



(12) 发明专利

(10) 授权公告号 CN 1830149 B

(45) 授权公告日 2010.05.26

(21) 申请号 200480021785.5

(51) Int. Cl.

(22) 申请日 2004.10.14

H03M 13/11 (2006.01)

(30) 优先权数据

10-2003-0071456 2003.10.14 KR

(56) 对比文件

(85) PCT申请进入国家阶段日

2006.01.26

US 20020042899 A1, 2002.04.11, 全文.

(86) PCT申请的申请数据

PCT/KR2004/002630 2004.10.14

WO 02099976 A2, 2002.12.12, 全文.

WO 02103631 A1, 2002.12.27, 全文.

审查员 张坦

(87) PCT申请的公布数据

W02005/036758 EN 2005.04.21

(73) 专利权人 三星电子株式会社

地址 韩国京畿道

(72) 发明人 柳南烈 金闵龟

(74) 专利代理机构 北京市柳沈律师事务所

11105

代理人 邸万奎 黄小临

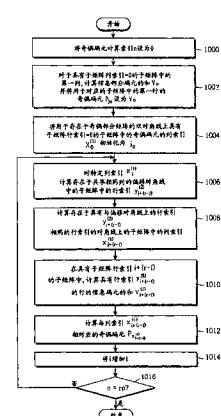
权利要求书 2 页 说明书 18 页 附图 15 页

(54) 发明名称

用于对低密度奇偶校验码编码的方法

(57) 摘要

一种用于对低密度奇偶校验 (LDPC) 码编码的设备和方法。用于生成由信息部分矩阵和奇偶部分矩阵形成的低密度奇偶校验码的方法包括以下步骤：将信息部分矩阵转换为阵列码结构，并对每个子矩阵分配等级序列；扩展与奇偶部分矩阵相对应的双对角线矩阵，使得对角线之间的偏移值具有随机值；提升正规化的双对角线矩阵；对于提升的正规化双对角线矩阵的每个子矩阵确定用于循环列移位的偏移值；以及确定与奇偶部分矩阵的列相对应的奇偶码元。



1. 一种用于对由信息部分矩阵和奇偶部分矩阵组成的低密度奇偶校验码进行编码的方法，该信息部分矩阵基于阵列码结构来定义，而该奇偶部分矩阵为双对角线矩阵，所述方法包括以下步骤：

将信息部分矩阵改变为阵列码结构，并对每个子矩阵列分配等级序列；

扩展奇偶部分矩阵，使得在作为奇偶部分矩阵的双对角线矩阵中，对角线之间的偏移值具有预定值；

使用信息部分矩阵的子矩阵提升双对角线矩阵；

对于提升的双对角线矩阵的每个子矩阵确定用于循环列移位的偏移值；以及

执行编码过程以确定与奇偶部分矩阵的列相对应的奇偶码元，

其中所述编码过程包括如下处理：

(a) 确定奇偶部分矩阵的对角线上具有子矩阵列索引 0 的子矩阵中的第一行的奇偶码元；

(b) 对于特定的列索引 $x_i(1)$ ，计算存在于共享相同列的偏移对角线中的子矩阵中的行索引，其中 $x_i(1)$ 表示存在于对角线中的具有列索引 i 的子矩阵中的列索引；

(c) 确定与如下的列索引对应的奇偶码元，所述列索引存在于在具有与步骤 (b) 中设置的行索引相同的行索引的对角线上的子矩阵中；以及

(d) 重复执行步骤 (b) 和 (c)，直到完成奇偶部分矩阵的生成为止。

2. 如权利要求 1 所述的方法，其中，根据如下的方程而形成等级序列：

$$D = [15, 15, 15, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$$

3. 如权利要求 1 所述的方法，其中，在双对角线矩阵中，对角线之间的偏移值与列数互质。

4. 如权利要求 1 所述的方法，其中，信息部分矩阵的子矩阵中的行数为质数。

5. 如权利要求 1 所述的方法，其中，在作为奇偶部分矩阵的双对角线矩阵中用于对角线上的子矩阵的循环行移位的偏移值的和与用于偏移对角线上的子矩阵的循环行移位的偏移值的和之间的差不为 0。

6. 如权利要求 1 所述的方法，其中，在步骤 (a) 中，通过存在于与确定了其奇偶码元的子矩阵中的行索引相同的行中的信息部分矩阵的信息码元的和，而确定奇偶码元。

