



(51) Classification internationale des brevets :  
**H04L 27/26** (2006.01) **H03H 17/02** (2006.01)

(FR). **PINCHON, Didier** [FR/FR]; 9 rue Louis Eydoux,  
F-31400 Toulouse (FR).

(21) Numéro de la demande internationale :  
PCT/FR2009/052641

(74) Mandataire : **FRANCE  
TELECOM/R&D/PIV/BREVETS**; JEUNE Pascale,  
38/40 rue du Général Leclerc, F-92794 Issy Moulineaux  
Cedex 9 (FR).

(22) Date de dépôt international :  
21 décembre 2009 (21.12.2009)

(25) Langue de dépôt : français

(26) Langue de publication : français

(30) Données relatives à la priorité :  
08 58910 22 décembre 2008 (22.12.2008) FR

(71) Déposant (pour tous les États désignés sauf US) :  
**FRANCE TELECOM** [FR/FR]; 6 place d'Alleray,  
F-75015 Paris (FR).

(72) Inventeurs; et

(75) Inventeurs/Déposants (pour US seulement) : **SIOHAN,  
Pierre** [FR/FR]; 35 rue Maurice Hay, F-35200 Rennes

(81) États désignés (sauf indication contraire, pour tout titre  
de protection nationale disponible) : AE, AG, AL, AM,  
AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BR, BW, BY, BZ,  
CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DK, DM, DO,  
DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT,  
HN, HR, HU, ID, IL, IN, IS, JP, KE, KG, KM, KN, KP,  
KR, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LT, LU, LY, MA, MD,  
ME, MG, MK, MN, MW, MX, MY, MZ, NA, NG, NI,  
NO, NZ, OM, PE, PG, PH, PL, PT, RO, RS, RU, SC, SD,  
SE, SG, SK, SL, SM, ST, SV, SY, TJ, TM, TN, TR, TT,  
TZ, UA, UG, US, UZ, VC, VN, ZA, ZM, ZW.

(84) États désignés (sauf indication contraire, pour tout titre  
de protection régionale disponible) : ARIPO (BW, GH,

[Suite sur la page suivante]

(54) Title : POLYPHASE DECOMPOSITION OF A FILTER BENCH FOR OVERSAMPLED OFDM

(54) Titre : DECOMPOSITION POLYPHASE D'UN BANC DE FILTRES POUR OFDM SURÉCHANTILLONNÉ

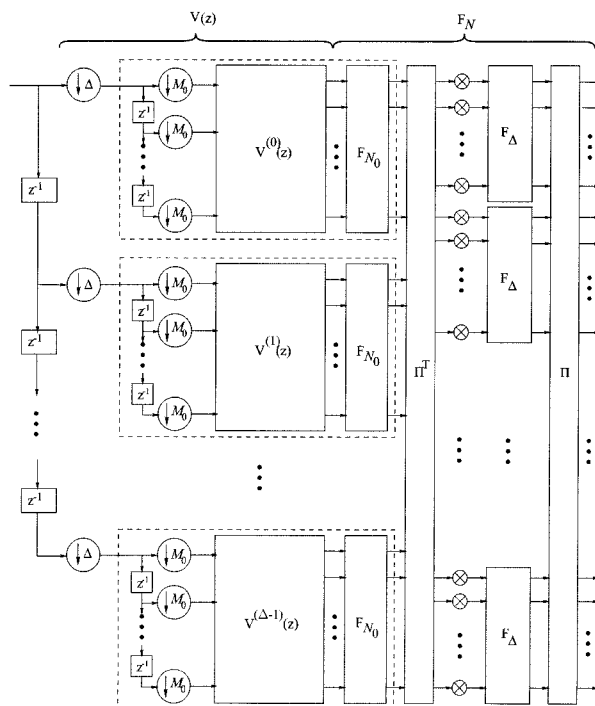


Fig. 3

(57) Abstract : The invention relates to a device for demodulating an oversampled multi-carrier signal. According to the invention, the device includes  $\Delta$  stages,  $\Delta$  being an integer higher than or equal to 1, supplied with received data representative of source data, each of said stages including an analysis filter bench having  $N_0$  branches and a decimation factor equal to  $M_0$ ,  $N_0$  and  $M_0$  being prime numbers relative to each other and  $M_0 > 1$ , wherein an analysis filter bench includes a decomposition matrix  $V^{(j)}(z)$  and a Fourier matrix  $F_{N_0}$ . The decomposition matrix is a para-unit matrix having some coefficients forced to zero according to a predetermined criterion that takes into account said decimation factor  $M_0$  and number of branches  $N_0$  in order to enable a perfect reconstruction of the source data.

(57) Abrégé : L'invention concerne un dispositif de démodulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné. Selon l'invention, un tel dispositif comprend  $\Delta$  étages,

[Suite sur la page suivante]



GM, KE, LS, MW, MZ, NA, SD, SL, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), eurasien (AM, AZ, BY, KG, KZ, MD, RU, TJ, TM), européen (AT, BE, BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR, HU, IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, MK, MT, NL, NO, PL, PT, RO, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, ML, MR, NE, SN, TD, TG).

— relative à la qualité d'inventeur (règle 4.17.iv))

**Publiée :**

— avec rapport de recherche internationale (Art. 21(3))

— avant l'expiration du délai prévu pour la modification des revendications, sera republiée si des modifications sont reçues (règle 48.2.h))

**Déclarations en vertu de la règle 4.17 :**

$\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données reçues représentatives de données source, chacun desdits étages comprenant un banc de filtres d'analyse présentant  $N_0$  branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , un banc de filtres d'analyse comprenant une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et une matrice de Fourier  $F_{N_0}$ . La matrice de décomposition est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur de décimation  $M_0$  et du nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite desdites données source.

## DECOMPOSITION POLYPHASE D'UN BANC DE FILTRES POUR OFDM SURECHANTILLONNE

**1. Domaine de l'invention**

5 Le domaine de l'invention est celui de la transmission de signaux numériques basés sur des modulations multiporteuses.

Plus précisément, l'invention concerne la modulation et la démodulation de signaux de type OFDM/QAM suréchantillonné (en anglais « Oversampled Orthogonal Frequency Division Multiplexing / Quadrature Amplitude  
10 Modulation »).

L'invention s'applique aux communications sans fil ou filaire. Dans le cas d'une transmission filaire, l'OFDM suréchantillonné est encore appelé FMT (en anglais « Filtered MultiTone »). L'invention trouve notamment des applications dans les systèmes de diffusion de type DVB ou dans les transmissions de type  
15 VDSL (en anglais « Very-high-bit-rate Digital Subscriber Line », en français « ligne d'abonné numérique à très haut débit »).

**2. Art antérieur**

Les techniques de transmission multiporteuses, par exemple de type OFDM, sont utilisées pour les communications sans fil (DVB-T, WiFi, WiMax)  
20 ou filaires (xDSL, PLC). Elles permettent notamment d'améliorer l'efficacité spectrale dans des canaux de transmission dits sélectifs en fréquence. En effet, avec ces techniques, le spectre est divisé en sous-canaux et le signal est transmis sur plusieurs sous-porteuses. Ces techniques peuvent notamment être combinées à des techniques d'accès multiple, qui permettent d'accroître le nombre d'utilisateurs  
25 pouvant accéder à une ressource à n'importe quel instant.

Classiquement, le signal OFDM s'écrit en bande de base sous la forme suivante :

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} f_{m,n}(t) \quad (1)$$

avec :

$$f_{m,n}(t) = f(t - nT_0)e^{j2\pi mF_0t} \quad (2)$$

où :

- $M$  est le nombre de porteuses sur lesquelles on veut transmettre des symboles complexes de données  $c_{m,n}$ , avec  $m \in \{0, \dots, M-1\}$  et  
5  $n \in \mathbb{Z}$  ;
- $f(t)$  est une fonction de carré intégrable, encore appelée fonction prototype ;
- $T_0$  est la durée symbole ;
- $F_0$  est l'espacement entre deux porteuses successives ; et  
10  $j^2 = -1$ .

L'annexe A, qui fait partie intégrante de la description, rappelle les principales caractéristiques des modulations OFDM.

L'OFDM suréchantillonné, par rapport à l'OFDM conventionnel, présente la possibilité d'introduire une forme d'onde optimisée avec des critères appropriés  
15 pour un canal de transmission donné. Cette forme d'onde spécifique est réalisée par une modulation exponentielle d'un filtre, dit filtre prototype.

L'annexe B, qui fait également partie intégrante de la description, rappelle les principales caractéristiques de l'OFDM suréchantillonné.

Plus précisément, le signal discret de l'OFDM suréchantillonné, permettant de transmettre  $M$  symboles de données sur  $N$  échantillons, avec  $N$   
20 supérieur à  $M$ , peut s'exprimer sous la forme :

$$s[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} f_{m,n}[k] \quad (4)$$

avec :

$$f_{m,n}[k] = f\left[k - nN\right] e^{j\frac{2\pi}{M}m\left(k - \frac{D}{2}\right)} e^{j\psi_{m,n}} \quad (5)$$

25 où :

- $k$  est l'indice des échantillons du signal discret ;
- $f[k]$  représente le filtre prototype que l'on supposera à réponse impulsionnelle finie (RIF) de longueur  $L$  ;
- $D$  est un paramètre lié au retard de traitement introduit par le système de

transmission ;

- $\psi_{m,n}$  est un terme de phase.

Les équations (4) et (5) peuvent se réécrire en faisant apparaître un banc de filtres de synthèse à  $M$  sous-bandes ayant un facteur d'expansion égal à  $N$   
 5 constitué de  $m$  filtres  $F_m(z)$  de réponses impulsionnelles  $f_m[k]$ .

Un tel système, encore appelé transmultiplexeur, est illustré en figure 1, et notamment décrit dans le brevet européen EP 1 354 453 (référence [3] dans l'annexe G) au nom du même demandeur. L'annexe C, qui fait partie intégrante de la description, en rappelle les principales caractéristiques.

10 On rappelle que pour réaliser sous forme de transmultiplexeur un système dit OFDM suréchantillonné ou FMT, on place un banc de synthèse à l'émission (côté modulation) et un banc d'analyse à la réception (côté démodulation) en incluant un retard approprié nécessaire à la réalisation d'un système causal. De manière duale, pour réaliser un système dit de codage en sous-bande, on traite un  
 15 signal d'entrée par un banc d'analyse côté modulation et on reconstruit à la réception (côté démodulation) le signal  $x(n)$  par un banc de synthèse.

Les avancées les plus significatives sur la théorie des bancs de filtres modulés suréchantillonnés concernaient des dispositifs prévus pour du codage en sous-bande. Le document « *Oversampled modulated filter banks and tight Gabor*  
 20 *frames in  $l^2(\mathbb{Z})$*  », Z. CVETKOVIC, en constitue un exemple. Toutefois les auteurs n'y présentent que des exemples "jouets", inutilisables dans une application de transmission, et ne fournissent aucune règle générique de construction.

Les conditions de reconstruction parfaite, ainsi que les critères  
 25 d'optimisation associés, sont également décrits dans le document [3] précité. De plus, le document « *Perfect reconstruction conditions and design of oversampled DFT modulated transmultiplexers* » (référence [4] dans l'annexe G) précise les conditions de reconstruction parfaite dans le cas orthogonal, et les informations nécessaires pour obtenir des schémas de réalisation efficaces et rapides à base de  
 30 Transformée de Fourier rapide (FFT). L'annexe D, qui fait partie intégrante de la

description, en rappelle les principaux aspects.

De plus, le document [4] précité propose un théorème de décomposition scindant le système de transmission initial des équations de reconstruction parfaite en de petits sous-systèmes indépendants d'équations, qui peuvent être résolus  
5 grâce à des paramétrisations angulaires appropriées. La technique présentée dans ce document [4] fournit, au final, un algorithme d'obtention de transmultiplexeurs suréchantillonnés pour les rapports de suréchantillonnage rationnels  $3/2$ ,  $4/3$  et  $5/4$  et des longueurs de filtres prototypes arbitrairement grandes.

Ainsi, la technique décrite dans ce document [4] garantit l'obtention de  
10 solutions à reconstruction parfaite (RP), c'est-à-dire parfaitement orthogonales, et permet, grâce à l'utilisation d'une représentation paramétrique sous forme angulaire, que cette orthogonalité soit structurellement vérifiée. Elle présente néanmoins quelques inconvénients, et notamment :

- 15 – les représentations paramétriques ne font pas apparaître de structures de réalisation régulières. Ceci ne permet pas d'en déduire des solutions pour les composantes polyphases d'un filtre prototype de degré élevé ;
- certaines solutions à reconstruction parfaite peuvent être contenues dans d'autres solutions. Autrement dit, la technique décrite peut aboutir à des représentations paramétriques a priori différentes, mais  
20 qui après analyse s'avèrent être équivalentes ;
- la complexité de la technique ne permet pas de considérer des rapports de suréchantillonnage inférieurs à  $5/4$ .

On entend ici « solution » une technique d'implémentation du transmultiplexeur qui va garantir que les coefficients du filtre prototype et  
25 l'implémentation globale du modulateur et du démodulateur vont permettre de vérifier les conditions d'orthogonalité.

### 3. Exposé de l'invention

L'invention propose une solution nouvelle qui ne présente pas l'ensemble de ces inconvénients de l'art antérieur, sous la forme d'un dispositif de  
30 démodulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné.

Selon l'invention, un tel dispositif comprend  $\Delta$  étages,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données reçues représentatives de données source, chacun desdits étages comprenant un banc de filtres d'analyse présentant  $N_0$  branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ .

Plus précisément, un banc de filtres d'analyse comprend une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et une matrice de Fourier  $F_{N_0}$ , et la matrice de décomposition est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte du facteur de décimation  $M_0$  et du nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite des données source.

L'invention propose ainsi une nouvelle technique de démodulation à reconstruction parfaite, permettant d'assurer l'orthogonalité des porteuses d'un signal multiporteuse suréchantillonné ( $M_0 < N_0$ ), et notamment d'un signal OFDM/QAM suréchantillonné.

En particulier, le filtre prototype du démodulateur ainsi construit permet des transmissions multiporteuses utilisant des rapports de suréchantillonnage non traités jusqu'à présent, et notamment des rapports proches de l'unité. En effet, on rappelle que plus le suréchantillonnage est faible et proche de l'unité, plus l'efficacité spectrale du signal multiporteuse est importante, ce qui est souhaitable.

La technique proposée permet l'obtention de systèmes multiporteuses suréchantillonnés pour des filtres prototypes à phase linéaire ou non linéaire, du fait de l'utilisation d'un nombre d'étages  $\Delta$  pouvant être quelconque.

L'utilisation d'un filtre prototype à phase non linéaire présente plusieurs intérêts, comme l'obtention de structures régulières avec un minimum d'angles de rotation pour l'implémentation du filtre prototype comme décrit ci-après, ou une atténuation plus élevée pour le filtre prototype pour une longueur de prototype et un rapport de suréchantillonnage donnés.

L'annexe E, paragraphe 5.8, rappelle la définition des matrices para-unitaires.

Par exemple, le critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$ , selon les équations suivantes :

$$V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m}$$

5 avec :

- $m$  un entier supérieur ou égal à 1 ;
- $\left[ V_0^{(i)} \right]_{k+1, l+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- $\left[ V_m^{(i)} \right]_{k+1, l+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- 10 -  $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- $\beta(k, l)$  un entier tel que :
  - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
  - $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
  - $p(k, l) = \text{rem}((k-l)v, M_0)$  ;
  - 15 -  $q(k, l) = \text{rem}((k-l)u, N_0)$  ;
  - $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;

avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division des entiers  $a$  par  $b$ .

20 Les démonstrations associées à la détermination de ce critère sont présentées plus en détail dans les annexes, et notamment l'annexe E, paragraphes 5.2 et 5.8.1.

Selon une caractéristique particulière, la matrice de décomposition est constituée de  $m$  matrices identiques  $\hat{B}$ , chaque matrice  $\hat{B}$  étant constituée d'au  
25 moins une rotation et d'au moins un décalage,  $m$  étant supérieur ou égal à 1.

On peut noter que les différentes rotations d'une matrice  $\hat{B}$  sont indépendantes. En d'autres termes, une rotation étant définie par un angle de rotation, il n'y a pas de dépendances entre les différents angles de rotation.

Selon un autre aspect particulier, le nombre de branches  $N_0$  est égal à  $M_0 + 1$ .

Le rapport de suréchantillonnage est alors proche de l'unité.

En particulier, le nombre de rotations d'une matrice  $\hat{B}$  est égal à  $M_0$ .

- 5 De cette façon, si la matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  est constituée de  $m$  matrices identiques  $\hat{B}$ , le nombre de rotations total est de  $mM_0$ , ce qui assure une dimension minimale de la solution.

Selon une autre caractéristique particulière, le nombre d'étages  $\Delta$  est un entier pair, supérieur ou égal à 2.

- 10 En effet, si le filtre prototype est un filtre à phase linéaire, il est nécessaire que le nombre d'étages  $\Delta$  soit un entier pair pour des raisons de symétrie.

- Selon un autre aspect particulier, les étages alimentent des premiers moyens de permutation  $P^T$  comprenant  $\Delta N_0$  entrées et  $\Delta N_0$  sorties, alimentant  $N_0$  matrices de Fourier  $F_\Delta$ , qui alimentent elles-mêmes des seconds moyens de permutation  $P$ .
- 15

Il est ainsi possible de décomposer l'opération de transformée de Fourier effectuée au niveau du démodulateur.

Dans un autre mode de réalisation, l'invention concerne un procédé de démodulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné.

- 20 Selon l'invention, un tel procédé met en œuvre  $\Delta$  étages alimentés par des données reçues représentatives de données source, chacun desdits étages mettant en œuvre un filtrage d'analyse présentant  $N_0$  branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , comprenant les étapes suivantes :

- 25 - multiplication par une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et  
 - multiplication par une matrice de Fourier  $F_{N_0}$ .

- En particulier, la matrice de décomposition est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte du facteur de décimation  $M_0$  et du nombre de branches  $N_0$ , de façon à
- 30 permettre une reconstruction parfaite des données source.

Un tel procédé peut être mis en œuvre par un dispositif de démodulation tel que décrit précédemment. Ce procédé pourra bien sûr comporter les différentes caractéristiques relatives au dispositif de démodulation selon l'invention.

En particulier, la matrice de décomposition est constituée de  $m$  matrices identiques  $\hat{B}$ , chaque matrice  $\hat{B}$  étant constituée d'au moins une rotation et d'au moins un décalage,  $m$  étant supérieur ou égal à 1, et le procédé comprend une phase préalable de détermination des matrices  $\hat{B}$ , de façon que les matrices  $\hat{B}$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\hat{B}(z) = Z_{N_0} \prod_{i=1}^{M_0} [R_{i,M_0+1} Z_{N_0}]$$

où  $Z_{N_0}$  est une matrice carrée diagonale assurant un décalage et  $R_{i,M_0+1}$  une matrice de rotation.

L'invention concerne par ailleurs un dispositif de modulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné.

Selon l'invention, un tel dispositif comprend  $\Delta$  étages, alimentés par des données source, chacun des étages comprenant un banc de filtres de synthèse présentant  $N_0$  branches et un facteur d'expansion égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , un banc de filtres de synthèse comprenant une matrice de Fourier conjuguée  $F_{N_0}^*$  et une matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$ .

En particulier, la matrice de décomposition conjuguée est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte du facteur d'expansion  $M_0$  et du nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite des données source.

Par exemple, le critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$  de taille  $M_0 \times N_0$ ,

selon les équations suivantes :

$$V^{(i)*}(z) = V^{(i)T}(z^{-1}) \text{ avec } V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m},$$

où  $T$  correspond à l'opération de transposition, avec :

- $m$  un entier supérieur ou égal à 1 ;

- $\left[ V_0^{(i)*} \right]_{l+1,k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- $\left[ V_m^{(i)*} \right]_{l+1,k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- 5 -  $\beta(k, l)$  un entier tel que :
  - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
  - $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
  - $p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0)$  ;
  - $q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0)$  ;
  - 10 -  $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;

avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division de  $a$  par  $b$ .

Un tel dispositif de modulation est apte à moduler un signal destiné à être  
15 reçu par le dispositif de démodulation décrit précédemment.

Les caractéristiques et avantages de ce dispositif de modulation sont les mêmes que ceux du dispositif de démodulation. Par conséquent, ils ne sont pas détaillés plus amplement. En effet, on note que le modulateur et le démodulateur fonctionnent de manière symétrique, afin de permettre une reconstruction parfaite  
20 des données sources. Ainsi, les matrices de décomposition et de Fourier utilisées côté modulation correspondent aux conjuguées des matrices de décomposition et de Fourier utilisées côté démodulation.

