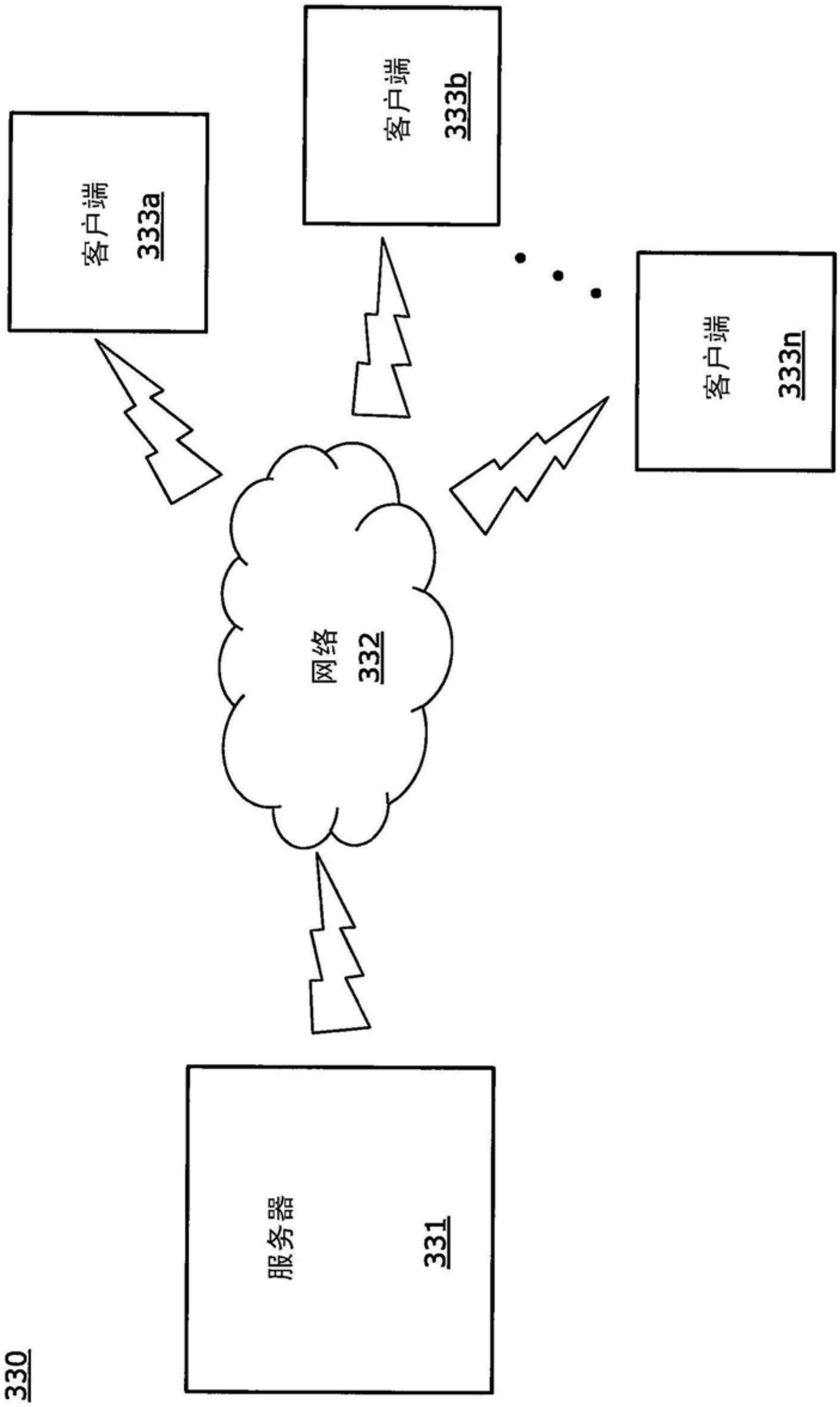


图3