7. 如权利要求 1 所述的方法，其中，在步骤 (b) 中，根据下面的方程而设置子矩阵中的行索引：

$$y_{i+(r-f)}^{(2)} = x_i^{(1)} - j_{2(i+(r-f))+1},$$

其中，

$y_{i+(r-f)}^{(2)}$ 表示在偏移对角线上具有子矩阵列索引 i 的子矩阵中的行索引，而 $j_{2(i+(r-f))+1}$ 表示用于在偏移对角线上具有子矩阵列索引 i 的子矩阵的循环列移位的偏移值。

8. 如权利要求 1 所述的方法，其中，在步骤 (c) 中，根据下面的方程而确定奇偶码元：

$$p_{x_{i+(r-f)}^{(1)}} = p_{x_i^{(1)}} + v_{y_{i+(r-f)}^{(2)}},$$

其中， $x_{i+(r-f)}^{(1)}$ 表示在偏移对角线上具有子矩阵列索引 $i+(r-f)$ 的子矩阵中的列索引， $p_{x_{i+(r-f)}^{(1)}}$ 表示与 $x_{i+(r-f)}^{(1)}$ 相对应的奇偶码元， $p_{x_i^{(1)}}$ 表示与列索引 $x_i^{(1)}$ 相对应的奇偶码元，而 $v_{y_{i+(r-f)}^{(2)}}$ 表示在具有子矩阵列索引 $i+(r-f)$ 的子矩阵中存在于具有行索引 $y_{i+(r-f)}^{(2)}$ 的行中的信息码

元的和。

用于对低密度奇偶校验码编码的方法

技术领域

[0001] 本发明一般涉及用于对数据编码的方法，并且，特别涉及用于对低密度奇偶校验(LDPC)码编码的方法。

背景技术

[0002] 通常，通信系统在传送之前对传送数据编码，以增加传送的稳定性，并且防止过多的重新传送，以增加传送效率。为对传送数据编码，移动通信系统使用卷积编码、透平(turbo)编码、以及准互补透平编码(QCTC)。上述编码方案的使用有助于增加数据传送的稳定性以及传送效率。

[0003] 近来，无线通信系统正在发展为能够以非常高的速度传送数据的高级无线通信系统。高级无线通信系统期望以较高的速度传送数据。因而，存在对能够得到比上述当前编码方案的效率更高效率的高级编码方案的需求。

[0004] 提供了低密度奇偶校验(LDPC)编码，作为用来满足该需求的新编码方案。下面，将在此描述低密度奇偶校验码的详细描述。在20世纪60年代早期，首先由Gallager提出低密度奇偶校验码，并且，在20世纪90年代后期，由MacKay重新研究低密度奇偶校验码。由MacKay重新研究的低密度奇偶校验码基于和积算法。由于置信度传播(belief propagation)解码的使用，作为能够显示出接近香农(Shannon)容量极限的优异性能的码，低密度奇偶校验码已开始吸引公众的注意。

[0005] 之后，Richardson和Chung提出了一种密度演化(density evolution)技术，用于根据在对构成低密度奇偶校验码的因子图(factor graph)解码期间生成和更新的消息的概率分布的迭代(iteration)，而跟踪变化。对于密度演化技术和对非循环(cycle-free)因子图的无限迭代，Richardson和Chung发明了能够允许误差概率收敛到“0”的信道参数(或阈值)。也就是说，Richardson和Chung提出了能够使因子图上的可变节点和校验节点的信道参数最大化的等级分布。另外，Richardson和Chung在理论上示出了：即使对于存在循环的有限长度的LDPC码，也可适用这样的情况。

[0006] 另外，Richardson和Chung示出了：使用密度演化技术，不规则LDPC码的理论信道容量可与香农容量极限接近至仅0.0045dB。具体地，引领LDPC码的设计和硬件(H/W)的实现的Flarion公司已提出了能够实现并行解码器的多边沿(multi-edge)型向量LDPC码，其中，即使对于具有短长度的LDPC码来说，所述并行解码器也具有比透平码的帧误码率更低的帧误码率。

[0007] LDPC码被认为是在下一代移动通信系统中对透平码的强有力的取代。这是由于LDPC码对于解码器实现的并行结构和低复杂度、以及与性能有关的低误差下限(floor)和良好的帧误码率。因此，期望未来的研究将提供具有更佳特性的LDPC码。