Dans un autre mode de réalisation, l'invention concerne un procédé de modulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné.

25 Selon l'invention, un tel procédé met en œuvre  $\Delta$  étages alimentés par des données source, chacun des étages mettant en œuvre un filtrage de synthèse présentant  $N_0$  branches et un facteur d'expansion égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , comprenant les étapes suivantes :

- multiplication par une matrice de Fourier conjuguée  $F_{N_0}^*$ ,

- multiplication par une matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$ .

En particulier, la matrice de décomposition conjuguée est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte du facteur d'expansion  $M_0$  et du nombre de branches

- 5  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite des données source.

L'invention concerne également un programme d'ordinateur comportant des instructions pour la mise en œuvre du procédé de modulation et/ou du procédé de démodulation tels que décrits précédemment lorsque le programme est exécuté par un processeur.

- 10 L'invention concerne encore un système de transmission d'un signal multiporteuse suréchantillonné, comprenant un dispositif de modulation et un dispositif de démodulation tels que décrits précédemment, de façon à permettre une reconstruction parfaite desdites données source.

#### 4. Liste des figures

- 15 D'autres caractéristiques et avantages de l'invention apparaîtront plus clairement à la lecture de la description suivante d'un mode de réalisation particulier, donné à titre de simple exemple illustratif et non limitatif, et des dessins annexés, parmi lesquels :

- la figure 1 présente un transmultiplexeur classique, associé aux modulations OFDM suréchantillonnées avec  $N > M$  ;
- 20 - les figures 2A et 2B illustrent un banc d'analyse et son schéma équivalent pour un système suréchantillonné de rapport  $N/M$ , avec  $N \geq M$  ;
- la figure 3 présente un banc modulé d'analyse suréchantillonné de rapport  $N/M$ , avec  $N \geq M$ , côté démodulateur, sous forme décomposée ;
- 25 - la figure 4 présente un banc modulé de synthèse suréchantillonné de rapport  $N/M$ , avec  $N \geq M$ , côté modulateur, sous forme décomposée ;
- la figure 5 représente une rotation, avec  $N_0 = 6$ ,  $k = 2$ ,  $l = 5$  ;
- les figures 6A et 6B proposent deux représentations équivalentes d'une opération matricielle ;
- 30 - la figure 7 illustre un schéma de réalisation d'une matrice de

décomposition  $V^{(i)}(z)$  ;

- les figures 8A et 8B illustrent un exemple de filtre prototype, avec sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle.

## 5. Description d'un mode de réalisation de l'invention

### 5.1 Principe général

L'invention propose une nouvelle technique de modulation/démodulation permettant de déterminer différentes structures pour la réalisation du filtre prototype utilisé pour mettre en forme les porteuses d'un signal multiporteuse suréchantillonné, dans un système de type transmultiplexeur ou, de manière duale, dans un système en sous-bandes.

L'utilisation du filtre prototype ainsi déterminé permet d'assurer une orthogonalité des porteuses, c'est-à-dire de conserver les distances entre les symboles multiporteuses transmis en sortie du modulateur, ce qui permet d'optimiser les performances de transmission. En d'autres termes, si le canal de transmission est le canal idéal, les données reconstruites en sortie du démodulateur seront identiques aux données source en entrée du modulateur. Dans le cas d'un canal à bruit blanc gaussien (AWGN), du fait de la parfaite orthogonalité du système de modulation multiporteuse, les probabilités d'erreur symbole (ou bit) seront minimales.

En particulier, l'invention propose de déterminer les structures de réalisation les plus appropriées pour l'implémentation du filtre prototype  $P(z)$  sous sa forme dite polyphase, en décomposant la matrice  $H(z)$  représentative des composantes polyphases du filtre prototype.

Les solutions s'écrivent sous forme de produits de matrices, qui se traduisent pour l'implantation dans le modulateur ou le démodulateur par des cascades de cellules de rotation et de décalage. On rappelle qu'une solution correspond ici à l'obtention d'un banc de filtre parfaitement orthogonal du fait de sa structure de réalisation.

En particulier, la technique proposée permet de préserver l'orthogonalité des porteuses du fait de l'indépendance des paramètres, même si les angles des

rotations sont modifiés.

### 5.2 Mode de réalisation particulier

Comme illustré en figures 2A et 2B, et démontré en annexe E, paragraphe 5.1, qui fait partie intégrante de la description, le filtre prototype peut être implémenté sous sa forme polyphase, au moyen d'une matrice polyphase  $H(z)$ .

L'invention propose, selon ce mode de réalisation particulier, de décomposer la matrice polyphase sous la forme de produits de matrice.

La décomposition de la matrice polyphase  $H(z)$  côté démodulateur est illustrée en figure 3.

Plus précisément, comme expliqué en annexe E, la matrice polyphase  $H(z)$  peut se factoriser sous la forme :

$$H(z) = F_N V(z) \quad (31)$$

où  $F_N$  est une matrice de Fourier de dimension  $N \times N$  et la matrice  $V(z)$  de dimension  $N \times M$  est le produit :

$$V(z) = [I_N, \dots, I_N] \text{diag} \left( V_0(z^{N_0}), V_1(z^{N_0}), \dots, V_{MN_0-1}(z^{N_0}) \right) \begin{bmatrix} I_M \\ z^{-1} I_M \\ \vdots \\ z^{N_0-1} I_M \end{bmatrix} \quad (32).$$

En notant  $\Delta$  le plus grand diviseur commun entre  $M$  et  $N$ , avec  $M = \Delta M_0$ ,  $N_0 > M_0 > 1$ ,  $N = \Delta N_0$ , et  $\Delta \geq 1$ , on peut décomposer la matrice de Fourier  $F_N$  comme décrit en annexe E, paragraphe 5.3, sous la forme suivante :

$$F_N = P \begin{bmatrix} F_\Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_\Delta & & \vdots \\ \vdots & & F_\Delta & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_\Delta \end{bmatrix} D P^T \begin{bmatrix} F_{N_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{N_0} & & \vdots \\ \vdots & & F_{N_0} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_{N_0} \end{bmatrix} P \quad (51)$$

$D$  est la matrice diagonale dont l'élément de ligne et colonne  $i+1$  est  $\omega^{qr}$  si  $i = q\Delta + r$ , où  $\omega$  désigne la racine  $N$ -ième de l'unité. L'opérateur  $X$  de la figure 3 correspond à la matrice  $D$ .

Plus précisément, un démodulateur selon cette décomposition comprend  $\Delta$  étages alimentés par des données reçues. Les données reçues alimentant le

premier étage subissent une décimation selon un facteur de décimation  $\Delta$ , les données reçues alimentant le deuxième étage subissent un retard  $z^{-1}$  et une décimation selon le facteur  $\Delta$ , les données reçues alimentant le  $\Delta$ ème étage subissent  $(\Delta - 1)$  retards  $z^{-1}$  et une décimation selon le facteur  $\Delta$ .

5 Chaque étage comprend un banc de filtres d'analyse présentant  $N_0$  sous-bandes ou branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux. Un tel banc de filtres d'analyse comprend une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$ , et une matrice de Fourier  $F_{N_0}$  de taille  $N_0 \times N_0$ , avec  $i$  allant de 0 à  $\Delta - 1$ .

10 Selon la figure 3, les matrices de permutations  $P$ ,  $P^T$  prennent la forme d'un entrelaceur  $\Pi$ ,  $\Pi^T$  respectivement. Le premier entrelacement est assuré par les sorties des matrices de décomposition  $V^{(i)}(z)$ .

La figure 4 illustre quant à elle la décomposition de la matrice polyphase  $H(z)$  côté modulateur, mise en œuvre de façon symétrique au démodulateur.

15 Plus précisément, un modulateur selon cette décomposition comprend  $\Delta$  étages, alimentés par des données source après une transformée de Fourier inverse. Chaque étage comprend un banc de filtres de synthèse présentant  $N_0$  branches et un facteur d'expansion égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $N_0 > M_0 > 1$ . Un banc de filtres de synthèse comprend une matrice de Fourier conjuguée  $F_{N_0}^*$ , de taille  $N_0 \times N_0$ , et une matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$ , de taille  $M_0 \times N_0$ , avec  $i$  allant de 0 à  $\Delta - 1$ .

On cherche alors à définir les différentes structures de réalisation des matrices de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et  $V^{(i)*}(z)$ , en fonction des valeurs des paramètres  $N_0$  et  $M_0$ .

25 Pour se faire, on considère des matrices de décomposition,  $V^{(i)}(z)$  côté démodulation et  $V^{(i)*}(z)$  côté modulation, para-unitaires, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte du facteur de décimation  $M_0$  et du nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite des données source.

30 Un tel critère est plus précisément défini en annexe E, paragraphes 5.2 et

## 5.8.1.

On définit de cette façon des motifs, encore appelés « patterns », définissant l'ensemble de solutions possibles pour les matrices de décomposition  $U^{(i)}(z)$ , encore noté  $S_{M_0, N_0, m}$ .

- 5 L'ensemble  $S_{M_0, N_0, m}$  correspond donc à l'union d'un ensemble de solutions, chaque solution étant un ensemble de matrices de décomposition para-unitaires  $U^{(i)}(z)$ , pour  $i$  allant de 0 à  $\Delta - 1$ . Les matrices para-unitaires  $U^{(i)}(z)$  correspondent à un produit d'au moins une rotation et/ou décalage.

- La valeur  $m$  est définie en fonction de la longueur  $L$  du filtre prototype :  
 10  $L = m\Delta M_0 N_0$ .

- Par exemple, dans le cas où  $N_0 = M_0 + 1$ , comme illustré en figures 5, 6A, 6B et 7 pour  $M_0 = 5$ , une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  est obtenue par le produit de  $m$  matrices para-unitaires élémentaires identiques  $\hat{B}(z)$ . Comme démontré en annexe F, qui fait partie intégrante de la description, on peut en effet  
 15 écrire  $V^{(i)}(z) = \hat{B}^m(z)U_0$ .

Les matrices élémentaires  $\hat{B}$  s'écrivent par exemple sous la forme suivante :

$$\hat{B}(z) = Z_{M_0+1} \prod_{i=1}^{M_0} [R_{i, M_0+1} Z_{M_0+1}]$$

- où  $Z_{N_0} = Z_{M_0+1}$  est une matrice carrée diagonale assurant un décalage et  
 20  $R_{i, M_0+1}$  une matrice de rotations, tel que décrit en annexe F. On note que les rotations de la matrice de rotations  $R_{i, M_0+1}$  sont indépendantes les unes des autres, ce qui signifie que le fait de modifier l'une des rotations dans la matrice  $R_{i, M_0+1}$  n'entraîne pas de modification des autres rotations dans la matrice  $R_{i, M_0+1}$ .

- 25 Comme décrit en annexe E, paragraphe 5.4, il est possible d'utiliser une représentation paramétrique des matrices para-unitaires, permettant de représenter ces matrices au moyen d'angles et de décalages. Du fait de l'indépendance des angles et des paramètres, le modulateur et le démodulateur ainsi construits permettent une reconstruction parfaite des données source ( $x(n) = \hat{x}(n)$ ), y

compris dans le cas où les angles de rotations sont quantifiés. En d'autres termes, le modulateur et le démodulateur ainsi construits permettent de préserver l'orthogonalité des porteuses, même si les angles des rotations sont modifiés.

Les figures 8A et 8B illustrent un exemple de filtre prototype à réponse  
 5 impulsionnelle finie obtenu selon ce mode de réalisation, optimisé pour minimiser l'énergie hors-bande, pour un système de taille  $M = 60$  et  $N = 72$ , avec  $M$  le nombre de porteuses et  $N$  le facteur d'expansion, et les paramètres suivants  $M_0 = 5$ ,  $N_0 = 6$ ,  $\Delta = 12$ , et  $m = 4$ .

La figure 8A illustre la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du filtre prototype,  
 10 permettant de déterminer la valeur de ses coefficients, et la figure 8B illustre l'amplitude du filtre (en dB) en fonction de la fréquence (réponse fréquentielle).

Finalement, l'annexe E, paragraphe 5.8, présente le nombre de solutions obtenues, pour différents triplets de paramètres  $(M_0, N_0, m)$ .

Par exemple, pour le triplet  $(4, 5, 2)$ , on obtient un ensemble de 61  
 15 solutions pour l'implémentation des matrices de décomposition, dont sept solutions présentent une dimension égale à 12, et quatre solutions présentent une dimension égale à 4.

Ainsi, l'annexe E présente un ensemble exhaustif de solutions tel qu'aucune solution n'est contenue dans une autre et chaque solution est définie  
 20 avec un nombre minimal de paramètres angulaires (appelé dimension de cette solution), pour quelques valeurs du triplet  $(M_0, N_0, m)$ .

« Nombre minimal de paramètres » signifie donc que dans chaque structure de réalisation le nombre de rotations nécessaire mis en oeuvre ne peut plus être réduit.

### 25      **5.3    Autres caractéristiques et avantages de l'invention**

Selon au moins un mode de réalisation, l'invention permet :

- d'obtenir les solutions angulaires paramétriques permettant la réalisation structurelle, au niveau du modulateur et du démodulateur, de la condition de reconstruction parfaite ;
- 30      – l'adéquation des solutions proposées à l'utilisation de la méthode de

- représentation compacte (telle que rappelée en annexe E, paragraphe 5.6) pour déterminer les paramètres angulaires de la structure ou de la fonction prototype, et partant à l'optimisation de systèmes de modulation/démodulation de taille arbitraire, même pour un nombre  $\Delta$
- 5 élevé ;
- l'obtention de structures régulières qui fournissent des solutions pour toutes les valeurs des paramètres  $(M_0, N_0, m)$  ;
  - d'obtenir un système de transmission multiporteuse de type OFDM ayant une efficacité spectrale comparable à celle d'un système OFDM à
  - 10 préfixe cyclique (CP) de valeur réduite c'est-à-dire inférieure à 25% ;
  - de travailler en temps discret, ce qui permet l'application directe des filtres ainsi construits dans les modulateurs/démodulateurs, notamment sous forme numérique ;
  - une interprétation matricielle des systèmes à reconstruction parfaite
  - 15 permettant de déduire directement des structures de réalisation génériques et régulières ;
  - d'obtenir, pour toute valeur du triplet  $(M_0, N_0, m)$ , des familles de solutions de dimension minimale ou maximale ;
  - d'obtenir un ensemble de solutions vérifiant les propriétés suivantes :
  - 20
    - chaque solution est décrite à l'aide d'un nombre minimal de paramètres angulaires indépendants ;
    - aucune solution n'est contenue dans une autre, et en particulier deux solutions différentes ne sont pas équivalentes ;
  - 25
    - toute matrice para-unitaire, solution du problème posé, appartient à une solution au moins.

Ainsi, il est possible d'obtenir selon un mode de réalisation de l'invention un modulateur et/ou un démodulateur dans lequel les  $\Delta$  étages (ou sous-blocs de filtrage polyphase des bancs modulés DFT sont réalisés à l'aide d'un nombre

30 minimal de paramètres angulaires indépendants.

Par exemple, pour  $N_0 = M_0 + 1$ , il est possible d'obtenir l'ensemble des solutions pour des longueurs de filtre prototype  $L = m\Delta N_0 M_0$  incluant les cas suivants :

- $m = 1, \dots, 5$  pour  $M_0 = 2$  ;
- 5      –  $m = 1, \dots, 4$  pour  $M_0 = 3$  ;
- $m = 1, \dots, 3$  pour  $M_0 = 4$  ;
- $m = 1, 2$  pour  $M_0 = 5$  ;
- $m = 1$  pour  $M_0 = 6$ .

En particulier, pour des valeurs de paramètres  $M_0 = 2$ ,  $N_0 = 3$  et un filtre  
 10 prototype de longueur  $L = 6m\Delta$ , on obtient un ensemble de  $3m - 1$  solutions.  
 Pour  $M_0$  impair,  $N_0 = M_0 + 1$  et un filtre prototype de longueur  $L = m\Delta N_0 M_0$ ,  
 on obtient la solution de dimension maximale. Pour  $M_0$  pair quelconque,  
 $N_0 = M_0 + 1$  et un filtre prototype de longueur  $L = m\Delta N_0 M_0$ , on obtient les  
 $m - 1$  solutions de dimension maximale. Pour tout  $M_0$ ,  $N_0 = M_0 + 1$  et  $m$   
 15 quelconque, on construit une solution à dimension minimale  $mM_0$ .

Selon un autre mode de réalisation, par dualité, l'invention permet également la réalisation d'un banc de filtres uniforme à  $N$  sous bandes et suréchantillonnage rationnel  $\frac{N_0}{M_0}$ .

# 1 ANNEXE A : La modulation OFDM

Pour une modulation OFDM sur  $M$  porteuses on veut transmettre des symboles complexes de données  $c_{m,n}$  ( $m \in \mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\}$  et  $n \in \mathbf{Z}$ ). Les représentations usuelles pour ces symboles correspondent aux alphabets utilisés pour les modulations d'amplitude comme la QAM (en anglais "Quadrature Amplitude Modulation") ou encore la PSK (en anglais "Phase Shift Keying") et sa variante en codage différentiel la DPSK. Le signal OFDM s'écrit en bande de base :

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} f_{m,n}(t), \quad (1)$$

avec

$$f_{m,n}(t) = f(t - nT_0) e^{j2\pi m F_0 t} \quad (2)$$

et

- $f(t)$  une fonction de carré intégrable appelée en général fonction prototype ;
- $T_0$  durée symbole ;
- $F_0$  espacement entre deux porteuses successives ;
- $j^2 = -1$ .

Ainsi définie,  $(f_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{I} \times \mathbf{Z}}$  constitue une famille de Gabor. Le but est de retrouver les symboles  $c_{m,n}$  à partir du signal  $s(t)$ . Ceci est possible si et seulement si  $(f_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{I} \times \mathbf{Z}}$  constitue une famille libre. Ainsi, la densité  $d = \frac{1}{F_0 T_0}$  doit être inférieure ou égale à 1 pour pouvoir démoduler le signal. Or l'efficacité spectrale  $\eta$ , qui mesure le débit binaire par unité de temps et de fréquence, est liée à la densité par la relation  $\eta \approx bd$ .

On en déduit que l'efficacité spectrale est maximale lorsque  $d = 1$ , i.e.  $F_0 = 1/T_0$ . Dans ce cas, le théorème de Balian-Low indique que  $f(t)$  est une fonction nécessairement mal localisée dans le plan temps-fréquence, c'est pourquoi on peut être amené à réduire l'efficacité spectrale en prenant  $d < 1$ . On dit alors que le système est à densité sous-critique.

Pour reprendre la convention d'écriture de [1], référencé en Annexe G, on peut représenter un système OFDM par le triplet  $(f, T_0, F_0)$  et on dira qu'un système OFDM est orthogonal si

$$\langle f_{m,n}, f_{m',n'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ et } n = n' \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3)$$

La condition d'orthogonalité n'est pas indispensable pour retrouver exactement les symboles de données  $c_{m,n}$  après démodulation. Ainsi dans le cas d'un système dit biorthogonal une famille de fonctions de Gabor différente de celle de l'émission peut être utilisée à la réception. Dans ce cas il faut déterminer un couple de fonctions de Gabor, par exemple

$f_{m,n}$  et  $g_{m,n}$  qui vérifie la condition (3). Par contre en présence d'un bruit blanc additif gaussien (AWGN) c'est la solution orthogonale qui assure que le taux d'erreur sera minimal.

Par le théorème de Balian-Low on sait qu'il est impossible de trouver un triplet  
 5  $(f, T_0, F_0)$ , ou un quadruplet  $(f, g, T_0, F_0)$  dans le cas biorthogonal, qui vérifie simultanément les trois conditions suivantes :

1. Les fonctions  $f_{m,n}$  sont orthogonales (ou la paire  $f_{m,n}, g_{m,n}$  est biorthogonale) ;
2. La fonction  $f$  est bien localisée en temps et en fréquence (ou les fonctions  $f$  et  $g$  sont toutes deux bien localisées en temps et en fréquence) ;
- 10 3.  $T_0 F_0 = 1$ .

Ainsi dans le cas de l'OFDM de base,  $T_0 F_0 = 1$  mais la fonction prototype est alors une fonction porte mal localisée en fréquence.