[0008] 然而，在实现中，当前的LDPC码在编码过程中比透平码更为复杂，并需要能够在短帧大小下提供比透平码更佳的性能的优化码的结构。尽管已对解决此问题而做出了积极的研究，但仍未提出能够对优化LDPC码编码的方案。

发明内容

- [0009] 因此,本发明的一个目的在于提供具有简单编码过程的 LDPC 编码方法。
- [0010] 本发明的另一个目的在于提供具有在短的帧大小下的改进性能的 LDPC 编码方法。
- [0011] 为实现以上和其它目的,提供了一种方法,用于生成由信息部分矩阵和奇偶部分矩阵组成的低密度奇偶校验码。该方法包括以下步骤:将信息部分矩阵改变为阵列码结构,并对每个子矩阵列分配等级序列;扩展奇偶部分矩阵,使得在作为奇偶部分矩阵的一般化(generalized) 双对角线矩阵中,对角线之间的偏移值具有预定值;提升一般化双对角线矩阵;对于提升的一般化双对角线矩阵的每个子矩阵确定用于循环列移位的偏移值;以及执行用于确定与奇偶部分矩阵的列相对应的奇偶码元的编码过程。
- [0012] 优选地,等级序列由 $D = [15, 15, 15, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ 组成,并且在一般化双对角线矩阵中,对角线之间的偏移值与列数互质。
- [0013] 优选地,在作为奇偶部分矩阵的一般化双对角线矩阵中用于对角线上的子矩阵的循环行移位的偏移值的和与用于偏移对角线上的子矩阵的循环行移位的偏移值的和之间的差不为 0。
- [0014] 优选地,编码过程包括以下过程:(a) 确定奇偶部分矩阵的对角线上具有子矩阵列索引 0 的子矩阵中的第一行的奇偶码元;(b) 对于特定的列索引 $x_i^{(1)}$, 计算存在于共享相同列的偏移对角线中的子矩阵中的行索引,其中 $x_i^{(1)}$ 表示存在于对角线中的具有列索引 i 的子矩阵中的列索引;(c) 确定具有对角线上的子矩阵中的所设置的子矩阵中的相同的行索引的奇偶码元,其中,所述对角线具有与偏移对角线上的子矩阵的子矩阵行索引相同的子矩阵行索引;以及(d) 重复执行步骤(b) 和(c),直到完成奇偶矩阵的生成为止。
- [0015] 优选地,在步骤(a) 中,通过存在于与确定了其奇偶码元的子矩阵中的行索引相同的行中的信息部分矩阵的信息码元的和,而确定奇偶码元。

附图说明

- [0016] 从下面与附图相结合的详细描述中,本发明的以上和其它目的、特征、以及优点将变得更为清楚,附图中:
- [0017] 图 1 是图解用于常规 (p, r) 阵列码的奇偶校验矩阵的图;
- [0018] 图 2 是图解在将存在于特定列中的 1 的最大数目定义为 d_v 、将这样的子矩阵列的数目定义为 n_v 、且存在于其余子矩阵列中的 1 的数目总为 3 的情况下的矩阵 H_d 的例子的图;
- [0019] 图 3 是图解不规则重复累积码的因子图结构的图;
- [0020] 图 4 是图解具有不规则重复累积码的低密度奇偶校验码的矩阵的图;
- [0021] 图 5 是图解奇偶矩阵的图,其中,双对角线矩阵的偏移值“f”被提升到特定值;
- [0022] 图 6 是图解图 5 的编码过程中依次计算 P_0, P_{r-f}, P_{r-2f} 的值的过程的图;
- [0023] 图 7 是图解以在章节 A 中描述的方法生成的奇偶校验矩阵的信息部分 H_d 的例子的图,其中,最大可变节点等级为 15;
- [0024] 图 8 是图解通过以用 3×3 单位矩阵或 $3 \times 3“0”$ 矩阵来替代 4×4 矩阵中的每个元素的方法、对基本 4×4 矩阵进行矩阵提升(matrix-lifting) 而得到的 12×12 矩阵的图;

- [0025] 图 9 是图解通过用 $p \times p$ 循环排列子矩阵来进行矩阵提升而构造的奇偶矩阵 H_p 的图；
- [0026] 图 10 是图解根据本发明的优选实施例用于生成奇偶部分的矩阵的方法的流程图；
- [0027] 图 11 是图解对于 $r = 15$ 、 $f = 7$ 且 $p = 89$ 而提升的一般化的双对角线矩阵的奇偶矩阵的图；
- [0028] 图 12 是图解用于证明本发明的效率的迭代 (iterative) 置信度传播解码过程的流程图；
- [0029] 图 13A 是图解对于 $n = 870$ 且 $p = 29$ 的信息部分 H_d 的矩阵的例子的图；
- [0030] 图 13B 是图解对于 $n = 870$ 且 $p = 29$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图；
- [0031] 图 13C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图；
- [0032] 图 14A 是图解对于 $n = 1590$ 且 $p = 53$ 的信息部分 H_d 的矩阵的例子的图；
- [0033] 图 14B 是图解对于 $n = 1590$ 且 $p = 53$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图；
- [0034] 图 14C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图；
- [0035] 图 15A 是图解对于 $n = 3090$ 且 $p = 103$ 的信息部分 H_d 的矩阵的例子的图；
- [0036] 图 15B 是图解对于 $n = 3090$ 且 $p = 103$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图；
- [0037] 图 15C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图；
- [0038] 图 16A 是图解对于 $n = 7710$ 且 $p = 257$ 的信息部分 H_d 的矩阵的例子的图；
- [0039] 图 16B 是图解对于 $n = 7710$ 且 $p = 257$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图；
- [0040] 图 16C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图；和
- [0041] 图 16D 是根据迭代次数的变化的低密度奇偶校验码的仿真结果图。

具体实施方式

[0042] 现在, 将参照附图来描述本发明的优选实施例。在附图中, 即使在不同的图中绘出相同或相似的元素, 也用相同的附图标记来表示相同或相似的元素。在下面的描述中, 为了简练起见, 已省略了在这里合并的已知功能和配置的详细描述。

[0043] 在下面的描述中, 本发明提出了能够显示出简单的编码、以及良好的性能的新的 LDPC 码。为此目的, 本发明定义了新的奇偶校验矩阵。也就是说, 本发明提出了使用新的奇偶校验矩阵的新 LDPC 码。另外, 本发明示出了可通过线性计算而简单地对新 LDPC 码编码, 并提出了用于该 LDPC 码的编码方法。最后, 本发明示出了: 由于置信度传播解码, 新 LDPC 码具有比在 CDMA20001x EV-DV 标准中使用的透平码的解码性能更佳的解码性能。

[0044] 为了方便起见, 将针对具有 1/2 码率的 LDPC 码的性能和实现而做出本发明的描述。然而, 可在本发明的范围内提升码率。

1. 奇偶校验矩阵设计

[0046] 在此章节中, 本发明定义了通过移植 (graft) 并应用定义阵列码和不规则重复累积 (IRA) 码的奇偶校验矩阵结构而生成的新的奇偶校验矩阵。并且, 将针对用于生成具有较大大小的矩阵、同时维持以此方式生成的基本矩阵的特性的方法而做出描述。

A. 阵列码结构

[0048] 通常, 如图 1 而定义用于 (p, r) 阵列码的奇偶校验矩阵。图 1 是图解用于常规 $(p,$

r) 阵列码的奇偶校验矩阵的图。通过参照图 1, 现在将针对用于常规 (p, r) 阵列码的奇偶校验矩阵而做出描述。

[0049] 在图 1 中, p 表示质数, 而 σ^j 表示通过对 $p \times p$ 单位矩阵 I 的各行进行按照 j 的循环移位而得到的 $p \times p$ 循环排列矩阵, 其中单位矩阵 I 是具有大小 p 的方阵。各自由 σ^j 的集合构成的行和列分别被称为子矩阵行和子矩阵列。定义阵列码的奇偶校验矩阵的列和行一律分别具有 p 个 1 和 r 个 1。当 p 相当大时, 该矩阵中的 1 的比率减小, 从而产生低密度奇偶校验矩阵的结构。这样的阵列码不具有长度为 4 的循环结构。也就是说, 如果在奇偶校验矩阵中属于形成正方 (square) 或循环 4 (cycle 4) 的 4 个子阵 (partial matrix) σ^{ia} 、 σ^{ib} 、 σ^{ja} 、以及 σ^{jb} ($i \neq j$) 的元素具有循环 4 结构, 那么, 应满足下面的关系。

$$[0050] ia - ib = ja - jb \quad \square (i-j) = (a-b) \pmod{p} \quad \dots \dots \dots (1)$$

[0051] 在方程 (1) 中, 应满足 $a = b$ 。然而, 因为存在于不同行中的 “a” 和 “b” 总是具有不同值, 所以, 不可能满足方程 (1)。因此, 具有上述奇偶校验矩阵的阵列码不具有循环 4 结构。