De ce fait les deux seules alternatives de type OFDM sont

- L'OFDM/OQAM qui, en relâchant la contrainte d'orthogonalité en la limitant au  
 15 corps des réels par la technique Offset-QAM (OQAM), permet l'introduction de formes d'ondes bien localisées en temps et en fréquence, tout en conservant une efficacité spectrale maximale ;
- L'OFDM à densité sous critique qui introduit une perte d'efficacité spectrale proportionnelle à  $1/d$ .

## 2 ANNEXE B : L'OFDM suréchantillonné

Pour obtenir un système de modulation numérique à partir des expressions mathématiques du signal (1, 2), on peut soit procéder par un simple échantillonnage, soit utiliser directement la théorie des familles de Weyl-Heisenberg. Le lien entre les formulations  
 5 temps-continu et temps-discret, peut se faire en choisissant une période d'échantillonnage telle que la densité s'écrive  $d = \frac{M}{N}$ . De ce fait  $N > M$  si bien que pour transmettre  $M$  symboles de données  $N$  échantillons sont nécessaires, on parlera donc de système OFDM suréchantillonné. Au final le signal discret de l'OFDM suréchantillonné s'exprime sous la forme

$$s[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} f_{m,n}[k], \quad (4)$$

10 avec

$$f_{m,n}[k] = f[k - nN] e^{j \frac{2\pi}{M} m (k - \frac{D}{2})} e^{j \psi_{m,n}} \quad (5)$$

Dans cette dernière expression

- $f[k]$  représente le filtre prototype que l'on supposera l'impulsionnelle finie (RIF) de longueur  $L$ ;
- $D$  est un paramètre lié au retard de traitement introduit par le système. Dans le  
 15 cas orthogonal  $D = L - 1$ .
- $\psi_{m,n}$  est un terme de phase qui va également nous permettre de décrire le détail d'une réalisation causale d'un modem (ou modulateur-démodulateur) OFDM suréchantillonné.

La condition d'orthogonalité s'écrit alors sous la forme

$$\langle f_{m,n}, f_{m',n'} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,n}^*[k] f_{m',n'}[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ et } n = n' \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6)$$

20 Si cette condition est réalisée à la démodulation nous obtenons

$$\hat{c}_{m,n} = \langle f_{m,n}, s \rangle_{l_2(\mathbb{Z}), \mathbb{C}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,n}^*[k] s[k] = c_{m,n} \quad (7)$$

Notons à ce stade que le terme de phase  $\psi_{m,n}$  n'a pas d'influence sur la condition d'orthogonalité (6). Deux remarques s'imposent également pour ce qui concerne la terminologie.

- Si on se réfère à [1], référencé en Annexe G, tout système modulé par des fonctions  
 25 de Gabor défini par un triplet  $(f, T_0, F_0)$  est un système OFDM.
- Dans la version à temps-discret, la notion de suréchantillonnage apparaît explicitement et l'on parle alors d'OFDM suréchantillonné. Toutefois un risque de confusion

est toujours possible car le terme OFDM suréchantillonné est également utilisé pour des systèmes OFDM (ou CP-OFDM) où le signal modulé est obtenu pour  $N = M$  (avec éventuellement l'ajout d'un préfixe cyclique ou CP) et où l'opération de sur-échantillonnage s'effectue sur le signal modulé ou sur le signal reçu.

### 3 ANNEXE C : Transmultiplexeur de l'OFDM sur-échantillonné

#### 3.1 Rappels

Les équations (4) et (5) peuvent se réécrire en faisant apparaître un banc de filtres  
 5 de synthèse à  $M$  sous-bandes ayant un facteur d'expansion égal à  $N$  constitué des filtres  $F_m(z)$  de réponses impulsionnelles :

$$f_m[k] = f[k]e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D}{2})}, \quad (8)$$

à condition d'imposer que  $\psi_{m,n} = -\frac{2\pi}{M}mnN$ , et en appliquant les entrées  $c_{m,n}$  au banc ainsi formé. On obtient alors

$$s[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{m,n} f_m[k - nN]. \quad (9)$$

Considérons maintenant la démodulation. Elle est donnée par l'équation (7). Comme  
 10 on a posé  $\psi_{m,n} = -\frac{2\pi}{M}mnN$ , la démodulation s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{c}_{m,n} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^*[k - nN] e^{-j\frac{2\pi}{M}(k-nN-\frac{D}{2})} s[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^*[D - k] e^{-j\frac{2\pi}{M}(\frac{D}{2}-k)} s[D + nN - k]. \end{aligned} \quad (10)$$

Pour gérer le délai de traitement  $D$ , on définit les entiers  $a$  et  $b$ ,  $a \geq 1$  et  $0 \leq b \leq N - 1$  par

$$D = aN - b. \quad (11)$$

Ainsi  $a = \lceil D/N \rceil$  et  $b = \lceil D/N \rceil N - D$ . En supposant que la famille  $\{f_{m,n}\}$  constitue une base de l'espace qu'elle engendre, l'équation (10) se réécrit alors

$$\hat{c}_{m,n} = c_{m,n-a} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^*[D - k] e^{-j\frac{2\pi}{M}(\frac{D}{2}-k)} s[nN - k - b]. \quad (12)$$

15 En rapprochant cette équation de la relation d'entrée sortie d'un banc d'analyse, on en conclut que la démodulation peut être effectuée avec un retard de  $a$  échantillons à l'aide d'un banc d'analyse à  $M$  sous-bandes, avec un facteur de décimation égal à  $N$  et constitué des filtres d'analyse  $H_m(z)$  de réponses impulsionnelles

$$h_m[k] = h[k]e^{j\frac{2\pi}{M}(k-\frac{D}{2})}, \quad (13)$$

à condition de poser  $h[k] = f^*[D - k]$  et d'appliquer l'entrée  $s[k - b]$  au banc ainsi  
 20 constitué. Le modem OFDM/QAM à temps discret peut donc être réalisé à l'aide d'un transmultiplexeur ainsi que le décrit la figure 1.

Les transmultiplexeurs de type OFDM suréchantillonnés ont été introduits dans [2], référencé en Annexe G, en tant que systèmes duaux des bancs de filtres suréchantillonnés. Dans le brevet [3], au nom du même Demandeur, les conditions de causalité, qui se traduisent par les paramètres  $a$  et  $b$  dans la figure 1, sont également introduites.

### 5 3.2 Schéma de réalisation efficace

La réalisation directe du modem OFDM/QAM à l'aide du transmultiplexeur de la figure 1 serait très coûteuse en termes de calculs. En effet, à l'émission et à la réception, elle fait intervenir  $M$  filtres de longueur  $L$ . De plus, ces filtrages sont effectués à une cadence  $N$  fois plus grande que la cadence d'émission des symboles  $c_{m,n}$ , d'où l'idée d'employer  
 10 un filtrage polyphase pour réduire le coût opératoire du modem. Dans le brevet [3], il a été montré comment obtenir des schémas à base de transformation rapide pour du BFDM. Comme il s'agit d'un cas particulier, on redonne simplement ici les grandes lignes permettant d'aboutir à ce type de schéma.

On définit tout d'abord les entiers  $N_0$  et  $M_0$  par :

$$N_0 M = M_0 N = \text{lcm}(M, N). \quad (14)$$

15 avec lcm le plus petit multiple commun.

On utilise aussi les décompositions polyphases de type I des prototypes d'émission et de réception :

$$F(z) = \sum_{l=0}^{N_0 M - 1} z^{-l} K_l(z^{N_0 M}), \quad (15)$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{N_0 M - 1} z^{-l} G_l(z^{N_0 M}), \quad (16)$$

avec :

$$K_l(z) = \sum_n f[l + n N_0 M] z^{-n}, \quad (17)$$

$$G_l(z) = \sum_n h[l + n N_0 M] z^{-n}, \quad (18)$$

$$(19)$$

Après quelques calculs, on obtient ainsi les schémas du modulateur et du démodulateur illustrés dans les figures du brevet [3]. Plusieurs variantes ont alors été proposées utilisant soit FFT ou IFFT à l'émission et à la réception.

Dans ces schémas, entrées et sorties sont notées dans le domaine transformé en  $z$ ,  
 20 tandis que  $\Pi$  correspond à un bloc de permutation.

## 4 ANNEXE D : Reconstruction

### 4.1 Les conditions de reconstruction parfaite

Les conditions de reconstruction parfaite du système OFDM/QAM, ont été déjà démontrées dans le brevet [3] dans le cas BFDM. Ensuite sur la base d'un théorème dit de décomposition, elles ont été précisées pour le cas orthogonal dans [4]. Pour les exprimer, nous définissons tout d'abord l'expression

$$d_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est un multiple de } n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (20)$$

Nous notons ensuite par  $\Delta$  le PGCD ("Plus Grand Commun Diviseur") de  $N$  et de  $M$ , i.e  $N = \Delta N_0$ ,  $M = \Delta M_0$ . Nous notons  $G_{l,p}(z) = G_{l\Delta+p}(z)$ . Pour un filtre prototype de longueur  $L = mN_0M = m\Delta N_0M_0$ , nous pouvons alors montrer, par un théorème dit de décomposition [4], que les conditions de reconstruction parfaite se ramènent à  $\Delta$  systèmes indépendants, tels que

$$\sum_{n=0}^{n_{l,\lambda}} G_{nM_0+l}^{(p)}(z) \tilde{G}_{(M_0-\lambda)N_0+nM_0+l}^{(p)}(z) + z^{-1} \sum_{n=n_{l,\lambda}+1}^{N_0-1} G_{nM_0+l}^{(p)}(z) \tilde{G}_{nM_0+l-\lambda N_0}^{(p)}(z) = \frac{1}{2M_0} d_{\lambda,M_0},$$

$$l = 0, \dots, M_0 - 1, \quad \lambda = 1, \dots, M_0, \quad (21)$$

où  $G_l^{(p)}(z) = G_{l,p}(z)$  et où  $\tilde{\cdot}$  désigne le paraconjugué d'une expression en  $z$ , ce qui dans le cas d'une fonction polynomiale à coefficients réels se traduit par exemple par l'égalité  $\tilde{G}(z) = G(z^{-1})$ .

### 4.2 Les critères d'optimisation

Le choix du critère d'optimisation des filtres prototypes dépend en général du type d'application envisagé. Dans le cas d'un système de transmission dans un canal statique comme celui de l'ADSL ("Asymmetric Digital Subscriber Line"), un choix usuel est de minimiser l'énergie hors-bande. Pour les canaux de type radio-mobile le modèle de modélisation correspond à un filtre variant dans le temps, le canal est alors dispersif en temps et fréquence. Dans ce cas, où la dimension temporelle et fréquentielle sont également importantes, le critère de localisation temps-fréquence est actuellement le critère de référence. C'est par exemple le cas dans [1], référencé en Annexe G.

#### 4.2.1 La localisation temps-fréquence

Pour un signal discret  $x$ , nous utilisons une mesure de localisation discrète, notée  $\xi$  telle que

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\mathfrak{m}_2(x)\mathfrak{M}_2(x)}}. \quad (22)$$

où les quantités  $\mathfrak{m}_2(x)$  et  $\mathfrak{M}_2(x)$  correspondent respectivement aux moments d'ordre 2 temporels et fréquentiels tels que les a défini Doroslovački [5].

#### 4.2.2 La minimisation de l'énergie hors-bande

Le second critère que nous considérons est celui de la minimisation de la norme pondérée de l'erreur, notée  $E(\nu)$ , en fréquence. Pour une fonction de pondération, notée  $W(\nu)$ , la fonction objectif s'écrit

$$J_W = \int_0^{\frac{1}{2}} W(\nu) \|E(\nu)\|^2 d\nu \quad (23)$$

Dans le cas présent nous choisissons une fonction de pondération constante dans chaque intervalle définissant les bandes, passe-bas et passe-haut, du filtre passe-bas prototype. Pour un filtre prototype  $p$ , dont la transformée de Fourier est  $P(\nu)$ , la fonction à minimiser s'écrit alors

$$J_{\alpha,\rho} = \alpha \int_0^{f_p} |1 - P(\nu)|^2 d\nu + (1 - \alpha) \int_{f_s}^{\frac{1}{2}} |P(\nu)|^2 d\nu \quad (24)$$

où  $\alpha$  et  $\rho$  sont deux nombres réels compris entre 0 et 1, avec  $\alpha$  le paramètre de pondération et  $\rho$  le facteur de retombée ("roll-off"), qui détermine en partie les limites des bandes passante,  $f_p$ , et atténuée,  $f_s$ . Ainsi pour un système comportant  $2M$  porteuses (ou sous-bandes), nous avons

$$f_p = (1 - \rho) \frac{1}{4M} \text{ et } f_s = (1 + \rho) \frac{1}{4M} \quad (25)$$

Comme l'effet de la contrainte de reconstruction parfaite favorise un bon comportement dans la bande passante, nous choisissons de prendre  $\alpha = 1$ .

## 5 ANNEXE E : Démonstrations

### 5.1 Principe de résolution

Notons par  $P(z)$  le filtre à réponse impulsionnelle finie FIR appelé filtre prototype. Pour une modulation exponentielle, le banc d'analyse à  $N$  sous-bandes et à facteur de dé-  
 5 cimation  $M$ , représenté à la figure 2A, comprend  $N$  filtres d'analyse  $H_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  tels que

$$H_i(z) = P(\omega^i z), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (26)$$

où  $\omega$  est la racine  $N$ -ième de l'unité,  $\omega = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , connectés à  $N$  décimateurs d'ordre  $M$ .

Les composantes polyphase d'ordre  $MN_0$  de  $P(z)$  sont notées par  $V_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, MN_0$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{MN_0-1} z^{-i} V_i(z^{MN_0}), \quad (27)$$

et pour  $i = 0, \dots, N-1$  les composantes polyphase d'ordre  $M$  de  $H_i(z)$  sont notées  $H_{ij}(z)$

10 avec

$$H_i(z) = \sum_{j=0}^{M-1} z^{-j} H_{ij}(z^M). \quad (28)$$

En utilisant les équations (26), (27), (28) et la relation  $MN_0 = NM_0$ , nous en déduisons que

$$H_{ij}(z) = \sum_{l=0}^{N_0-1} z^{-l} \omega^{-i(j+lM)} V_{j+lM}(z^{N_0}), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1. \quad (29)$$

La matrice polyphase du banc de filtres d'analyse est une matrice de taille  $N \times M$  ayant pour éléments les  $H_{ij}(z)$ . Comme le montre la figure 2B, pour un signal  $x(n)$ , de  
 15 transformée en  $z$  notée  $X(z)$ , le traitement produit par le banc d'analyse correspond au produit matriciel  $H(z)\hat{X}(z)$  où  $\hat{X}(z)$  est une matrice colonne  $M \times 1$  telle que

$$\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} X(z) \\ z^{-1}X(z) \\ \vdots \\ z^{1-M}X(z) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Comme l'a déjà montré Rima Hleiss [2], la matrice  $\mathbf{H}(z)$  se factorise sous la forme

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{F}_N \mathbf{V}(z), \quad (31)$$

où  $\mathbf{F}_N$  est la matrice de Fourier de dimensions  $N \times N$  et la matrice  $\mathbf{V}(z)$  de dimensions

$N \times M$  est le produit

$$\mathbf{V}(z) = [\mathbf{I}_N, \dots, \mathbf{I}_N] \text{ diag } (V_0(z^{N_0}), V_1(z^{N_0}), \dots, V_{MN_0-1}(z^{N_0})) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ z^{-1}\mathbf{I}_M \\ \vdots \\ z^{N_0-1}\mathbf{I}_M \end{bmatrix}, \quad (32)$$

où  $\mathbf{I}_n$  désigne la matrice identité de taille  $n$ . La matrice des  $\mathbf{I}_N$  contient  $M_0$  exemplaires concaténés horizontalement et celle des  $\mathbf{I}_M$  contient  $N_0$  exemplaires concaténés verticalement.

- 5 Le problème à résoudre est de déterminer les structures de réalisation les plus appropriées pour l'implémentation de la matrice  $\mathbf{H}(z)$  dans le cas de la modulation exponentielle et pour différentes valeurs de  $M_0, N_0, \Delta$  et  $m$ . Le principe de résolution se base sur des équivalences entre la paraunitarité de matrices polyphase et la condition de reconstruction parfaite. La démonstration est donc liée à la mise en évidence de propriétés spécifiques qui  
10 sont ensuite utilisées pour produire de nouveaux schémas de réalisation pour les bancs de filtres suréchantillonnés.

## 5.2 Matrices associées au filtre prototype pour $\Delta = 1$

Le problème de la reconstruction parfaite (RP) peut se ramener à  $\Delta$  systèmes indépendants. On étudie plus particulièrement un système élémentaire dans le cas où  $\Delta = 1$ .

- 15 Soit  $M_0 \geq 1$ ,  $N_0 > M_0$  et  $\text{gcd}(M_0, N_0) = 1$ , pour chaque  $a$  tel que  $0 \leq a \leq M_0N_0 - 1$ , nous pouvons déterminer par division euclidienne des entiers uniques  $k$  et  $p$  tels que

$$a = k + pN_0, \quad 0 \leq k < N_0, \quad 0 \leq p < M_0. \quad (33)$$

ou encore

$$a = l + qM_0, \quad 0 \leq l < M_0, \quad 0 \leq q < N_0. \quad (34)$$

(avec  $\text{gcd}$  le "greatest common divisor" ou plus grand diviseur commun).

Puisque  $M_0$  et  $N_0$  sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe une unique paire d'entiers  $(u, v)$  telle que :

$$uM_0 - vN_0 = 1, \quad \text{avec } |u| < N_0, |v| < M_0.$$

- A nouveau par division euclidienne, il est également possible de montrer que étant  
20 donné  $k$  et  $l$  avec  $0 \leq k < N_0$ ,  $0 \leq l < M_0$ , il existe des entiers uniques  $p(k, l), q(k, l)$  et  $a(k, l)$  tels que

$$q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0), \quad (35)$$

$$p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0), \quad (36)$$

$$a(k, l) = k + p(k, l)N_0 = l + q(k, l)M_0. \quad (37)$$

où  $\text{rem}(u, v)$  correspond au reste de la division de  $u$  par  $v$ .

Nous définissons également l'entier  $\beta(k, l)$  tel que

$$p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l)M_0, \quad (38)$$

$$q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l)N_0. \quad (39)$$

et l'entier  $\alpha(k)$  tel que  $\alpha(k) = 0$  si  $M_0$  divise  $k$  et 1 autrement.

Nous pouvons de ce fait introduire un entier  $\varepsilon(k, l)$  tel que  $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Dans le cas où  $N_0 = M_0 + 1$ , cas particulier d'intérêt pratique important, on peut montrer que :

$$\varepsilon(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = bM_0 + k_0, 0 < k_0 < M_0, l < k_0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (40)$$

avec  $b$  un entier quelconque.