[0052] 本发明通过修改上述阵列码的奇偶校验矩阵结构而生成新的矩阵结构。现在, 将针对生成要在本发明中使用的新矩阵结构的过程而做出描述。修改的目的在于: 基于不具有循环 4 结构的阵列码结构而得到不规则结构, 其中, 存在于要生成的矩阵的每列中的 1 的分布是不规则的。应执行此过程, 使得存在于每行中的 1 的分布相对一致, 即仅存在总共 2 种类型。现在, 将针对生成在本发明中使用的新矩阵结构的方法而做出描述。

[0053] (1) 形成阵列码的奇偶校验矩阵的第 j 子矩阵列由通过以下方程表示的子矩阵构成。

$$[0054] H_j = [I \ \sigma^j \ \sigma^{2j} \dots \ \sigma^{(r-1)j}]^T \quad \dots \dots \dots (2)$$

[0055] (2) 取决于预定的等级分布, 如下定义每个子矩阵列的等级序列:

$$[0056] D = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{s-1}]^T \quad \dots \dots \dots (3)$$

[0057] 在方程 (3) 中, d_j 表示与第 j 子矩阵列相对应的列等级, 而 “s” 表示子矩阵列的总数。另外, 将 “s” 设为使其等于存在于特定列中的 1 的总数 d_v 。

[0058] (3) 取决于在 (2) 中定义的等级序列 D, 如下修改第 j 子矩阵列:

$$[0059] H'_j = [0 \ 0 \ \dots \ \sigma^{j \times t_j} \ \sigma^{j \times (t_j+1)} \ \dots \ \sigma^{j \times (t_j+d_j-1)} \ 0 \ \dots \ 0]^T, t_j = t_{j-1} + d_{j-1} \pmod{s} \quad \dots \dots \dots (4)$$

[0060] 在方程 (4) 中, t_j 表示在第 j 子矩阵列 H'_j 中开始非 0 子矩阵的子矩阵行号。

[0062] (4) 通过方程 (5) 来定义要生成的矩阵 H_d , 其中, 用列向量来替代子矩阵列。

$$[0063] H_d = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_j \ \dots \ H_{s-1}] \quad \dots \dots \dots (5)$$

[0064] 当根据上述过程而定义了矩阵的特定子矩阵列时, 存在于每个子矩阵列中的特定列总是具有与仅分配到对应的子矩阵列的等级一样多的 1。由子矩阵列组成的矩阵将使矩阵之间的子矩阵重叠最小化。因此, 存在于整个矩阵的特定行中的 1 的数目也将被最小化。也就是说, 可容易地理解, 在整个矩阵中的一行中的 1 的数目将总为 2 或 1。因为所生成的矩阵 H_d 具有通过从阵列码结构中移除某些子矩阵而得到的结构, 所以, 如阵列码那样, 其总是不具有循环 4 结构。

[0065] 图 2 是图解在将存在于特定列中的 1 的最大数目定义为 d_v 、将这样的子矩阵列的数目定义为 n_v 、且存在于其余子矩阵列中的 1 的数目总为 3 的情况下的矩阵 H_d 的例子的图。

[0066] 在本发明中,将使用基于与图 2 相结合描述的阵列码结构而定义的奇偶校验矩阵 H 的信息部分矩阵 H_d 220,作为要在本发明中定义的低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵 H 的子矩阵。现在,将针对用于生成形成奇偶校验矩阵 H 的奇偶部分的子矩阵的不规则重复累积 (IRA) 码而做出描述。

[0067] B. 一般化的双对角线矩阵

[0068] 已经知道,不规则重复累积 (IRA) 码具有简单的编码器结构,并利用消息传递解码器而具有相对高的性能。这样的不规则重复累积码可被认为是一类低密度奇偶校验模式。

[0069] 图 3 是图解不规则重复累积码的因子图结构的图。参照图 3,现在将针对不规则重复累积码的因子图结构而做出描述。图 3 的不规则重复累积码的因子图是体系版本 (systematic version),其中,仅除了一个奇偶节点之外,与码字的奇偶码元相对应的所有奇偶节点均具有等级 2。也就是说,奇偶节点 301、302、303、...、304、305、306、以及 307 中的每个具有与其连接的 2 个边沿。这样的奇偶节点结构的优点在于:通过线性计算而简单地实现基于给定信息码元的奇偶码元的生成。另外,如可从图 3 中理解的,不规则重复累积码的信息节点可具有各种等级分布。信息节点的值通过随机排列 320 而与校验节点相连接。

[0070] 可在图 4 中图解具有图 3 的因子图的不规则重复累积码的矩阵构造。图 4 是图解具有不规则重复累积码的低密度奇偶校验码的矩阵的图。

[0071] 在图 4 中图解的低密度奇偶校验码的矩阵中,奇偶部分中的对角线表示“1”,并且,在常规不规则重复累积码中,对角线之间的偏移“f”(401) 具有值 1。因此,与定义不规则重复累积码的奇偶校验矩阵的奇偶部分相对应的子矩阵具有双对角线矩阵的构造。存在于奇偶校验矩阵的信息部分的每列中的 1 的数目具有不规则分布。由图 4 的随机排列单元来定义该分布。

[0072] 本发明仅考虑不规则重复累积码的奇偶部分。因此,本发明仅概括奇偶部分,并提出新的矩阵类型。

[0073] 在图 4 的常规不规则重复累积码的情况下,对角线之间的偏移“f”具有值 1 ($f = 1$)。在本发明中,如果偏移值“f”被提升,使得其具有特定值,则可如图 5 所示而概括奇偶部分的双对角线矩阵。在图 5 中,第一对角线 501 形成矩阵中从第一列和第一行的位置至最后一列和最后一行的位置的对角线。第二对角线的第一偏对角线 502a 在被列移位了偏移值的第一位置中具有值“0”,而在直到其最后一点的其余位置中具有值“1”。从下一行中的第一列起,第二对角线的第二偏对角线 502b 形成具有值“1”的对角线。

[0074] 这里,图 5 是图解奇偶矩阵的图,其中,双对角线矩阵的偏移值被提升到特定值。尽管如图 5 所示而改变偏移值,但总是存在仅具有一个“1”的列。应注意,如果存在于所有列中的 1 的数目为 2,则双对角线矩阵的秩 (rank) 变为小于矩阵中的行数。因此,如图 5 所示,第二对角线的第一行应具有“0”而不是“1”。如图 5 所示,在 $r \times r$ 矩阵即具有矩阵大小“r”的方阵的情况下,如果双对角线矩阵的偏移值“f”和矩阵的大小“r”不具有公因子,则有可能通过简单地对给定信息码元的集合执行加法计算 r 次,而生成所有 r 个奇偶码元。为了对此证明,将考虑下面的定理。

[0075] 定理 1:在阿贝尔 (Abelian) 群 $AG_r = \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$ 中,通过对与“r”互质且不为“0”的特定元素“f”执行少于“r”次的加法,而生成所有元素。为了对此证明,如果不

能通过对与“r”互质且不为“0”的特定元素“f”执行小于“r”次的加法而生成 AG_r 中的所有元素，则存在小于“r”的“k”，其满足方程(6)的条件。

[0076] $kf = 0 \pmod{r}$ (6)

[0077] 然而，方程(6)和“f”与“r”互质的假定矛盾。也就是说，满足方程(6)的“k”的最小值应总为“r”。因此，可通过对元素“f”执行 r 次加法计算而生成 AG_r 中的所有元素

[0078] 图 5 中图解的双对角线矩阵是与奇偶校验矩阵的奇偶部分相对应的矩阵。因此，对于图 5 的矩阵中的第 i 列，有可能总是从与奇偶校验矩阵的余下的信息部分相对应的矩阵中的第 i 列得到方程(7)中示出的信息。

[0079] $v_i = \sum_{i=1}^{a_i} d_i$ (7)

[0080] 在方程(7)中， d_i 表示第 i 信息码元，而 a_i 表示存在于与奇偶校验矩阵的信息部分相对应的矩阵的第 i 列中的 1 的数目。另外， Σ 表示 GF(2) 中的累加计算。GF(2) 指基于 2 的伽罗瓦 (Galois) 域，并表示以模 2 定义的有限域。术语“有限域”表示一个集合，其中，元素的数目是有限的，并且，对于基于模 2 的加法和乘法来说是闭集 (closed)，存在用于加法的单位元素和逆元素，存在用于乘法的单位元素和用于非 0 元素的逆元素，并且，对于加法和乘法来说，满足交换律、结合律、以及分配律。因此，GF(2) 表示满足这样的属性的 {0, 1} 的集合。结果，如下定义可通过与图 5 的矩阵中的第一列相对应的奇偶校验方程而得到的第一奇偶码元：