Toutes ces notations nous permettent d'exprimer la décomposition polyphase du prototype  $P(z)$ , correspondant au cas où  $\Delta = 1$ , de la manière suivante

Les paramètres  $M_0, N_0$  sont tels que  $M_0 < N_0$ ,  $\text{gcd}(M_0, N_0) = 1$ , et le filtre prototype  $P(z)$  est supposé FIR. Nous notons par  $P_a(z), a = 0, \dots, M_0N_0 - 1$  les composantes polyphase d'ordre  $M_0N_0$  de  $P(z)$ , i.e.

$$P(z) = \sum_{a=0}^{M_0N_0-1} z^{-a} P_a(z^{M_0N_0}). \quad (41)$$

La matrice  $\mathbf{V}_P(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$  est définie par

$$[\mathbf{V}_P(z)]_{k+1, l+1} = z^{-q(k, l)} P_{a(k, l)}(z^{N_0}), \quad 0 \leq k < N_0, \quad 0 \leq l < M_0. \quad (42)$$

et la matrice  $\mathbf{U}_P(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$  est définie par

$$[\mathbf{U}_P(z)]_{k+1, l+1} = z^{-\varepsilon(k, l)} P_{a(k, l)}(z), \quad 0 \leq k < N_0, \quad 0 \leq l < M_0. \quad (43)$$

On note par  $\mathbf{T}_1(z)$  la matrice diagonale carrée de taille  $N_0$  dont le  $(k+1)$ -ième élément est  $z^{-q(k, 0) + \alpha(k)N_0}$ ,  $0 \leq k < N_0$  et par  $\mathbf{T}_2(z)$  la matrice diagonale carrée de taille  $M_0$  avec pour  $(l+1)$ -ième élément  $z^{-q(0, l)}$ ,  $0 \leq l < M_0$ . A partir de la relation (39) et de la définition de la fonction  $\varepsilon(k, l)$ , on peut montrer que

$$\mathbf{V}_P(z) = \mathbf{T}_1(z) \mathbf{U}_P(z^{N_0}) \mathbf{T}_2(z). \quad (44)$$

### 5.3 Structure de réalisation utilisant la décomposition

Dans le cas général  $\Delta > 1$  et le filtre prototype va s'écrire sous la forme

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\Delta-1} z^{-i} P_i(z^\Delta). \quad (45)$$

avec pour tout  $i = 0, \dots, \Delta - 1$ ,

$$P_i(z) = \sum_{a=0}^{M_0 N_0 - 1} z^{-a} V_{a\Delta+i}(z^{M_0 N_0}) . \quad (46)$$

La relation (44) peut se généraliser de la manière qui suit

$$\mathbf{V}_P^{(i)}(z) = \mathbf{T}_1(z) \mathbf{U}^{(i)}(z^{N_0}) \mathbf{T}_2(z) , \quad i = 0, \dots, \Delta - 1 . \quad (47)$$

De manière à rendre contigües les lignes et les colonnes de  $\mathbf{V}(z)$  dont les indices ont même reste dans la division euclidienne par  $\Delta$ , on introduit la permutation  $\sigma_N$  sur l'ensemble  $\{0, \dots, N - 1\}$  définie par

$$\sigma_N(qN_0 + r) = r\Delta + q, \quad 0 \leq r < N_0, \quad 0 \leq q < \Delta , \quad (48)$$

et la permutation  $\sigma_M$  sur l'ensemble  $\{0, \dots, M - 1\}$  définie par

$$\sigma_N(qM_0 + r) = r\Delta + q, \quad 0 \leq r < M_0, \quad 0 \leq q < \Delta . \quad (49)$$

On note alors  $\mathbf{P}$  la matrice de permutation de dimension  $N$  correspondant à  $\sigma_N$  définie par

$$\mathbf{P}_{i+1j+1} = 1, \quad 0 \leq i < N, \quad 0 \leq j < N \text{ si } j = \sigma_N(i) \text{ et } 0 \text{ sinon.} \quad (50)$$

Puisque  $N = \Delta N_0$ , la matrice de Fourier  $\mathbf{F}_N$  admet une décomposition tenant compte de la nature composite de  $N$ .

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_\Delta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{F}_\Delta \end{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{N_0} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{F}_{N_0} \end{bmatrix} \mathbf{P} , \quad (51)$$

où la matrice diagonale de blocs  $\mathbf{F}_{N_0}$  en contient  $\Delta$ , celle de blocs  $\mathbf{F}_\Delta$  en contient  $N_0$  et  $\mathbf{D}$  est la matrice diagonale dont l'élément de ligne et colonne  $i + 1$  est  $\omega^{qr}$  si  $i = q\Delta + r$ .

La figure 2B produit alors le schéma représenté à la figure 3 où chacune des composantes  $\Delta$ -polyphase du filtre prototype  $P(z)$  intervient dans ce diagramme pour définir un banc modulé à  $N_0$  sous-bandes avec un facteur de décimation égal à  $M_0$ . A noter que dans ce schéma :

- La matrice  $\mathbf{P}$  est notée  $\Pi$ ;
- L'impact de la dernière matrice  $\mathbf{P}$  dans l'expression (51) est prise implicitement en compte dans le ré-ordonnancement des blocs matriciels  $\mathbf{V}^{(i)}(z)$ .

De la manière on peut déduire le banc de synthèse représenté à la figure 4.

## 5.4 Quelques caractéristiques des solutions obtenues

Dans toute cette étude, on considère des filtres réels à réponse impulsionnelle finie (FIR), c'est-à-dire les polynômes réels en la variable  $z^{-1}$ .

Si  $\mathbf{A}(z)$  est une matrice à  $N$  lignes et  $M$  colonnes dont les éléments sont des filtres, on note  $\tilde{\mathbf{A}}(z)$  la matrice à  $M$  lignes et  $N$  colonnes dont les éléments sont donnés par

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}(z)\right]_{i,j} = \left[\mathbf{A}(z^{-1})\right]_{j,i}, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (52)$$

Une matrice paraunitaire est une matrice  $\mathbf{A}(z)$ , avec  $M \leq N$ , vérifiant

$$\tilde{\mathbf{A}}(z)\mathbf{A}(z) = \mathbf{I}_M, \quad (53)$$

où  $\mathbf{I}_M$  est la matrice unité de dimension  $M$ .

La théorie des bancs de filtres modulés suréchantillonnés à reconstruction parfaite et celle des transmultiplexeurs OFDM/QAM suréchantillonnés possédant la propriété de reconstruction parfaite conduisent toutes deux à l'utilisation de matrices paraunitaires avec  $M$  et  $N$  premiers entre eux. Le théorème de décomposition est le résultat de base dans cette réduction.

Lorsqu'il s'agit d'utiliser des matrices paraunitaires et par exemple de faire une optimisation sur l'ensemble de ces matrices, on peut choisir de représenter ces matrices par leurs coefficients. Mais on doit dans ce cas imposer aux coefficients de vérifier les contraintes résultant de l'équation matricielle (53). Il est préférable d'utiliser une représentation paramétrique de l'ensemble des matrices paraunitaires à l'aide d'un ensemble de paramètres indépendants, représentation qui implique automatiquement que l'équation (53) est vérifiée. Par exemple, une matrice paraunitaire constante avec  $M = N$  est simplement une matrice orthogonale et l'on sait bien représenter ces matrices à l'aide de  $M(M-1)/2$  angles et d'un paramètre discret qui est le signe du déterminant (généralisation des angles d'Euler).

La référence [4] donne un ensemble de représentations paramétriques de la classe particulière de matrices paraunitaires qui intervient pour les transmultiplexeurs modulés OFDM/QAM à reconstruction parfaite. Cette méthode repose sur une analyse du système d'équations algébriques obtenu à partir de l'équation (53).

## 5.5 Reconstruction parfaite sous forme matricielle

Par rapport à [4] la réécriture des équations de reconstruction parfaite (RP) avec des équivalences sous forme matricielle est un élément important dans l'élaboration des solutions décrites par la suite.

Pour un filtre prototype  $P(z)$  donné, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) La matrice  $V(z)$  est paraunitaire.  
 (b) Les matrices  $V^{(i)}(z)$  sont paraunitaires pour  $i = 0, \dots, \Delta - 1$ .  
 (c) Les matrices  $U^{(i)}(z)$  sont paraunitaires pour  $i = 0, \dots, \Delta - 1$ .  
 (d) Les relations suivantes sont vérifiées par les composantes  $MN_0$ -polyphases  $V_i(z)$   
 5 du filtre  $P(z)$

$$\sum_{n=0}^{n_{l,\lambda}} V_{nM_0+l}(z) \tilde{V}_{(M_0-\lambda)N_0+nM_0+l}(z) + z^{-1} \sum_{n=n_{l,\lambda}+1}^{N_0-1} V_{nM_0+l}(z) \tilde{V}_{nM_0+l-\lambda N_0}(z) = d_{\lambda, M_0}$$

$$l = 0, \dots, M_0 - 1, \lambda = 1, \dots, M_0 \quad (54)$$

avec  $n_{l,\lambda} = \lfloor \frac{\lambda N_0 - 1 - l}{M_0} \rfloor$  et où  $d_{mn}$  est le symbole de congruence.

A noter dans ces équivalences que les matrices  $U^{(i)}(z)$  et  $V^{(i)}(z)$  se déduisent des relations (42) et (43) décrites dans le cas  $\Delta = 1$  et que dans le cas général ces matrices sont liées par la relation (47). Aussi différemment de [3, 4] les symboles  $U$  et  $V$  sont utilisés  
 10 au lieu de  $K$  et  $G$  pour noter les composantes polyphases ce qui explique la différence entre (54) et (21).

## 5.6 Symétrie et filtre prototype à phase linéaire

Rappelons que les composantes  $MN_0$ -polyphases du filtre prototype sont de degré  $m - 1$  avec  $m \geq 1$ . Le filtre  $P(z)$  est alors de longueur  $L = M_0 N_0 \Delta m$  et de degré  $L - 1$   
 15 en  $z^{-1}$ .

Le symétrique du filtre prototype  $P(z)$  pour les paramètres  $(M_0, N_0, \Delta, m)$  est noté par définition  $\sigma_L(P)(z)$ . Ses composantes polyphase d'ordre  $MN_0$ , notées  $W_i(z), i = 0, \dots, MN_0 - 1$ , sont reliées aux composantes polyphase  $V_i(z)$  d'ordre  $MN_0$ -polyphase de  $P(z)$  par les equations

$$W_i(z) = \sigma_{m-1}(V_{MN_0-1-i})(z) . \quad (55)$$

20 De la même façon, les composantes  $\Delta$ -polyphase  $Q_i(z), i = 0, \dots, \Delta - 1$  de  $\sigma_L(P)(z)$  sont données par

$$Q_i(z) = \sigma_{M_0 N_0 - 1}(P_{\Delta-1-i})(z) , \quad (56)$$

où les  $P_i(z), i = 0, \dots, \Delta - 1$  sont les composantes  $\Delta$ -polyphase de  $P(z)$ .

Pour  $n > 0$ , nous introduisons  $J_n$  comme étant la matrice  $n \times n$  définie par  $[J_n]_{k, n+1-k} = 1, k = 1, \dots, n$  et 0 ailleurs.

25 On peut alors montrer que les matrices  $V_P^{(i)}(z)$  et  $V_{\sigma_{L-1}(P)}^{(i)}(z), i = 0, \dots, \Delta - 1$  sont reliées par l'équation

$$V_{\sigma_{L-1}(P)}^{(i)}(z) = z^{-(mN_0-1)} J_{N_0} V_P^{(\Delta-1-i)}(1/z) J_{M_0}, i = 0, \dots, \Delta - 1. \quad (57)$$

On peut mettre en évidence une relation similaire entre les matrices  $\mathbf{U}_P^{(i)}(z)$  et  $\mathbf{U}_{\sigma_{L-1}(P)}^{(i)}(z)$ ,  $i = 0, \dots, \Delta - 1$ , mais ceci nécessite l'introduction de deux nouvelles matrices diagonales.

On définit ainsi  $\mathbf{T}_3(z)$  comme la matrice diagonale carrée de taille  $N_0$  avec pour  $(k+1)$ -ième élément  $z^{(q(k,0)+q(N_0-1-k,0)+u)/N_0-\alpha(k)-\alpha(N_0-1-k)}$ , ainsi que la matrice  $\mathbf{T}_4(z)$ , également  
 5 diagonale carrée, mais de taille  $M_0$  avec pour  $(l+1)$ -ième élément  $z^{(q(0,l)+q(0,M_0-1-l)+1-u)/N_0}$ .

Les matrices  $\mathbf{U}_P^{(i)}(z)$  et  $\mathbf{U}_{\sigma_{L-1}(P)}^{(i)}(z)$ ,  $i = 0, \dots, \Delta - 1$  sont reliées par l'équation :

$$\mathbf{U}_{\sigma_{L-1}(P)}^{(i)}(z) = z^{-m} \mathbf{T}_3(z) \mathbf{J}_{N_0} \mathbf{U}_P^{(\Delta-1-i)}(1/z) \mathbf{J}_{M_0} \mathbf{T}_4(z). \quad (58)$$

Des résultats précédents (57), (58), ainsi que du théorème de décomposition (cf. Annexe, section IV.1), on peut déduire qu'un filtre prototype  $P(z)$  a la propriété PR pour les paramètres  $(M_0, N_0, \Delta, m)$  si et seulement si le filtre prototype symétrique  $\sigma_{L-1}(P)(z)$   
 10 a la même propriété.

Quand  $\Delta$  est pair, les mêmes arguments permettent de construire un filtre prototype symétrique, i.e.  $P(z) = \sigma_{L-1}(P)(z)$ , en choisissant les premières  $\Delta/2$  composantes  $\Delta$ -polyphase telles que  $P_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, \frac{\Delta}{2} - 1$  avec la propriété PR et enfin d'obtenir les composantes polyphases restantes par  $P_i(z) = \sigma_{M_0 N_0 - 1}(P_{\Delta-1-i})(z)$ ,  $i = \frac{\Delta}{2}, \dots, \Delta - 1$ .

## 15 5.7 Paramétrisation angulaire et notion de solution

### 5.7.1 Les rotations élémentaires

Pour  $N \geq 2$  et  $1 \leq i, j \leq N$ ,  $i \neq j$ , on appelle rotation élémentaire de coordonnées  $i, j$  et d'angle  $\theta$ , la rotation de  $\mathbb{R}^N$  dont la matrice  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{i,j}(\theta)$  est donnée par

$$\mathbf{R}(k, k) = 1, \quad k \neq i, \quad k \neq j, \quad (59)$$

$$\mathbf{R}(i, i) = \mathbf{R}(j, j) = \cos \theta, \quad (60)$$

$$\mathbf{R}(i, j) = -\mathbf{R}(j, i) = \sin \theta, \quad (61)$$

$$\mathbf{R}(k, l) = 0 \text{ sinon.} \quad (62)$$

L'ensemble des rotations  $\{\mathbf{R}_{i,j}(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$  est noté  $R_{i,j}$ .

20 Cette notation est étendue au produit de rotations élémentaires en convenant que les angles qui apparaissent dans les diverses rotations sont des paramètres indépendants. Ainsi par exemple

$$R_{i,j} R_{k,l} = \{R_{i,j}(\theta_1) R_{k,l}(\theta_2), \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (63)$$

Le groupe des rotations directes dans  $\mathbb{R}^N$  est désigné par  $SO_N(\mathbb{R})$  : ses éléments correspondent aux matrices réelles  $\mathbf{R}$  de dimension  $N$  vérifiant  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_N$  et  $\det(\mathbf{R}) = 1$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , la représentation d'une rotation directe à l'aide des angles d'Euler correspond à l'identité

$$SO_3(\mathbb{R}) = R_{1,2}R_{2,3}R_{1,2} . \quad (64)$$

Cette factorisation multiplicative d'une rotation de  $\mathbb{R}^3$  à l'aide de rotations élémentaires se généralise à  $\mathbb{R}^N$

$$SO_N(\mathbb{R}) = \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k R_{i,i+1} , \quad (65)$$

- 5 ce qui permet d'exprimer toute rotation directe de  $\mathbb{R}^N$  comme produit de  $\frac{N(N-1)}{2}$  rotations élémentaires.

Dans toute la suite, on utilisera la notation  $R_{i_1, \dots, i_k}$  avec  $k \leq N$  pour désigner dans  $SO_N(\mathbb{R})$  le sous-groupe des rotations qui laissent invariantes les  $j$ -ème coordonnées avec  $j \neq i_1, \dots, j \neq i_k$ .

- 10 Un produit de rotations élémentaires peut parfois être simplifié. Par exemple le produit  $R_{1,2}R_{2,3}R_{1,2}R_{1,3}$  est égal à  $R_{1,2}R_{2,3}R_{1,2}$  puisque ce dernier produit représente, à l'aide des angles d'Euler une rotation directe quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $N = 2$ , le résultat est trivial grâce à l'identité

$$SO_2(\mathbb{R}) = R_{1,2} = R_{1,2}R_{1,2} . \quad (66)$$

- 15 Pour  $N = 3$ , la représentation par les angles d'Euler est généralisée par le résultat suivant.

On a

$$SO_3(\mathbb{R}) \equiv R_{1,2,3} = R_{i_1, j_1} R_{i_2, j_2} R_{i_3, j_3}, \quad i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3 \in \{1, 2, 3\} \quad (67)$$

si  $\{i_1, j_1\} \neq \{i_2, j_2\}$  et  $\{i_2, j_2\} \neq \{i_3, j_3\}$ .

### 5.7.2 Les décalages

- 20 Soit  $N \geq 2$ ,  $I$  un sous-ensemble d'indices compris entre 1 et  $N$  et  $Z_I$  la matrice diagonale de dimension  $N$  dont les éléments diagonaux sont donnés par  $[Z_I]_{i,i} = z^{-1}$  si  $i \in I$  et 0 sinon. Si  $A(z)$  est une matrice paraunitaire à  $N$  lignes et  $M$  colonnes avec  $M \leq N$ , alors  $Z_I A(z)$  également. On note  $Z_I$  la transformation définie par la matrice  $Z_I$ , que l'on appelle un décalage.

### 5.7.3 Définitions

- 25 Soit  $M_0$  et  $N_0$  avec  $M_0 < N_0$ ,  $M_0$  et  $N_0$  premiers entre eux.

On note  $\mathcal{U}_{M_0, N_0}$  l'ensemble des matrices paraunitaires à  $N_0$  lignes et  $M_0$  colonnes.  $\mathcal{U}_{M_0, N_0, m}$  avec  $m \geq 0$  désigne le sous-ensemble de  $\mathcal{U}_{M_0, N_0}$  des matrices dont les éléments sont de degré en  $z^{-1}$  inférieur ou égal à  $m$ . En particulier  $\mathcal{U}_{M_0, N_0, 0}$  est l'ensemble des matrices paraunitaires de dimension  $N_0 \times M_0$  constantes.

- 5 Une matrice  $\mathbf{A}(z)$  de  $\mathcal{U}_{M_0, N_0, m}$  peut se représenter comme polynôme en  $z^{-1}$  à coefficients matriciels constants :

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_m z^{-m} . \quad (68)$$

Les matrices de  $\mathcal{U}_{M_0, N_0, m}$  vérifiant la propriété suivante : pour  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$ , si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  alors  $[\mathbf{A}_0]_{k+1, l+1} = 0$ , sinon  $[\mathbf{A}]_m]_{k+1, l+1} = 0$  forment un sous-ensemble noté  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$ . Ces matrices paraunitaires ont la forme des  
10 matrices  $\mathbf{U}^{(i)}(z)$  considérées dans le paragraphe 5.2.

Une matrice de  $\mathcal{U}_{M_0, N_0}$  constante dont les éléments sont dans l'ensemble  $\{0, 1, -1\}$  est dite *élémentaire*. Une telle matrice possède nécessairement  $M_0$  valeurs non nulles, égales à 1 ou -1, de telle façon que deux éléments non nuls ne soient ni sur la même colonne ni sur la même ligne.

- 15 **Notation.**– Une matrice élémentaire  $\mathbf{U}$  ne contenant que des 0 ou des 1 possède un élément égal à 1 dans chaque colonne, sans avoir deux éléments égaux à 1 sur la même ligne. Pour la colonne  $l$  avec  $1 \leq l \leq M_0$ , on note  $k(l)$  l'indice de ligne compris entre 1 et  $N_0$  tel que  $\mathbf{U}_{k(l), l} = 1$ . On convient alors de noter  $\mathbf{U}$  sous la forme plus compacte  $\mathbf{U}_0[k(0) \ k(1) \dots k(M_0 - 1)]$ . Par exemple la matrice

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 20 est notée  $\mathbf{U}_0[4 \ 3 \ 2 \ 5]$ , le nombre de lignes de cette matrice étant fixé par le contexte.

Une *solution*  $S$  de  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$  est un sous-ensemble de la forme  $S = T_1 T_2 \dots T_k \mathbf{U}_0$  où  $T_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  est soit un décalage  $Z_I$  avec  $I \in \{1, \dots, N_0\}$ , soit un ensemble de rotations élémentaires de la forme  $R_{ij}$  avec  $1 \leq i, j \leq N_0, i \neq j$ . Un élément de  $S$  est fonction de  $n$  paramètres angulaires indépendants où  $n$  est le nombre de rotations  
25 élémentaires dans la suite  $T_1, \dots, T_k$ .

Deux solutions  $S = T_1 T_2 \dots T_k \mathbf{U}_0$  et  $S' = T'_1 T'_2 \dots T'_k \mathbf{U}'_0$  sont *équivalentes* si  $S = S'$  de façon ensembliste. On dit que  $S$  est une *solution injective* s'il n'existe pas de solu-

tion équivalente avec un nombre strictement inférieur de rotations dans la suite de ses transformations. La notion de *dimension* qui sera introduite ultérieurement permet d'établir qu'une solution est injective si son nombre de paramètres angulaires est égal à sa dimension.

#### 5.7.4 Solutions symétriques

Avec la définition du paragraphe précédent, on dit qu'une solution  $S$  est symétrique si  $\phi_m(S) = S$ .

Pour  $M_0 \geq 2$  et  $N_0 = M_0 + 1$ , si  $N_0$  et  $m$  sont impairs, il n'existe aucune solution symétrique.

### 5.8 Description générale de l'ensemble des familles de solutions

#### 5.8.1 Algorithme général de résolution

Pour  $M_0, N_0, m$  fixé, nous donnons un algorithme général permettant d'exprimer l'ensemble  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$  sous forme de l'union d'un ensemble de solutions, chaque solution étant un ensemble de matrices paraunitaires obtenues comme produit par une suite de rotations et de décalage d'une matrice paraunitaire élémentaire.

#### Définition des motifs, encore appelés "patterns" :

L'ensemble  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$  est constitué des matrices paraunitaires  $A(z)$  de dimensions  $N_0 \times M_0$

$$A(z) = A_0 + A_1 z^{-1} + \dots + A_m z^{-m}. \quad (69)$$

où les matrices constantes  $A_0$  et  $A_m$  de dimensions  $N_0 \times M_0$  possèdent des éléments nuls préassignés :

$$[A_0]_{k+1, l+1} = 0 \text{ si } \alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1, \quad (70)$$

$$[A_m]_{k+1, l+1} = 0 \text{ si } \alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0, \quad (71)$$

pour  $0 \leq k \leq N_0 - 1, 0 \leq l \leq M_0 - 1$ .

On introduit alors la notion plus générale de motifs ou *pattern* qui correspond à l'ensemble des matrices paraunitaires de la forme (69) pour lesquelles les matrices  $A_0$  et  $A_m$  possèdent des éléments nuls préassignés.

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $S = [1, \dots, N_0] \times [1, \dots, M_0]$ . Nous notons par  $\mathcal{M}_A$  l'ensemble des matrices réelles  $M$  de dimensions  $N_0 \times M_0$  telles que  $M_{i,j} = 0$  for  $(i, j) \notin A$ .

A tout sous-ensemble  $A$  of  $S$  est associé un tableau de dimensions  $N_0 \times M_0$ , noté  $\underline{A}$ , dont les éléments sont dans  $\{0, \times\}$  tel que  $\underline{A}_{i,j} = \times$  si  $(i, j) \in S$  et 0 ailleurs.

La même notation  $\underline{A}$  est utilisée pour l'ensemble  $\mathcal{U}_{M_0, N_0, m} \cap \mathcal{M}_A$  qui est appelé un *pattern orthogonal*, c'est-à-dire l'ensemble des matrices orthogonales  $N_0 \times M_0$  avec des  
5 zéros préassignés pour les indices dans  $S \setminus A$ .

Pour  $A$  et  $B \neq \emptyset$  deux sous-ensembles de  $S$ , nous désignons par  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  le sous-ensemble des matrices  $M$  dans  $\mathcal{U}_{M_0, N_0}$  telles que  $M_0 \in \mathcal{M}_A$  et  $M_m \in \mathcal{M}_B$  où  $m$  est le degré de  $M$  avec  $m > 0$ .

Par convention  $\underline{A} \circ \circ \circ \emptyset \equiv \underline{A} \circ \circ \circ \underline{S}$ .

10 Le sous-ensemble des matrices paraunitaires de degré  $m$  dans  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  est noté  $\underline{A} \circ \circ \circ_m \underline{B}$  et de façon cohérente avec la précédente convention  $\underline{A} \circ \circ \circ_m \emptyset \equiv \underline{A} \circ \circ \circ_{m-1} \underline{S}$ .

Les ensembles  $\underline{A} \circ \circ \circ_m \underline{B}$  et  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  sont appelés des *patterns paraunitaires*.

Pour  $M_0 \geq 2, N_0 > M_0, \gcd(M_0, N_0) = 1$ , définissons

$$A = \{(i+1, j+1), \alpha(i, M_0) - \varepsilon(i, j) = 0\}, \quad (72)$$

alors

$$\mathcal{S}_{M_0, N_0, m} = \underline{A} \circ \circ \circ_m \underline{S \setminus A} \quad (73)$$

15 d'après les équations (70) at (71) et

$$\mathcal{S}_{M_0, N_0} = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{S}_{M_0, N_0, m} = \underline{A} \circ \circ \circ \underline{S \setminus A} \quad (74)$$

est l'ensemble des matrices paraunitaires à reconstruction parfaite.

**Exemple.**– Pour  $M_0 = 4, N_0 = 5$  et avec la notation utilisant des tableaux

$$\mathcal{S}_{4,5} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \circ \circ \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Il est immédiat de vérifier que si  $A_1 \subset A_2$  and  $B_1 \subset B_2$  alors  $\underline{A}_1 \circ \circ \circ \underline{B}_1 \subset \underline{A}_2 \circ \circ \circ \underline{B}_2$ .

#### Action des rotations sur les patterns :

20 Soit  $\mathbf{R}_{i,j}(\theta)$  une rotation d'angle quelconque  $\theta$  comme définie au paragraphe 5.7.1 et  $\underline{A}$  un pattern orthogonal. Alors puisque la rotation agit sur les lignes  $i$  et  $j$ , si  $\mathbf{M} \in \underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  l'élément constant de ligne  $i$  ou  $j$  et de colonne  $l, 1 \leq l \leq M_0$  de la matrice  $\mathbf{R}_{i,j}(\theta)\mathbf{M}$  est

non nul si  $(i, j) \in A$  ou  $(j, l) \in A$ . En notant  $\tilde{A}$  l'ensemble des  $(k, l)$  tels que  $(k, l) \in A$  si  $k \neq i$  et  $k \neq j$  ou  $k = i$  ou  $k = j$  avec  $(i, k) \in A$  ou  $(j, k) \in A$ , on a donc avec la notation ensembliste pour la rotation  $R_{i,j}\underline{A} \subset \tilde{A}$ .

De la même façon on définit l'action d'une rotation  $R_{i,j}$  sur un pattern paraunitaire  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  et l'on établit que  $R_{i,j}\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B} \subset \tilde{A} \circ \circ \circ \tilde{B}$ .

Remarquons que les lignes  $i$  et  $j$  des patterns obtenus après action d'une rotation  $R_{i,j}$  sont identiques.

Inversement, on dit qu'un pattern paraunitaire  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  est *pivotable* ("rotatable") s'il existe deux indices  $i$  et  $j$ ,  $i \neq j$  tels que les deux lignes  $i$  et  $j$  du pattern sont identiques avec au moins un élément non nul  $(i, k) \in \underline{A}$  et un élément non nul  $(i, l) \in \underline{B}$ . Dans ce cas, il existe deux possibilités. Si les colonnes  $k$  de  $\underline{A}$  et  $l$  de  $\underline{B}$  ont les seuls éléments communs de lignes  $i$  et  $j$  non nuls, on pose  $A' = \underline{A} - \{(j, k)\}$ ,  $B' = \underline{B} - \{(i, l)\}$ , et sinon  $A' = \underline{A}$ ,  $B' = \underline{B} - \{(i, l)\}$ .

On a alors  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B} = R_{i,j}A' \circ \circ \circ B'$ .

De même on dit qu'un pattern orthogonal  $\underline{A}$  est *pivotable*  $i$  et  $j$ ,  $i \neq j$  tels que les deux lignes  $i$  et  $j$  du pattern sont identiques avec au moins deux éléments non nul  $(i, k)$  et  $(i, l)$  dans  $\underline{A}$ . Dans ce cas, on distingue deux cas. Si les colonnes  $k$  et  $l$  de  $\underline{A}$  ont les seuls éléments de lignes  $i$  et  $j$  non nuls communs, on pose  $A' = \underline{A} - \{(j, k), (i, l)\}$ , et sinon  $A' = \underline{A} - \{(i, l)\}$ .

On a alors  $\underline{A} = R_{i,j}A'$ .

### Action des décalages sur les patterns :

Soit  $I$  un sous-ensemble non vide d'indices compris entre 1 et  $N_0$  et  $Z_I$  le décalage défini dans le paragraphe 5.7.2. Si  $M \in \underline{A} \circ \circ \circ_{m-1} \underline{B}$  est un pattern paraunitaire avec  $m \geq 1$ , alors  $Z_I M \in \tilde{A} \circ \circ \circ_m \tilde{B}$  où les ensembles  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont définis par  $\tilde{A} = \{(i, k), (i, k) \in A, k \notin I\}$ ,  $\tilde{B} = \{(i, k), (i, k) \in B, k \in I\}$ .

De la même façon, pour un pattern orthogonal, on a  $Z_I \underline{A} \subset \tilde{A} \circ \circ \circ_0 \tilde{B}$  où  $\tilde{A} = \{(i, k), (i, k) \in A, k \notin I\}$ ,  $\tilde{B} = \{(i, k), (i, k) \in A, k \in I\}$ .

Inversement, on dit qu'un pattern paraunitaire  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  est *réductible en degré* si pour tout indice  $i$  compris entre 1 et  $N_0$  la ligne  $i$  de  $\underline{A}$  a tous ses éléments nuls, ou bien la ligne  $i$  de  $\underline{B}$ . On note  $I$  l'ensemble des indices pour lesquelles la ligne  $i$  de  $\underline{A}$  a tous ses éléments nuls. On peut alors écrire  $\underline{A} \circ \circ \circ_m \underline{B} = Z_I \underline{A'} \circ \circ \circ_{m-1} \underline{B'}$  où  $A' = \{(i, j), (i, j) \in A \text{ ou } i \in I\}$  et  $B' = \{(i, j), (i, j) \in B \text{ ou } i \notin I\}$ , et l'on dit qu'il s'agit d'un décalage paraunitaire. On a aussi  $\underline{A} \circ \circ \circ_0 \underline{B} = Z_I \underline{A'}$  où  $A' = \{(i, j), (i, j) \in A, i \notin I\} \cup \{(i, j), (i, j) \in B, i \in I\}$  et

l'on dit qu'il s'agit d'un décalage orthogonal.

### L'opération de scindage :

Si la matrice donnée par l'équation (69) est paraunitaire, alors en particulier on a la relation  $\mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_0 = 0$ , ce qui signifie que les vecteurs colonnes de  $\mathbf{A}_0$  sont orthogonaux aux  
 5 vecteurs colonnes de  $\mathbf{A}_m$ . Si une colonne d'indice  $k$  de  $\mathbf{A}_0$  et une colonne  $l$  de  $\mathbf{A}_m$  sont telles que  $[\mathbf{A}_0]_{ik} = 0$  ou  $[\mathbf{A}_m]_{il} = 0$  sauf pour  $i = i_0$  avec  $1 \leq i_0 \leq N_0$ , alors la relation d'orthogonalité entre les vecteurs colonnes  $k$  de  $\mathbf{A}_0$  et  $l$  de  $\mathbf{A}_m$  s'écrit  $[\mathbf{A}_0]_{i_0 k} [\mathbf{A}_m]_{i_0 l} = 0$  et donc soit  $[\mathbf{A}_0]_{i_0 k} = 0$ , soit  $[\mathbf{A}_m]_{i_0 l} = 0$ .

On dit alors qu'un pattern paraunitaire  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  est *scindable* si ses matrices  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$   
 10 vérifient la propriété précédente. On peut alors écrire

$$\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B} = \underline{A}' \circ \circ \circ \underline{B} \cup \underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}', \quad (76)$$

où  $A'$  et  $B'$  sont définis par  $A' = A - \{(i_0, k)\}$ ,  $B' = B - \{(i_0, l)\}$ .

Cependant les patterns paraunitaires  $\underline{A}' \circ \circ \circ \underline{B}$  ou  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}'$  peuvent eux-mêmes être encore scindables. On peut donc recommencer l'opération de scindage tant que cela est possible et nous pouvons démontrer que quelque soit l'ordre choisi pour les scindages s'il  
 15 existe des possibilités de choix, on obtient une décomposition unique du pattern scindable  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  sous la forme

$$\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B} = \cup_{k=1}^K \underline{A}_k \circ \circ \circ \underline{B}_k, \quad (77)$$

où  $K \geq 2$ ,  $A_k \subset A$ ,  $B_k \subset B$ ,  $1 \leq k \leq K$  et où chaque pattern  $\underline{A}_k \circ \circ \circ \underline{B}_k$  n'est plus scindable. Cette décomposition du pattern  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  est appelée son scindage total et les  $\underline{A}_k \circ \circ \circ \underline{B}_k$  les composantes du scindage.

### 20 Patterns orthogonaux quasi-élémentaires :

Les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale sont orthogonaux. On appelle *pattern orthogonal quasi-élémentaire* un pattern  $\underline{A}$  tel que pour toute ligne  $i$ , il existe au plus une colonne  $k$  telle que  $(i, k) \in A$ . Pour  $1 \leq k \leq M_0$ , on note alors  $I_k$  l'ensemble des lignes  $i$  telles que  $(i, k) \in A$ .

25 Comme les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale sont également unitaires, deux possibilités se présentent.

Soit il existe un indice de colonne tel que  $I_k$  est vide et dans ce cas  $\underline{A} = \emptyset$ , soit tous les  $I_k$ ,  $1 \leq k \leq M_0$  sont non vides et l'on peut noter  $I_k = \{i_{k,1}, i_{k,2}, \dots, i_{k,c_k}\}$ , où  $c_k \geq 1$  est le nombre d'éléments de  $I_k$ .

Il est alors facile de montrer que  $\underline{A}$  peut s'écrire sous la forme

$$\underline{A} = \prod_{k=1}^{M_0} \prod_{a=2}^{c_k} R_{i_{k,1}, i_{k,a}} U_0[i_{1,1}, i_{2,1}, \dots, i_{M_0,1}], \quad (78)$$

où  $U_0[i_{1,1}, i_{2,1}, \dots, i_{M_0,1}]$  est une matrice orthogonale élémentaire comme définie en 7.3. On voit alors qu'un pattern quasi-élémentaire est vide ou bien est de la forme d'une solution.

##### 5 Définition des STAP :

On suppose toujours dans ce paragraphe que  $M_0 \geq 1$  et  $N_0 > M_0$  avec  $\gcd(M_0, N_0) = 1$  sont donnés.

L'acronyme *STAP* désigne une *Suite de Transformations Appliquées à un Pattern*. Un STAP est constitué d'une suite  $T_1, T_2, T_k$  de transformations, éventuellement vide, chaque  $T_i$  étant une rotation  $R_{i,j}$  avec  $1 \leq i < j \leq N_0$  ou bien un décalage  $Z_I$  avec  $I \subset \{1, \dots, N_0\}$  et d'un pattern paraunitaire  $\underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}$  ou orthogonal  $\underline{A}$

**Exemples.** Une liste vide de transformation et le pattern paraunitaire à reconstruction parfaite constitue ce qu'on appelle le *STAP à reconstruction parfaite*. A une solution  $S = T_1 T_2 \dots T_k U_0$  peut être associé le STAP constitué de la suite  $(T_1, T_2, \dots, T_k)$  et du pattern orthogonal  $\underline{A}$  défini par  $A = \{(i, j), [U_0]_{ij} = 1\}$  où  $U_0$  est une matrice paraunitaire élémentaire. Ce second type de STAP est appelé un *STAP solution*.

Si le pattern d'un STAP est pivotable par la rotation  $R_{i,j}$  alors on dit que le STAP est pivotable. On définit la rotation sur le STAP par

$$R_{ij}[(T_1, T_2, \dots, T_k), \underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}] = [(T_1, T_2, \dots, T_k, R_{ij}), \underline{A}' \circ \circ \circ \underline{B'}], \quad (79)$$

où  $A', B'$  sont définis dans le paragraphe 5.8.1, et

$$R_{ij}[(T_1, T_2, \dots, T_k), \underline{A}] = [(T_1, T_2, \dots, T_k, R_{ij}), \underline{A}']. \quad (80)$$

où  $A'$  est défini dans le paragraphe 5.8.1.

De même si le pattern d'un STAP est réductible en degré avec un ensemble d'indices  $I$ , le STAP est dit réductible en degré et l'on définit son décalage avec un pattern paraunitaire par

$$R_{ij}[(T_1, T_2, \dots, T_k), \underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}] = [(T_1, T_2, \dots, T_k, Z_I), \underline{A}' \circ \circ \circ \underline{B'}], \quad (81)$$

où  $A', B'$  sont définis dans le paragraphe 5.8.1. Son décalage avec un pattern orthogonal est défini par

$$R_{ij}[(T_1, T_2, \dots, T_k), \underline{A} \circ \circ \circ \underline{B}] = [(T_1, T_2, \dots, T_k, Z_I), \underline{A}'], \quad (82)$$

où  $A'$  est défini en 5.8.1.

Si le pattern d'un STAP est scindable, alors on peut l'écrire comme équivalent à un ensemble de STAP dont les patterns sont les composantes du scindage, et l'on dit que le STAP est scindable et que l'on a effectué le *scindage du STAP*.

- 5 Enfin si le pattern  $\underline{A}$  d'un STAP  $E$  est un pattern orthogonal quasi-élémentaire, qui est vide ou s'écrit sous la forme  $\prod_l R_{i_l, j_l} U_0$  où  $U_0$  est une matrice orthogonale élémentaire, alors le STAP représente un ensemble vide ou égal au STAP note  $QE(E)$

$$QE(E) = [(T_1, T_2, \dots, T_k, R_{i_1, j_1}, \dots, R_{i_l, j_l}), \underline{A}']$$

défini par  $A' = \{(i, j), [U_0]_{ij} = 1\}$  qui est donc un STAP solution.

### Première étape de l'algorithme général :

- 10 Pour des valeurs fixées de  $M_0, N_0, m$ , on part de l'ensemble  $\mathcal{I}$  constitué par le STAP à reconstruction parfaite et l'on construit l'ensemble de STAP  $\mathcal{E}_0$  par l'algorithme suivant

```

 $ToDo = \mathcal{I}$ 
 $\mathcal{E}_0 = \emptyset$ 
tant que  $ToDo \neq \emptyset$  faire {
     $x = first(ToDo)$ 
     $ToDo = ToDo - \{x\}$ 
    si  $x$  scindable alors  $ToDo = ToDo \cup \text{scindage}(x)$ 
    sinon si  $x$  pivotable alors  $ToDo = ToDo \cup \{\text{rotation}(x)\}$ 
    sinon si  $x$  réductible en degré alors  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 \cup \{x\}$ 
    sinon erreur "STAP non transformable"
}
retourner  $\mathcal{E}_0$ 

```

Dans cet algorithme  $x = first(ToDo)$  signifie que l'on choisit un élément  $x$  dans  $ToDo$ , le plus petit pour un ordre quelconque sur  $ToDo$ , par exemple le premier si  $ToDo$  est représenté par une liste.

- 15 L'ensemble  $\mathcal{E}_0$  est constitué de STAP qui sont tous réductibles en degré. L'ensemble  $\mathcal{E}'_0$  est l'ensemble des décalés paraunitaires des éléments de  $\mathcal{E}_0$ . On construit alors l'ensemble  $\mathcal{E}_1$  en utilisant le même algorithme où  $\mathcal{I}$  est remplacé par  $\mathcal{E}'_0$  et  $\mathcal{E}_0$  par  $\mathcal{E}_1$  et ainsi de suite.

La construction de  $\mathcal{E}_i, i = 0, \dots, k$  est donc donné par l'algorithme suivant.

```

de  $i = 0$  à  $k$  faire {
  si  $i = 0$  alors  $ToDo = \mathcal{I}$ 
  sinon  $ToDo = \{\text{décalage}(x), x \in \mathcal{E}_{i-1}\}$ 
   $\mathcal{E}_i = \emptyset$ 
  tant que  $ToDo \neq \emptyset$  faire {
     $x = \text{first}(ToDo)$ 
     $ToDo = ToDo - \{x\}$ 
    si  $x$  scindable alors  $ToDo = ToDo \cup \text{scindage}(x)$ 
    sinon si  $x$  pivotable alors  $ToDo = ToDo \cup \{\text{rotation}(x)\}$ 
    sinon si  $x$  réductible en degré alors  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i \cup \{x\}$ 
    sinon erreur "STAP non transformable"
  }
}
retourner  $\{\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_k\}$ 

```

Les ensembles de STAP  $\mathcal{O}_n, n \geq 1$  sont les STAP obtenus à partir des STAP de  $\mathcal{E}_{n-1}$  par décalage de leurs patterns réductibles en degré vers des patterns orthogonaux. On applique alors l'algorithme suivant pour transformer  $\mathcal{O}_n$  en un ensemble de STAP quasi-élémentaires, puis un ensemble  $\mathcal{S}_n$  de STAP solutions.

```

 $ToDo = \mathcal{O}_n$ 
 $\mathcal{S}_n = \emptyset$ 
tant que  $ToDo \neq \emptyset$  faire {
   $x = \text{first}(ToDo)$ 
   $ToDo = ToDo - \{x\}$ 
  si  $x$  scindable alors  $ToDo = ToDo \cup \text{scindage}(x)$ 
  sinon si  $x$  pivotable alors  $ToDo = ToDo \cup \{\text{rotation}(x)\}$ 
  sinon si  $x$  quasi-élémentaire alors  $\mathcal{S}_n = \mathcal{E}_0 \cup \{QE(x)\}$ 
  sinon erreur "STAP non transformable"
}
retourner  $\mathcal{S}_n$ 

```

A l'ensemble  $\mathcal{S}_n$  correspond un ensemble de solutions dont l'union est  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$ , c'est-à-dire exhaustif. Mais, après cette première étape de l'algorithme, cet ensemble de solutions présentent les inconvénients suivants :

- Une solution peut être contenue dans une autre, c'est-à-dire que l'ensemble  $\mathcal{S}_n$  est redondant.
- Une solution peut dépendre d'un nombre de rotations strictement supérieur à sa dimension.