[0081] $p_0 = v_0$ (8)

[0082] 在图 5 的矩阵构造中，如下定义存在于对角线和偏移对角线中的特定的 1 的列索引和行索引之间的关系：

[0083] $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - f$ (9)

[0084] 如果使用了方程(9)中示出的两个公式，则可根据方程(10)，使用 p_0 而计算 p_{r-f} 。

[0085] $p_{r-f} = p_0 + v_{r-f}$ (10)

[0086] 另外，因为奇偶校验矩阵具有如图 5 所示的双对角线矩阵的构造，所以，可将方程(10)修改为：

[0087] $p_{r-if} = p_{r-(i-1)f} + v_{r-if}, i = 1, \dots, r-1$ (11)

[0088] 这样，可通过方程(11)而得到特定的奇偶码元 p_{r-if} ，并且，基于定理 1，如果“r”与“f”互质，那么，随着“i”的增加， $(r-if) \pmod{r}$ 的值仅具有 1 至 $r-1$ 的所有值一次。因而，如果“r”与“f”互质，则可通过前述过程来计算所有奇偶码元的值。因此，在前述方法中，具有图 5 中图解的奇偶部分的奇偶校验矩阵总能够通过线性计算而被简单编码。图 6 是图解编码过程中依次计算 $P_0, P_{r-f}, P_{r-2f}, \dots$ 的值的过程的图。

[0089] 参照图 6，如由附图标记 601 所表示的，产生从第 0 列和第 0 行的位置值到第 0 列和第 $(r-f)$ 行的位置值的连接。可注意到，如由附图标记 602 所表示的，第 0 列和第 $(r-f)$ 行的位置值连接到第 $(r-f)$ 列和第 $(r-f)$ 行的位置值。这样，1 仅位于第一对角线 610、第二对角线的第一偏对角线 620a、以及第二对角线的第二偏对角线 620b 中。因为在对角线的第一列中仅存在 1 个值 1，所以，通过以前述方式连续寻找值 1，而计算二阶函数。结果，可找到所有值。

[0090] 将使用上述一般化的双对角线矩阵构造，作为要在本发明中定义的低密度奇偶校

验码的奇偶校验矩阵 H 中的奇偶部分的子矩阵 H_p 。现在,将针对用于生成要在本发明中定义的低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵的方法而做出描述。

[0091] C. 奇偶校验矩阵构造

[0092] 在此章节中,将针对用于使用在章节 B 中描述的一般化的双对角线矩阵构造来生成根据本发明的新的奇偶校验矩阵 H 的方法而做出描述,并针对于其构造而做出描述。下面描述的奇偶校验矩阵定义了基于在章节 A 中描述的阵列码结构而定义的矩阵 H_d ,作为奇偶校验矩阵 H 的信息部分。此外,下面描述的奇偶校验矩阵定义了在章节 B 中描述的正规化的双对角线矩阵 H_p ,作为信息部分矩阵 H 的奇偶部分。因此,定义要在本发明中设计的低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵 H 具有由如下方程表示的构造。

[0093] $H = [H_d | H_p]$

[0094] 其中, H_d : 用于信息部分的奇偶校验子矩阵

[0095] H_p : 用于奇偶部分的奇偶校验子矩阵 (12)

[0096] 在方程 (12) 中,通过基于预定义的等级分布的等级序列 D,定义奇偶校验矩阵的信息部分矩阵 H_d 中的各个子矩阵列,并且,构成每个子矩阵列的单位 (unit) 子矩阵 σ^{ij} 是通过对具有大小“p”的 $p \times p$ 单位矩阵进行按照 ij 的列移位而得到的循环排列矩阵,其中, ij 为子矩阵列索引“i”和子矩阵行索引“j”的积。这里,“p”总是质数。另外, H_p 将存在于矩阵中的 1 和 0 分别提升为 $p \times p$ 矩阵和 0 矩阵,以便将其构造与 H_d 的构造匹配。