L'étape suivante consiste à partir de  $\mathcal{S}_n$  à construire un ensemble de solutions ne présentant plus ces deux inconvénients.

#### 10 Seconde étape de l'algorithme général :

Considérons une solution  $S = T_1, T_2, \dots, T_k U_0$ , dépendant de  $n$  rotations  $R_{i_1, j_1}, \dots, R_{i_n, j_n}$  : l'application  $\phi_S : (\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow M(\theta_1, \dots, \theta_n)$  où  $M(\theta_1, \dots, \theta_n)$  est la matrice  $N_0 \times M_0$  réelles obtenues en affectant les angles  $\theta_i, i = 1, \dots, n$  à celles des transformations  $T_i$  qui sont des rotations est appelée représentation paramétrique de la solution. L'application  $\phi_S$  peut être considérée comme une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{N_0 M_0}$  et la dimension maximale de l'espace tangent en  $\phi(\theta_1, \dots, \theta_n)$  est atteinte presque partout sur  $\mathbb{R}^n$ . On appelle cette dimension maximale la dimension de la solution et on la note  $\dim(S)$ . On a toujours  $\dim(S) \leq n$

On peut alors montrer qu'il est possible de conserver la même solution en supprimant  $n - \dim(S)$  rotations parmi les  $n$  contenues dans la solution initiale. L'algorithme pour obtenir cette réduction du nombre de rotations est le suivant : en calculant successivement  $T_k U_0, T_{k-1} T_k U_0, \dots, T_1 \dots T_k U_0$ , on supprime les transformations  $T_i$  qui sont des rotations et n'augmentent pas de 1 la dimension.

Étant données deux solutions  $S_1 : T_1 \dots T_k U_0$  et  $S_2 : U_1 \dots U_l V_0$ , avec  $\dim(S_1) = k \leq l = \dim(S_2)$  et  $\phi_{S_1}, \phi_{S_2}$  leurs représentations paramétriques respectives, il est possible de démontrer que l'un des cas suivants est vérifié :

1. soit  $\phi_{S_1}(\mathbb{R}^k)$  est contenu dans  $\phi_{S_2}(\mathbb{R}^l)$ , autrement dit  $S_1 \subset S_2$ ,
2. soit  $\phi_{S_1}^{-1}(\phi_{S_1}(\mathbb{R}^k) \cap \phi_{S_2}(\mathbb{R}^l))$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^k$ .

Pour montrer que  $S_1 \subset S_2$ , on choisit donc une valeur aléatoire  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  des paramètres de  $S_1$  et on cherche à minimiser la distance  $\delta = \min_{\alpha} \|\phi_{S_1}(\theta) - \phi_{S_2}(\alpha)\|$  lorsque  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{R}^l$ . Dans la cas 1,  $\delta = 0$  tandis que dans le cas 2,  $\delta > 0$ . Un logiciel numérique d'optimisation globale est utilisé pour calculer la valeur de  $\delta$  et l'optimisation est lancée avec plusieurs valeurs initiales pour  $\alpha$ .

### 5.8.2 Application directe au cas $N_0 = M_0 + 1$

L'algorithme de résolution, avec ses deux étapes, conduit aux ensembles de solutions dont les propriétés sont décrites dans le tableau 1 dans le cas de quelques valeurs de  $(M_0, N_0, m)$  avec  $N_0 = M_0 + 1$ .

5 Les 2 solutions du cas  $M_0 = 2, N_0 = 3, m = 1$  sont, à titre d'exemple, fournies au tableau 2.

Cependant, l'algorithme général peut être utilisé également dans des cas où  $N_0 > M_0 + 1$ . Par exemple pour  $M_0 = 3, N_0 = 5, m = 1$  on obtient que  $\mathcal{S}_{3,5,1}$  est constitué de 4 solutions données dans le tableau 3.

10 L'algorithme présenté ici constitue une considérable amélioration de celui qui était proposé dans [4] puisque, par exemple, l'ensemble  $\mathcal{S}_{4,5,2}$  est décrit par 61 solutions, nombre qui ne peut être réduit, alors qu'il l'était à l'aide de 13502 solutions.

### 5.8.3 Enumération exhaustive des solutions pour le cas $M_0 = 2$ et $N_0 = 3$

L'ensemble des solutions obtenues dans ce cas peut se caractériser de la manière qui  
15 suit.

Soit  $m > 1$ . Les  $m - 1$  sous-ensembles  $A_\alpha, \alpha = 0, \dots, m - 2$  de  $\mathcal{U}_{2,3,m}$  définis par

$$A_\alpha = Z_2 R_{13} R_{12} (Z_{23} R_{13} R_{12})^\alpha (Z_3 R_{23} R_{12})^{m-1-\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

sont  $m - 1$  solutions distinctes de  $\mathcal{S}_{2,3,m}$  de dimension  $2m$  et de support nul symétrique  $\{g_{1,0}, g_{4,m-1}\}$ .

Ils vérifient les relations de symétrie  $\phi_{m-1}(A_\alpha) = A_{m-2-\alpha}, \alpha = 0, \dots, m - 2$ .

20 Si  $m$  est pair,  $A_{(m-2)/2}$  est donc une solution symétrique de  $\mathcal{S}_{2,3,m}$  de dimension  $2m$ .

Pour  $m > 1$  et  $\alpha = 0, \dots, m - 2$ , on pose, pour  $\alpha \leq m - 3$

$$B_\alpha = Z_2 R_{13} R_{12} (Z_{23} R_{13} R_{12})^\alpha R_{23} Z_3 R_{13} (Z_3 R_{23} R_{13})^{m-3-\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$B_{m-2} = Z_2 R_{13} R_{12} (Z_{23} R_{13} R_{12})^{m-2} R_{23} Z_3 R_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

|                        | $m = 1$                                                                                                          | $m = 2$                                                                                                                                            | $m = 3$                                                                                                               | $m = 4$                                                                                 | $m = 5$                       |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $M_0 = 2$<br>$N_0 = 3$ | <b>2 sols</b><br>dim 2 : 2                                                                                       | <b>5 sols</b><br>dim 4 : 5                                                                                                                         | <b>8 sols</b><br>dim 6 : 8                                                                                            | <b>11 sols</b><br>dim 8 : 11                                                            | <b>14 sols</b><br>dim 10 : 14 |
| $M_0 = 3$<br>$N_0 = 4$ | <b>5 sols</b><br>dim 4 : 1<br>dim 3 : 4                                                                          | <b>17 sols</b><br>dim 8 : 1<br>dim 7 : 12<br>dim 6 : 4                                                                                             | <b>29 sols</b><br>dim 12 : 1<br>dim 11 : 12<br>dim 10 : 12<br>dim 9 : 4                                               | <b>41 sols</b><br>dim 16 : 1<br>dim 15 : 12<br>dim 14 : 12<br>dim 13 : 12<br>dim 12 : 4 | —                             |
| $M_0 = 4$<br>$N_0 = 5$ | <b>14 sols</b><br>dim 6 : 2<br>dim 5 : 8<br>dim 4 : 4                                                            | <b>61 sols</b><br>dim 12 : 7<br>dim 11 : 32<br>dim 10 : 16<br>dim 9 : 2<br>dim 8 : 4                                                               | <b>108 sols</b><br>dim 18 : 12<br>dim 17 : 54<br>dim 16 : 16<br>dim 15 : 4<br>dim 14 : 16<br>dim 13 : 2<br>dim 12 : 4 | —                                                                                       | —                             |
| $M_0 = 5$<br>$N_0 = 6$ | <b>42 sols</b><br>dim 9 : 1<br>dim 8 : 8<br>dim 7 : 27<br>dim 6 : 2<br>dim 5 : 4                                 | <b>224 sols</b><br>dim 18 : 1<br>dim 17 : 24<br>dim 16 : 107<br>dim 15 : 58<br>dim 14 : 6<br>dim 13 : 20<br>dim 12 : 2<br>dim 11 : 2<br>dim 10 : 4 | —                                                                                                                     | —                                                                                       | —                             |
| $M_0 = 6$<br>$N_0 = 7$ | <b>132 sols</b><br>dim 12 : 2<br>dim 11 : 18<br>dim 10 : 60<br>dim 9 : 44<br>dim 8 : 2<br>dim 7 : 2<br>dim 6 : 4 | —                                                                                                                                                  | —                                                                                                                     | —                                                                                       | —                             |

TABLE 1 – Bilan

$$\left| \begin{array}{l} S_1 : \quad (\dim = 2) \quad Z_2 R_{13} R_{12} \ U_0[2 \ 3] \\ S_2 : \quad (\dim = 2) \quad R_{13} R_{12} \ U_0[3 \ 2] \end{array} \right.$$

TABLE 2 – Solutions pour  $M_0 = 2, N_0 = 3, m = 1$ .

$$\left| \begin{array}{l} S_1 : \quad (\dim = 6) \quad R_{25} R_{35} Z_{23} R_{14} R_{24} R_{23} R_{14} \ U_0[3 \ 5 \ 4] \\ S_2 : \quad (\dim = 6) \quad R_{25} R_{35} Z_{23} R_{14} R_{24} R_{34} R_{15} \ U_0[4 \ 5 \ 2] \\ S_3 : \quad (\dim = 6) \quad R_{25} Z_{25} R_{14} R_{12} R_{34} R_{25} R_{45} \ U_0[1 \ 3 \ 5] \\ S_4 : \quad (\dim = 6) \quad R_{25} Z_2 R_{14} R_{12} R_{34} R_{35} R_{24} \ U_0[1 \ 5 \ 4] \end{array} \right.$$

TABLE 3 – Solutions pour  $M_0 = 3, N_0 = 5, m = 1$ .

et

$$C_\alpha = R_{13} R_{23} (R_{12} Z_{23} R_{13})^{\alpha+1} (Z_3 R_{23} R_{13})^{m-3-\alpha} Z_3 R_{23} R_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$C_{m-2} = Z_2 R_{13} R_{23} (R_{12} Z_{23} R_{13})^{m-2} R_{12} Z_{23} R_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

Les  $B_\alpha, \alpha = 0, \dots, m-2$  sont  $m-1$  solutions distinctes de  $\mathcal{S}_{2,3,m}$  de dimension  $2m$  et de support nul non symétrique  $\{g_{1,0}, g_{3,m-1}, g_{5,m-1}\}$ .

Les  $C_\alpha, \alpha = 0, \dots, m-2$  sont  $m-1$  solutions distinctes de  $\mathcal{S}_{2,3,m}$  de dimension  $2m$  et  
 5 de support nul non symétrique  $\{g_{0,0}, g_{2,0}, g_{4,m-1}\}$ .

Les relations de symétrie suivantes sont vérifiées :  $C_\alpha = \phi_{m-1}(B_{m-2-\alpha}), \alpha = 0, \dots, m-2$ .

On pose enfin

$$D = Z_2 R_{13} R_{12} (Z_{23} R_{13} R_{12})^{m-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

et

$$E = R_{13} R_{23} (Z_3 R_{13} R_{23})^{m-2} Z_3 R_{13} R_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Alors  $D$  et  $E$  sont deux solutions de  $\mathcal{S}_{2,3,m}$  de dimension  $2m$ , de supports nuls non symétriques  $\{g_{1,0}\}$  et  $\{g_{4,m-1}\}$  et  $\phi_{m-1}(D) = E$ .

#### 5.8.4 Obtention des solutions de dimension maximale pour $M_0$ impair et $N_0 = M_0 + 1$

5 Pour  $M_0 \leq 2$ , on définit la matrice unitaire élémentaire  $U_{M_0}$  de dimensions  $M_0 \times (M_0 + 1)$  par :

– Si  $M_0$  est pair,  $M_0 = 2m_0$  :

$$[U_{M_0}]_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, 1 \leq k \leq m_0 - 1, \\ 1 & \text{si } k = l + 1, m_0 + 2 \leq k \leq M_0 + 1 \\ 1 & \text{si } k = m_0 + 2, l = m_0 \text{ ou } k = l = m_0 + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (90)$$

– Si  $M_0$  est impair,  $M_0 = 2m_0 + 1$  :

$$[U_{M_0}]_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, 1 \leq k \leq m_0 + 1, \\ 1 & \text{si } k = l + 1, m_0 + 3 \leq k \leq M_0 + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (91)$$

**Exemples.**

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (92)$$

10

$$U_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Soit  $M_0 = 2m_0 + 1$ ,  $N_0 = M_0 + 1$  et  $m \geq 1$ .

Soit  $B_{M_0}, C_{M_0}, D_{M_0}$  les matrices  $N_0 \times N_0$  définies, pour  $M_0$  impair, par

$$B_{M_0} = \prod_{i=1}^{m_0+1} \left[ \prod_{j=0}^{m_0-i} R_{i+1, N_0+1-i-j} \prod_{j=0}^{m_0-1-i} R_{i+j+1, M_0+2-i} \right], \quad (94)$$

$$C_{M_0} = Z_{m_0+2 \dots M_0} B_{M_0}, \quad (95)$$

$$\mathbf{D}_{M_0} = \mathbf{Z}_{m_0+2\dots M_0+1} \mathbf{B}_{M_0} , \quad (96)$$

La solution  $S_{M_0}$  définie par

$$S_{M_0} = \mathbf{C}_{M_0} \mathbf{D}_{M_0}^{m-1} \mathbf{U}_{M_0} \quad (97)$$

est une solution de  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$ . Cette solution est symétrique et de dimension  $m(N_0/2)^2$ .

On conjecture que la solution  $S_{M_0}$  du théorème précédent est l'unique solution de  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$  de dimension maximale  $m(N_0/2)^2$  pour  $M_0$  impair.

### 5.8.5 Obtention des solutions de dimension maximale pour $M_0$ pair et $N_0 = M_0 + 1$

Soit  $M_0 = 2m_0$  pair,  $N_0 = M_0 + 1$  et  $m \geq 2$ . Soit  $\mathbf{B}_{M_0}$ ,  $\mathbf{C}_{M_0}$ ,  $\mathbf{D}_{M_0}$ ,  $\mathbf{G}_{M_0}$  et  $\mathbf{F}_{M_0}$  les matrices  $N_0 \times N_0$  définies, pour  $M_0$  pair, par

$$\mathbf{B}_{M_0} = \prod_{i=1}^{m_0} \prod_{j=0}^{m_0} R_{i, M_0+1-j} , \quad (98)$$

10

$$\mathbf{C}_{M_0} = \mathbf{Z}_{m_0+1\dots M_0} \mathbf{B}_{M_0} , \quad (99)$$

$$\mathbf{D}_{M_0} = \mathbf{Z}_{m_0+1\dots M_0+1} \mathbf{B}_{M_0} , \quad (100)$$

$$\mathbf{G}_{M_0} = \prod_{i=1}^{m_0} \left[ \prod_{j=0}^{m_0-1-i} R_{i, M_0+2-i-j} \prod_{j=0}^{m_0-1-i} R_{i+j+1, M_0+2-i} \right] , \quad (101)$$

$$\mathbf{F}_{M_0} = \mathbf{Z}_{m_0+2\dots M_0+1} \mathbf{G}_{M_0} . \quad (102)$$

Pour  $0 \leq \alpha \leq m-2$ , on pose

$$A_{M_0, \alpha} = \mathbf{C}_{M_0} \mathbf{D}_{M_0}^\alpha \mathbf{F}_{M_0}^{m-1-\alpha} \mathbf{U}_{M_0} . \quad (103)$$

15 Alors les  $A_{M_0, \alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq m-2$  sont  $m-1$  solutions distinctes de  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$  et de même support nul. Les relations suivantes de symétrie sont vérifiées  $\phi_{m-1}(A_{M_0, \alpha}) = A_{M_0, m-2-\alpha}$ ,  $\alpha = 0, \dots, m-2$ .

On conjecture que les solutions  $A_{m_0, \alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq m-2$  du théorème 2 sont de dimension maximale  $mm_0(m_0+1)$  et lorsque  $m$  est pair,  $A_{m_0, (m-2)/2}$  est l'unique solution symétrique de dimension maximale dans  $\mathcal{S}_{M_0, N_0, m}$ . Si  $m$  est impair, il n'existe aucune solution symétrique de dimension maximale.

20

### 5.8.6 Obtention des solutions de dimension minimale pour tout $M_0$ pair et $N_0 = M_0 + 1$

Pour  $M_0 \geq 1$  and  $N_0 = M_0 + 1$ , on définit la matrice  $U_0$  rectangulaire unitaire  $N_0 \times M_0$  par  $[U_0]_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $[U_0]_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ . L'ensemble des matrices  $B$  est défini par

$$B = \prod_{i=1}^{M_0} R_{i, M_0+1} . \quad (104)$$

5 Alors, pour  $m \geq 1$ , l'ensemble des matrices  $S_{M_0, m}^{(1)}$  défini par

$$S_{M_0, m}^{(1)} = B [Z_{M_0+1} B]^{m-1} U_0 , \quad (105)$$

est une solution dans  $S_{M_0, N_0, m}$  de dimension  $mM_0$ . Nous conjecturons que cette dimension  $mM_0$  est la dimension minimale des solutions dans  $S_{M_0, M_0+1, m}$  lorsque cet ensemble est décrit comme union d'un ensemble irréductible de solutions.

## 6 ANNEXE F : Exemples

Dans ce qui suit nous détaillons le cas particulier d'un système de banc de filtres pour les valeurs de paramètres  $M_0 = 5, N_0 = 6, \Delta = 12, m = 4$ . Ce calcul correspond donc à celui nécessaire pour un système OFDM suréchantillonné dans un rapport 6/5 et comprenant 60 sous-porteuses, ce qui se traduit par un filtre prototype de longueur  $L = 1440$ .

Dans le cas de cet exemple, il nous suffit d'appliquer la méthode qui suit

Pour  $k, l$  avec  $1 \leq k < l \leq N_0$ , on définit la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{kl}(\theta)$  de dimension  $N_0 \times N_0$  et d'angle  $\theta$  dans le plan  $(k, l)$  par

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{k,l}(\theta)]_{k,k} &= [\mathbf{R}_{k,l}(\theta)]_{l,l} = \cos \theta, \\ [\mathbf{R}_{k,l}(\theta)]_{l,k} &= -[\mathbf{R}_{k,l}(\theta)]_{k,l} = \sin \theta, \\ [\mathbf{R}_{k,l}(\theta)]_{i,i} &= 1, \quad i \neq k, \quad i \neq l, \\ [\mathbf{R}_{k,l}(\theta)]_{i,j} &= 0 \quad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

Dans les schémas de réalisation, une rotation  $\mathbf{R}_{kl}(\theta)$  sera représentée comme dans la figure 5.

Enfin  $\mathbf{Z}_{N_0}$  est la matrice carrée diagonale de dimensions  $N_0 \times N_0$  dont les termes diagonaux sont égaux à 1 sauf sur la dernière ligne dont le terme est  $z^{-1}$ .

Pour  $M_0 \geq 1$  et  $N_0 = M_0 + 1$ , nous définissons la matrice unitaire  $\mathbf{U}_0$  de taille  $N_0 \times M_0$  par  $[\mathbf{U}_0]_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $[\mathbf{U}_0]_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ . L'ensemble des matrices  $B$  est défini par

$$B = \prod_{i=1}^{M_0} R_{i, M_0+1}. \quad (106)$$

Pour cette égalité ensembliste les rotations reçoivent toutes les valeurs possibles pour les angles.

Alors, d'après 5.8.6, pour  $m \geq 1$ , l'ensemble des matrices  $S_{M_0, m}^{(1)}$  défini par

$$S_{M_0, m}^{(1)} = B [Z_{N_0} B]^{m-1} \mathbf{U}_0, \quad (107)$$

est une solution de dimension  $mM_0$ .

Ceci veut dire que pour toute valeur de  $\Delta$  un prototype  $P(z)$  défini par

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\Delta-1} z^{-i} P_i(z^\Delta). \quad (108)$$

et si pour tout  $i = 0, \dots, \Delta - 1$ ,

$$P_i(z) = \sum_{a=0}^{M_0 N_0 - 1} z^{-a} V_{a\Delta+i}(z^{M_0 N_0}). \quad (109)$$

où les matrices  $\mathbf{V}^{(i)}(z)$ ,  $i = 0, \dots, \Delta - 1$

$$\mathbf{V}^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} V_i(z) & V_{6\Delta+i}(z) & V_{12\Delta+i}(z) & V_{18\Delta+i}(z) & V_{24\Delta+i}(z) \\ z^{-1}V_{25\Delta+i}(z) & V_{\Delta+i}(z) & V_{7\Delta+i}(z) & V_{13\Delta+i}(z) & V_{19\Delta+i}(z) \\ z^{-1}V_{20\Delta+i}(z) & z^{-1}V_{26\Delta+i}(z) & V_{2\Delta+i}(z) & V_{8\Delta+i}(z) & V_{14\Delta+i}(z) \\ z^{-1}V_{15\Delta+i}(z) & z^{-1}V_{21\Delta+i}(z) & z^{-1}V_{27\Delta+i}(z) & V_{3\Delta+i}(z) & V_{9\Delta+i}(z) \\ z^{-1}V_{10\Delta+i}(z) & z^{-1}V_{16\Delta+i}(z) & z^{-1}V_{22\Delta+i}(z) & z^{-1}V_{28\Delta+i}(z) & V_{4\Delta+i}(z) \\ V_{5\Delta+i}(z) & V_{11\Delta+i}(z) & V_{17\Delta+i}(z) & V_{23\Delta+i}(z) & V_{29\Delta+i}(z) \end{bmatrix} \quad (110)$$

vérifient l'équation (47)

$$\mathbf{V}^{(i)}(z) = \mathbf{T}_1(z)\mathbf{U}^{(i)}(z^{N_0})\mathbf{T}_2(z), \quad i = 0, \dots, \Delta - 1. \quad (111)$$

où les matrices  $\mathbf{U}^{(i)}(z)$ ,  $i = 0, \dots, \Delta - 1$  appartiennent à la solution  $S_{M_0, m}^{(1)}$ , alors  $P(z)$  est à reconstruction parfaite.

- 5 Ici  $\mathbf{T}_1(z)$  est la matrice diagonale  $5 \times 5$ , non causale, ayant pour éléments diagonaux  $1, z, z^2, z^3, z^4, z^{-1}$  et  $\mathbf{T}_2(z)$  la matrice diagonale  $4 \times 4$  d'éléments diagonaux  $1, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}$ . Puisque, pour  $i$  fixé,  $\mathbf{U}^{(i)}(z)$  est dans  $S_{M_0, m}^{(1)}$ , on a d'après (111) et (105),  $\mathbf{B}$  désignant une matrice dand  $B$  pour laquelle les angles ont été fixés.

$$\mathbf{V}^{(i)}(z) = \mathbf{T}_1(z)\mathbf{B} [\mathbf{Z}_{N_0}^{N_0}\mathbf{B}]^{m-1} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{T}_2(z) \quad (112)$$

On introduit alors la matrice  $\hat{\mathbf{B}}(z)$  définie par

$$\hat{\mathbf{B}}(z) = \mathbf{Z}_{N_0} \prod_{i=1}^{M_0} [\mathbf{R}_{i, M_0+1} \mathbf{Z}_{N_0}] . \quad (113)$$

- 10 où les angles des matrices de rotation  $\mathbf{R}_{i, M_0+1}$  ne sont pas indiqués.

Les égalités

$$\mathbf{T}_1(z) \mathbf{B} \mathbf{Z}_{N_0}^{N_0} = \hat{\mathbf{B}}(z) \mathbf{T}_1(z), \quad (114)$$

$$\mathbf{T}_1(z) \mathbf{Z}_{N_0}^{-N_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{T}_2(z) = \mathbf{U}_0, \quad (115)$$

permettent alors d'écrire

$$\mathbf{V}^{(i)}(z) = \hat{\mathbf{B}}^m(z) \mathbf{U}_0. \quad (116)$$

- L'égalité (114) est montrée dans les schémas de réalisation des figures 6A et 6B et  
15 le schéma de réalisation des blocs  $\mathbf{V}^{(i)}(z)$  de la figure 3 est donné dans la figure 7. Les  $mM_0 = 20$  rotations présentes dans le schéma de la figure 7 correspondent à 20 angles différents. Par conséquent dans la figure 3 sont présents  $mM_0\Delta = 240$  angles.

Un exemple d'un tel filtre prototype optimisé pour l'énergie hors-bande, dans le cas d'une phase non linéaire, est représenté aux figures 8A et 8B.

## 7 ANNEXE G : Bibliographie

### Références

- [1] A. Paulraj and T. Strohmer. Method for pulse shape design for ofdm. Patent WO 2006/004980, 2006.
- 5 [2] R. Hleiss, P. Duhamel, and M. Charbit. Oversampled OFDM systems. In *Proc. International Conference on Digital Signal Processing*, Santorini, Greece, July 1997.
- [3] C. Siclet and P. Siohan. Procédé de transmission d'un signal multiporteuses associé à des porteuses modulées synchroniquement, procédés de modulation et de démodulation et dispositifs correspondants. Demande de brevet PCT/FR 02/00329, January 10 2002.
- [4] C. Siclet, P. Siohan, and D. Pinchon. Perfect reconstruction conditions and design of oversampled DFT modulated transmultiplexers. *Eurasip Journal on Applied Signal Processing*, 2006. Article ID 15756, 14 pages.
- [5] M. I. Doroslovački. Product of second moments in time and frequency for discrete-time 15 signals and the uncertainty limit. *Signal Processing*, 67(1), May 1998.

## REVENDECATIONS

1. Dispositif de démodulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné, caractérisé en ce qu'il comprend  $\Delta$  étages,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données reçues représentatives de données source,
- 5 chacun desdits étages comprenant un banc de filtres d'analyse présentant  $N_0$  branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , un banc de filtres d'analyse comprenant une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et une matrice de Fourier  $F_{N_0}$ ,
- et en ce que ladite matrice de décomposition associée à un banc de filtres
- 10 d'analyse est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur de décimation  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite desdites données source,
- et en ce que ledit critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de
- 15 décomposition  $V^{(i)}(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$ , selon les équations suivantes :

$$V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m}$$

avec :

- $m$  un entier supérieur ou égal à 1 ;
- $\left[ V_0^{(i)} \right]_{k+1, l+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- 20 -  $\left[ V_m^{(i)} \right]_{k+1, l+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- $\beta(k, l)$  un entier tel que :
  - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
  - 25 -  $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
  - $p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0)$  ;
  - $q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0)$  ;
  - $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;
- 30 avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division des entiers  $a$  par  $b$ .

2. Dispositif de démodulation selon la revendication 1 caractérisé en ce que ladite matrice de décomposition est constituée de  $m$  matrices identiques  $\hat{B}$ , chaque matrice  $\hat{B}$  étant constituée d'au moins une rotation et d'au moins un décalage,  $m$  étant supérieur ou égal à 1.
- 5 3. Dispositif de démodulation selon la revendication 1, caractérisé en ce que  $N_0$  est égal à  $M_0 + 1$ .
4. Dispositif de démodulation selon la revendication 3, caractérisé en ce que le nombre de rotations d'une matrice  $\hat{B}$  est égal à  $M_0$ .
5. Dispositif de démodulation selon la revendication 1, caractérisé en ce que
- 10 le nombre d'étages  $\Delta$  est un entier pair, supérieur ou égal à 2.
6. Dispositif de démodulation selon la revendication 1, caractérisé en ce que lesdits étages alimentent des premiers moyens de permutation  $P^T$  comprenant  $\Delta N_0$  entrées et  $\Delta N_0$  sorties, alimentant  $N_0$  matrices de Fourier  $F_\Delta$ , qui alimentent elles-mêmes des seconds moyens de permutation  $P$ .
- 15 7. Procédé de démodulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné, caractérisé en ce qu'il met en œuvre  $\Delta$  étages,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données reçues, représentatives de données source, chacun desdits étages mettant en oeuvre un filtrage d'analyse présentant  $N_0$  branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre
- 20 eux et  $M_0 > 1$ , comprenant les étapes suivantes :
- multiplication par une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et
  - multiplication par une matrice de Fourier  $F_{N_0}$ ,
- et en ce que ladite matrice de décomposition associée à un banc de filtres d'analyse est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à
- 25 zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur de décimation  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite desdites données source,
- et en ce que ledit critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$ , selon les équations suivantes :
- 30 
$$V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m}$$
- avec :
- $m$  un entier supérieur ou égal à 1 ;

- $\left[ V_0^{(i)} \right]_{k+1,l+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- $\left[ V_m^{(i)} \right]_{k+1,l+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- 5 -  $\beta(k, l)$  un entier tel que :
  - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
  - $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
  - $p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0)$  ;
  - $q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0)$  ;
- 10 -  $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;

avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division des entiers a par b.

8. Procédé de démodulation selon la revendication 7, caractérisé en ce que ladite matrice de décomposition est constituée de m matrices identiques  $\hat{B}$ , chaque matrice  $\hat{B}$  étant constituée d'au moins une rotation et d'au moins un décalage, m étant supérieur ou égal à 1, et en ce que ledit procédé comprend une phase préalable de détermination desdites matrices  $\hat{B}$ , de façon que lesdites matrices  $\hat{B}$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$20 \quad \hat{B}(z) = Z_{N_0} \prod_{i=1}^{M_0} [R_{i, M_0+1} Z_{N_0}]$$

où  $Z_{N_0}$  est une matrice carrée diagonale assurant un décalage et  $R_{i, M_0+1}$  une matrice de rotation.

9. Programme d'ordinateur comportant des instructions pour la mise en œuvre du procédé de démodulation selon la revendication 7 lorsque ledit programme est exécuté par un processeur.

10. Dispositif de modulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné, caractérisé en ce qu'il comprend  $\Delta$  étages,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données source, chacun desdits étages comprenant un banc de filtres de synthèse présentant  $N_0$  branches et un facteur d'expansion égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre

eux et  $M_0 > 1$ , un banc de filtres de synthèse comprenant une matrice de Fourier conjuguée  $F_{N_0}^*$  et une matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$ ,

et en ce que ladite matrice de décomposition conjuguée associée à un banc de filtres d'analyse est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont

- 5 forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur d'expansion  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une reconstruction parfaite desdites données source,

et en ce que ledit critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$  de taille  $M_0 \times N_0$ ,

- 10 selon les équations suivantes :

$$V^{(i)*}(z) = V^{(i)T}(z^{-1}) \text{ avec } V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m},$$

où T correspond à l'opération de transposition, avec :

- m un entier supérieur ou égal à 1 ;
- $\left[ V_0^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- 15 -  $\left[ V_m^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- $\beta(k, l)$  un entier tel que :
  - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
  - 20 -  $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
  - $p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0)$  ;
  - $q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0)$  ;
  - $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;

- 25 avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division de a par b.

**11.** Procédé de modulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné, caractérisé en ce qu'il met en œuvre  $\Delta$  étages,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données source,

chacun desdits étages mettant en oeuvre un filtrage de synthèse présentant  $N_0$  branches et un facteur d'expansion égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , comprenant les étapes suivantes :

- multiplication par une matrice de Fourier conjuguée  $F_{N_0}^*$ ,
  - 5 - multiplication par une matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$  ;
- et en ce que ladite matrice de décomposition conjuguée associée à un banc de filtres d'analyse est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur d'expansion  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ , de façon à permettre une
- 10 reconstruction parfaite desdites données source,
- et en ce que ledit critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$  de taille  $M_0 \times N_0$ ,

selon les équations suivantes :

$$V^{(i)*}(z) = V^{(i)T}(z^{-1}) \text{ avec } V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m},$$

- 15 où T correspond à l'opération de transposition, avec :
- m un entier supérieur ou égal à 1 ;
  - $\left[ V_0^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
  - $\left[ V_m^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
  - $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
  - 20 -  $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
  - $\beta(k, l)$  un entier tel que :
    - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
    - $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
    - $p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0)$  ;
    - 25 -  $q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0)$  ;
    - $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;

avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division de a par b.

12. Programme d'ordinateur comportant des instructions pour la mise en œuvre du procédé de modulation selon la revendication 11 lorsque ledit programme est exécuté par un processeur.

13. Système de transmission d'un signal multiporteuse suréchantillonné,  
5 caractérisé en ce qu'il comprend :

- un dispositif de modulation comprenant  $\Delta$  étages,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données source,

chacun desdits étages comprenant un banc de filtres de synthèse  
présentant  $N_0$  branches et un facteur d'expansion égal à  $M_0$ , avec  $N_0$   
10 et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , un banc de filtres de synthèse  
comportant une matrice de Fourier conjuguée  $F_{N_0}^*$  et une matrice de  
décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$ ,

ladite matrice de décomposition conjuguée associée à un banc de filtres  
d'analyse est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont  
15 forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur  
d'expansion  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ ,

ledit critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de  
décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$  de taille  $M_0 \times N_0$ ,

selon les équations suivantes :

$$20 \quad V^{(i)*}(z) = V^{(i)T}(z^{-1}) \text{ avec } V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m},$$

où T correspond à l'opération de transposition, avec :

- m un entier supérieur ou égal à 1 ;
- $\left[ V_0^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- $\left[ V_m^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- 25 -  $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- $\beta(k, l)$  un entier tel que :
  - $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l) M_0$  ;
  - $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l) N_0$  ;
  - 30 -  $p(k, l) = \text{rem}((k-l)v, M_0)$  ;
  - $q(k, l) = \text{rem}((k-l)u, N_0)$  ;

- $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;
- avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division de a par b, et
- 5        - un dispositif de démodulation comprenant  $\Delta$  étages, alimentés par des données reçues, représentatives des données source,
- chacun desdits étages comprenant un banc de filtres d'analyse présentant  $N_0$  branches et un facteur de décimation égal à  $M_0$ , un banc de filtres d'analyse comprenant une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  et une
- 10        matrice de Fourier  $F_{N_0}$ ,
- et en ce que ladite matrice de décomposition associée à un banc de filtres d'analyse est une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur de décimation  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ ,
- 15        ledit critère prédéterminé force à zéro les coefficients de la matrice de décomposition conjuguée  $V^{(i)*}(z)$  de taille  $M_0 \times N_0$ ,
- selon les équations suivantes :
- $$V^{(i)*}(z) = V^{(i)T}(z^{-1}) \text{ avec } V^{(i)}(z) = V_0^{(i)} + V_1^{(i)} z^{-1} + \dots + V_m^{(i)} z^{-m},$$
- où T correspond à l'opération de transposition, avec :
- 20        - m un entier supérieur ou égal à 1 ;
- $\left[ V_0^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 0$  ;
- $\left[ V_m^{(i)*} \right]_{l+1, k+1} = 0$  si  $\alpha(k, M_0) - \varepsilon(k, l) = 1$  ;
- $\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_0 \text{ divise } k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
- $\varepsilon(k, l) = \alpha(k) - \beta(k, l)$  ;
- 25        -  $\beta(k, l)$  un entier tel que :
- $p(k, 0) + p(0, l) - p(k, l) = \beta(k, l)M_0$  ;
- $q(k, 0) + q(0, l) - q(k, l) = \beta(k, l)N_0$  ;
- $p(k, l) = \text{rem}((k - l)v, M_0)$  ;
- $q(k, l) = \text{rem}((k - l)u, N_0)$  ;
- 30        -  $(u, v)$  une paire d'entiers telle que  $uM_0 - vN_0 = 1$ , avec  $|u| < N_0$  et  $|v| < M_0$  ;

avec  $0 \leq k \leq N_0 - 1$  et  $0 \leq l \leq M_0 - 1$  et  $\text{rem}(a, b)$  un opérateur définissant le reste de la division de  $a$  par  $b$ ,

de façon à permettre une reconstruction parfaite desdites données source.

- 14.** Dispositif de démodulation d'un signal multiporteuse suréchantillonné,
- 5 mettant en œuvre un filtre prototype implémenté sous sa forme polyphase, caractérisé en ce qu'il comprend :
- $\Delta$  bancs de filtres d'analyse,  $\Delta$  étant un entier supérieur ou égal à 1, alimentés par des données reçues représentatives de données source après décimation selon un facteur de décimation  $\Delta$  et application d'un retard,
  - 10 chacun desdits bancs de filtres d'analyse présentant  $N_0$  branches, un facteur de décimation égal à  $M_0$ , avec  $N_0$  et  $M_0$  premiers entre eux et  $M_0 > 1$ , une matrice de décomposition  $V^{(i)}(z)$  de taille  $N_0 \times M_0$  et une matrice de Fourier  $F_{N_0}$  de taille  $N_0 \times N_0$ ,
  - ladite matrice de décomposition associée à un banc de filtres d'analyse
  - 15 étant une matrice para-unitaire, dont certains coefficients sont forcés à zéro selon un critère prédéterminé tenant compte dudit facteur de décimation  $M_0$  et dudit nombre de branches  $N_0$ ,
  - des moyens de permutation des données obtenues en sortie desdits bancs de filtres d'analyse, délivrant des données permutées,
  - 20 -  $N_0$  matrices de Fourier  $F_{\Delta}$  de taille  $\Delta \times \Delta$ , transformant lesdites données permutées en données transformées,
  - des moyens de permutation desdites données transformées, délivrant des données démodulées permettant une reconstruction parfaite desdites données source.

25

1/4

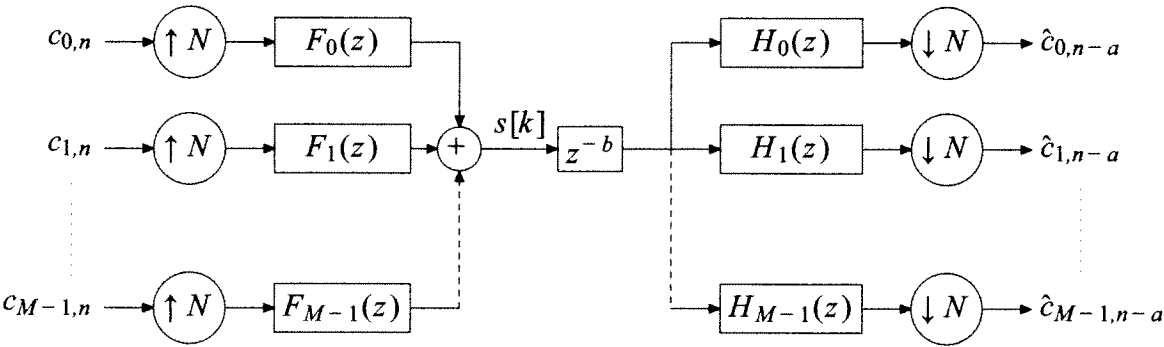


Fig. 1

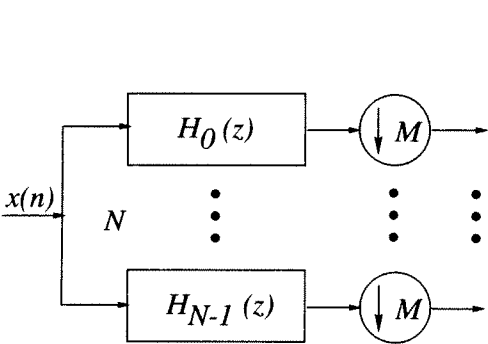


Fig. 2A

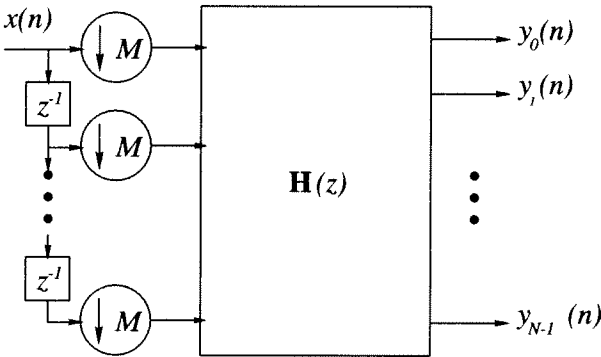


Fig. 2B

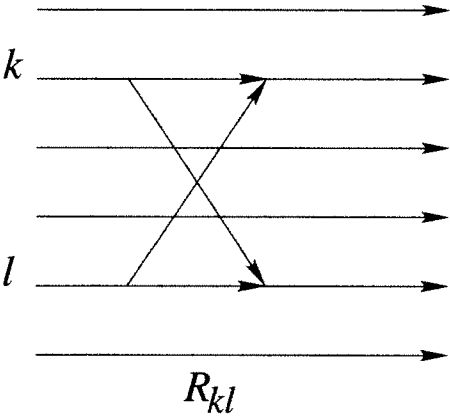


Fig. 5

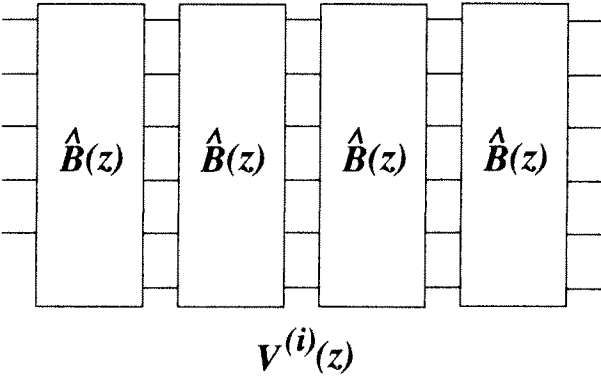


Fig. 7

2/4

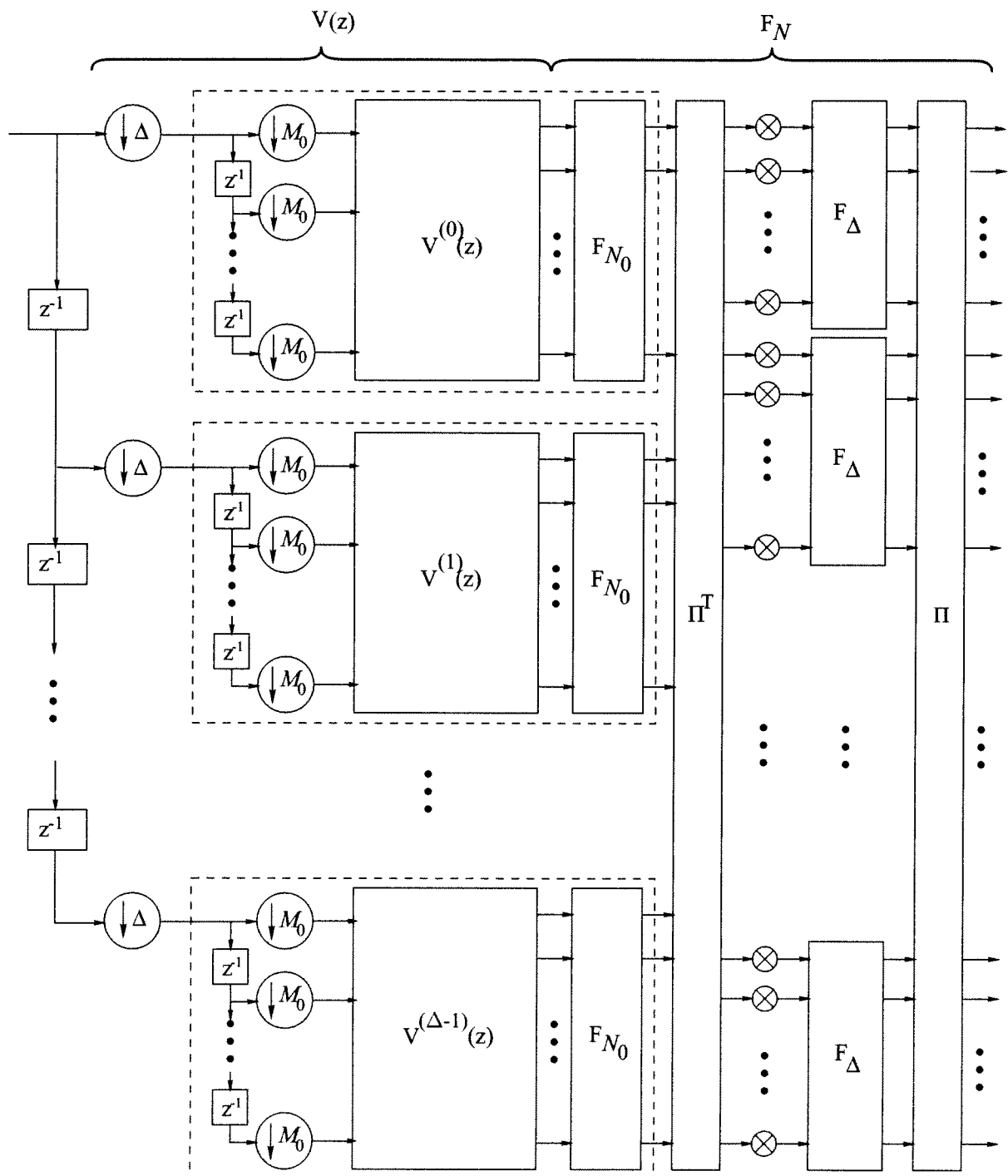


Fig. 3

3/4

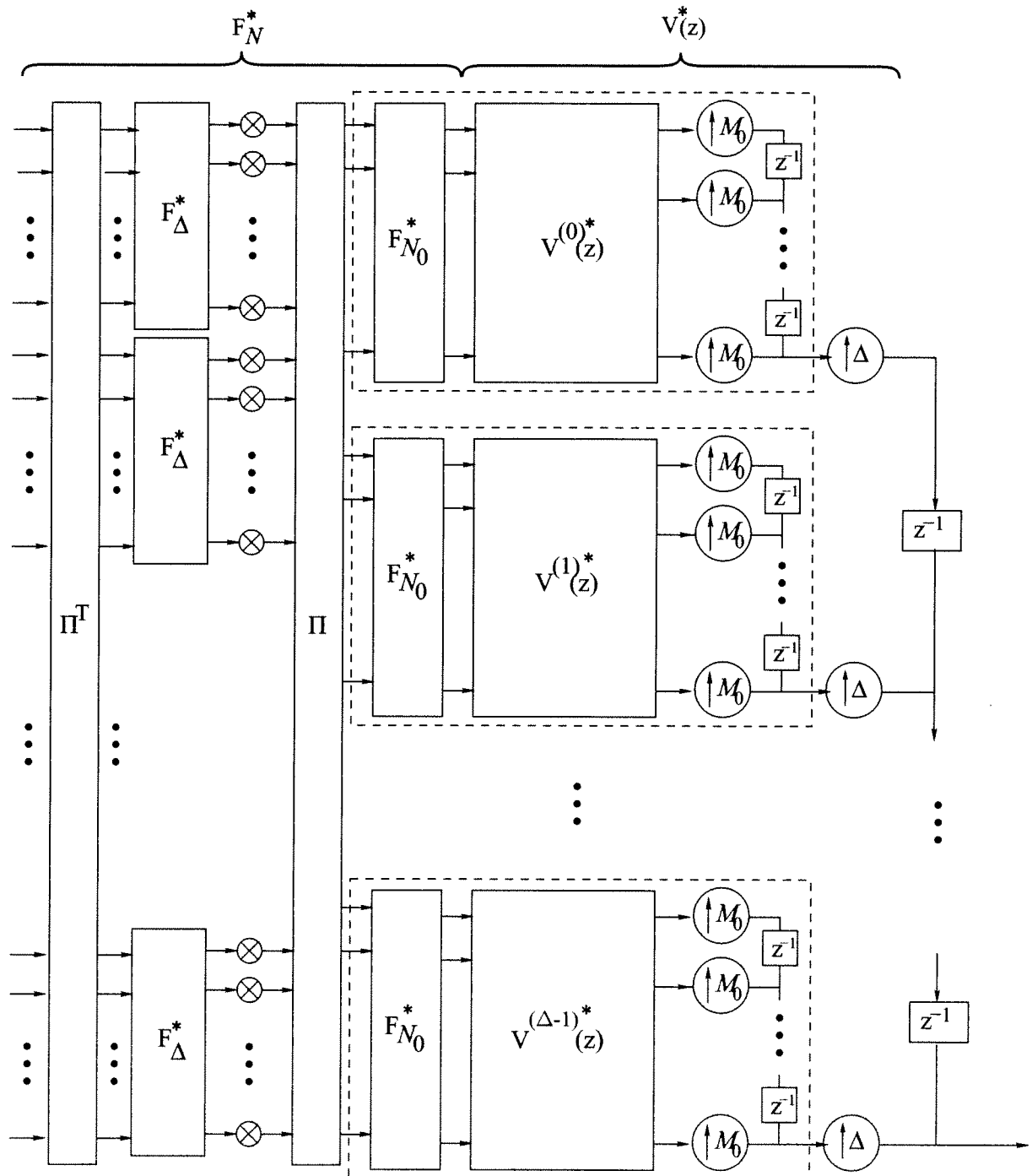


Fig. 4

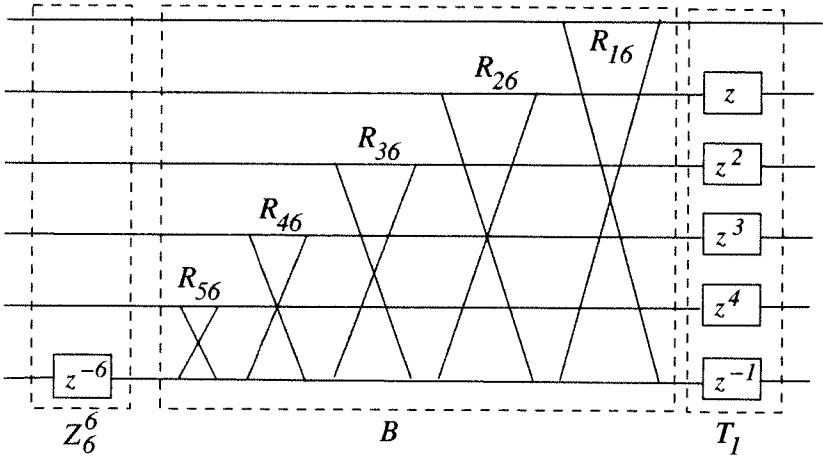


Fig. 6A

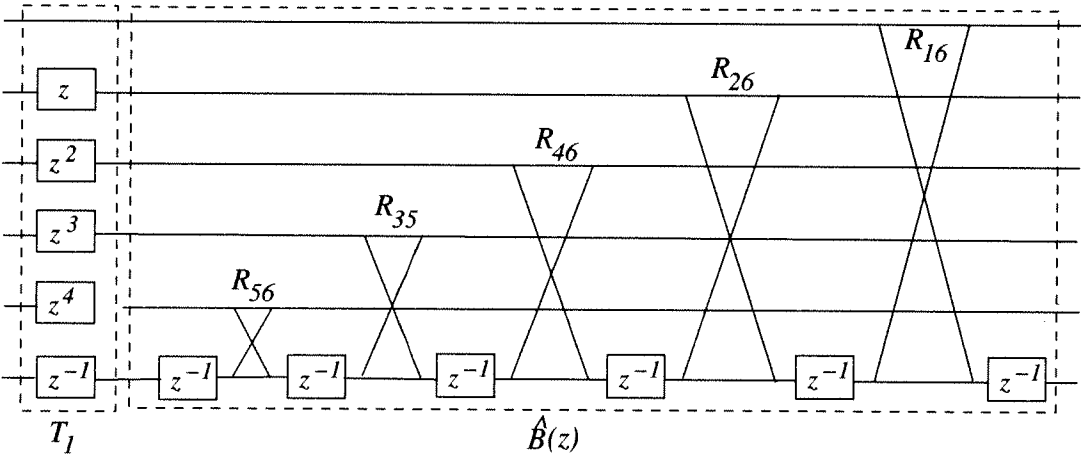


Fig. 6B

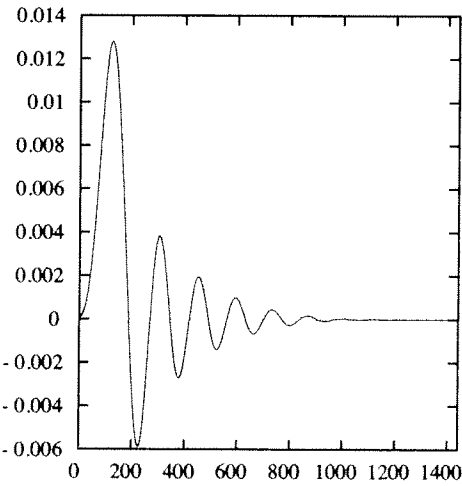


Fig. 8A

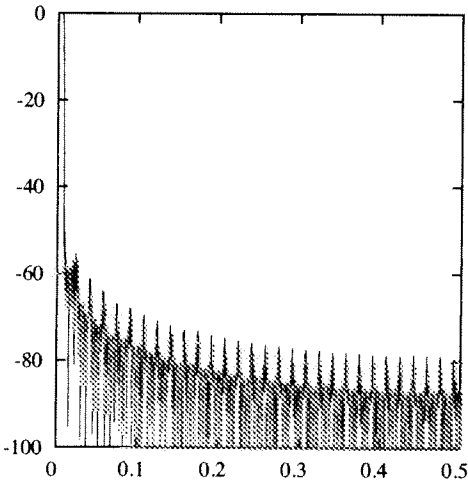


Fig. 8B

## INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No

PCT/FR2009/052641

## A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

INV. H04L27/26 H03H17/02  
ADD.

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

## B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

H04L H03H

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practical, search terms used)

EPO-Internal

## C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

| Category* | Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Relevant to claim No. |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| X         | CVETKOVIC Z: "Oversampled modulated filter banks and tight Gabor frames in 1<2>(Z)"<br>IMAGE AND MULTI-DIMENSIONAL SIGNAL PROCESSING, SIGNAL PROCESSING APPLICATIONS DEVELOPMENT, PISCATAWAY, NJ : IEEE SERVICE CENTER,<br>vol. 2, 9 May 1995 (1995-05-09), pages 1456-1459, XP010151589<br>ISBN: 978-0-7803-2431-2<br>Paragraphes 1., 2., and 3.<br>-----<br>-/-- | 14                    |
| A         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1,7,9-13              |

☒ Further documents are listed in the continuation of Box C.

☐ See patent family annex.

## \* Special categories of cited documents :

"A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

"E" earlier document but published on or after the international filing date

"L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

"O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

"P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

"T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

"X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

"Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art.

"&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

23 April 2010

Date of mailing of the international search report

29/04/2010

Name and mailing address of the ISA/

European Patent Office, P.B. 5818 Patentlaan 2  
NL - 2280 HV Rijswijk  
Tel. (+31-70) 340-2040,  
Fax: (+31-70) 340-3016

Authorized officer

Chave, Julien

## INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No

PCT/FR2009/052641

C(Continuation). DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

| Category* | Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Relevant to claim No. |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| A         | XIQI GAO ET AL: "On Factorization of<br>-Channel Paraunitary Filterbanks"<br>IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING,<br>IEEE SERVICE CENTER, NEW YORK, NY, US,<br>vol. 49, no. 7, 1 July 2001 (2001-07-01),<br>XP011059341<br>ISSN: 1053-587X<br>the whole document<br>-----                                                                                                                                    | 1,7,9-13              |
| A         | KOK C W ET AL: "Structures and<br>factorizations of paraunitary M band N<br>channel multifilters"<br>PROCEEDINGS OF 1997 IEEE INTERNATIONAL<br>SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS, 1997.<br>ISCAS '97., HONG KONG 9-12 JUNE 1997, NEW<br>YORK, NY, USA, IEEE, US,<br>vol. 1, 9 June 1997 (1997-06-09), pages<br>361-364, XP010236050<br>ISBN: 978-0-7803-3583-7<br>figure 3<br>Paragraphes 1., 2. et 3.<br>----- | 1,7,9-13              |
| A         | DIDIER PINCHON ET AL: "Angular<br>Parameterization of Real Paraunitary<br>Matrices"<br>IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS, IEEE<br>SERVICE CENTER, PISCATAWAY, NJ, US,<br>vol. 15, 1 January 2008 (2008-01-01),<br>pages 353-356, XP011206723<br>ISSN: 1070-9908<br>Paragraphes 1., 2. et 3.<br>-----                                                                                                               | 1,7,9-13              |

# RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Demande internationale n°

PCT/FR2009/052641

**A. CLASSEMENT DE L'OBJET DE LA DEMANDE**  
 INV. H04L27/26 H03H17/02  
 ADD.

Selon la classification internationale des brevets (CIB) ou à la fois selon la classification nationale et la CIB

**B. DOMAINES SUR LESQUELS LA RECHERCHE A PORTE**

Documentation minimale consultée (système de classification suivi des symboles de classement)  
 H04L H03H

Documentation consultée autre que la documentation minimale dans la mesure où ces documents relèvent des domaines sur lesquels a porté la recherche

Base de données électronique consultée au cours de la recherche internationale (nom de la base de données, et si cela est réalisable, termes de recherche utilisés)  
 EPO-Internal

**C. DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS**

| Catégorie* | Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indication des passages pertinents                                                                                                                                                                                                                                                                     | no. des revendications visées |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| X          | CVETKOVIC Z: "Oversampled modulated filter banks and tight Gabor frames in 1<2>(Z)"<br>IMAGE AND MULTI-DIMENSIONAL SIGNAL PROCESSING, SIGNAL PROCESSING APPLICATIONS DEVELOPMENT, PISCATAWAY, NJ : IEEE SERVICE CENTER,<br>vol. 2, 9 mai 1995 (1995-05-09), pages 1456-1459, XP010151589<br>ISBN: 978-0-7803-2431-2<br>Paragraphes 1., 2., and 3.<br>-----<br>-/-- | 14                            |
| A          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1,7,9-13                      |

☒ Voir la suite du cadre C pour la fin de la liste des documents

☐ Les documents de familles de brevets sont indiqués en annexe

\* Catégories spéciales de documents cités:

"A" document définissant l'état général de la technique, non considéré comme particulièrement pertinent

"E" document antérieur, mais publié à la date de dépôt international ou après cette date

"L" document pouvant jeter un doute sur une revendication de priorité ou cité pour déterminer la date de publication d'une autre citation ou pour une raison spéciale (telle qu'indiquée)

"O" document se référant à une divulgation orale, à un usage, à une exposition ou tous autres moyens

"P" document publié avant la date de dépôt international, mais postérieurement à la date de priorité revendiquée

"T" document ultérieur publié après la date de dépôt international ou la date de priorité et n'appartenant pas à l'état de la technique pertinent, mais cité pour comprendre le principe ou la théorie constituant la base de l'invention

"X" document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme nouvelle ou comme impliquant une activité inventive par rapport au document considéré isolément

"Y" document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme impliquant une activité inventive lorsque le document est associé à un ou plusieurs autres documents de même nature, cette combinaison étant évidente pour une personne du métier

"&" document qui fait partie de la même famille de brevets

Date à laquelle la recherche internationale a été effectivement achevée

23 avril 2010

Date d'expédition du présent rapport de recherche internationale

29/04/2010

Nom et adresse postale de l'administration chargée de la recherche internationale  
 Office Européen des Brevets, P.B. 5818 Patentlaan 2  
 NL - 2280 HV Rijswijk  
 Tel. (+31-70) 340-2040,  
 Fax: (+31-70) 340-3016

Fonctionnaire autorisé

Chave, Julien

## C(suite). DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS

| Catégorie* | Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indication des passages pertinents                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | no. des revendications visées |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| A          | <p>XIQI GAO ET AL: "On Factorization of -Channel Paraunitary Filterbanks"<br/> IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING,<br/> IEEE SERVICE CENTER, NEW YORK, NY, US,<br/> vol. 49, no. 7,<br/> 1 juillet 2001 (2001-07-01), XP011059341<br/> ISSN: 1053-587X<br/> le document en entier<br/> -----</p>                                                                                                                  | 1,7,9-13                      |
| A          | <p>KOK C W ET AL: "Structures and factorizations of paraunitary M band N channel multifilters"<br/> PROCEEDINGS OF 1997 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS, 1997.<br/> ISCAS '97., HONG KONG 9-12 JUNE 1997, NEW YORK, NY, USA, IEEE, US,<br/> vol. 1, 9 juin 1997 (1997-06-09), pages 361-364, XP010236050<br/> ISBN: 978-0-7803-3583-7<br/> figure 3<br/> Paragraphes 1., 2. et 3.<br/> -----</p> | 1,7,9-13                      |
| A          | <p>DIDIER PINCHON ET AL: "Angular Parameterization of Real Paraunitary Matrices"<br/> IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS, IEEE SERVICE CENTER, PISCATAWAY, NJ, US,<br/> vol. 15, 1 janvier 2008 (2008-01-01), pages 353-356, XP011206723<br/> ISSN: 1070-9908<br/> Paragraphes 1., 2. et 3.<br/> -----</p>                                                                                                                | 1,7,9-13                      |