[0097] 现在,将针对根据本发明的实施例的成低密度奇偶校验码的过程做出描述。

[0098] (I) 等级分布和 H_d 构造

[0099] Richardson 等人示出了:当在定义低密度奇偶校验码的因子图中实现消息传递解码时,有可能通过概率分布的变化,利用和积算法,通过变量和校验节点消息更新过程、以及迭代处理过程,而跟踪消息的变化。此外,Richardson 等人示出了:存在能够确定通过这样的密度演化技术、利用具有等级分布的因子图而定义的低密度奇偶校验码的平均误差概率是否收敛到“0”的信道参数阈值。另外,Richardson 等人示出了:对于低于该信道参数阈值的信道参数,当在解码过程中假定无限迭代时,位误差的概率总是能够收敛到“0”。因此,可使用这样的密度演化技术,作为能够优化能够改善特定信道环境的阈值的低密度奇偶校验码的等级分布的设计工具。由此,已做出很多研究,来计算为低密度奇偶校验码而优化的等级分布、以及在该时刻的阈值。

[0100] 本发明使预定义的优化可变节点等级分布接近要在本发明中定义的奇偶校验矩阵 H 的可变节点等级分布。在此情况下,将具有等级 2 的可变节点全部分配到 H 的奇偶部分 H_p 中的各个列,并将具有高于 2 的等级的可变节点分配到 H 的信息部分 H_d 中的各个列。另外,根据在章节 A 中描述的阵列码结构、以及在章节 B 中描述的一般化的双对角线矩阵的子矩阵构造,奇偶校验矩阵 H 的校验节点等级总是仅具有与所有给定 1 的数目有关的一个或二个最小化类型。

[0101] 现在,将确定用于定义要在本发明中定义的奇偶校验矩阵的信息部分 H_d 的等级序列。如果将在定义低密度校验码的因子图中的最大可变节点等级定义为 d_v ,则可通过由如下方程表示的多项式来表示存在于可变节点中的各个边沿的分布:

[0102]
$$\lambda(x) = \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i x^{j-1} \dots \dots (13)$$

[0103] 在方程 (13) 中, λ_i 表示存在于具有等级“ i ”的可变节点中的边沿的比率。可如下表示对于给定 $\lambda(x)$ 的因子图中存在于具有等级“ j ”的可变节点中的边沿的比率 c_j :

$$[0104] c_j = \frac{\lambda_j/j}{\sum_{i \geq 2} \lambda_i/i} \quad \dots \dots (14)$$

[0105] 考虑方程 (14) 中的实现, 将对最大可变节点等级 = 15 而描述奇偶校验矩阵的构造。已经知道: 当定义低密度奇偶校验码的因子图中的最大可变节点等级的值为 15 时, 通过密度演化技术, 如方程 (15) 所示而给出在二进制输入加性白高斯噪声 (Bi-AWGN) 信道环境中的对于 1/2 码率的最优等级分布。

[0106] $\lambda_2 = 0.23802, \lambda_3 = 0.20997, \lambda_4 = 0.03492, \lambda_5 = 0.12015,$

[0107] $\lambda_7 = 0.01587, \lambda_{14} = 0.00480, \lambda_{15} = 0.37627 \quad \dots \dots (15)$

[0108] 在用于允许可变节点的误差概率收敛到“0”的加性白高斯噪声 (AWGN) 信道中, 最大信道参数噪声方差 (variance) σ^* 为 0.9622, 并且, 其对于 Eb/No 则变为 0.3348dB。也就是说, 通过具有前述等级分布的因子图而定义的低密度奇偶校验码利用其中假定无限块大小和无限迭代的置信度传播解码, 而示出了与香农容量极限接近 0.3348dB 的性能。在具有前述等级分布的因子图中, 如下给出具有各个等级的可变节点的比率:

[0109] $c_2 = 0.47709, c_3 = 0.28058, c_4 = 0.034997, c_5 = 0.096332,$

[0110] $c_7 = 0.0090386, c_{14} = 0.001374, c_{15} = 0.100560 \quad \dots \dots (16)$

[0111] 在要在本发明中定义的奇偶校验矩阵中, 具有等级 2 的可变节点应当总被分配到奇偶部分 H_p , 并且, 仅仅除了具有等级 2 的可变节点之外的其它可变节点应当总被分配到信息部分 H_d 。另外, 信息部分 H_d 的每个子矩阵列中的所有列具有相同的列权重。因此, 奇偶校验矩阵 H 的因子图中具有各个等级的可变节点的比率近似为如方程 (17) 所示出的那样。

[0112] $c_2 = 1/2 = 0.5, c_3 = 8/30 = 0.26667, c_4 = 1/30 = 0.03333, c_5 = 3/30 = 0.1,$

[0113] $c_7 = c_{14} = 0, c_{15} = 3/30 = 0.1 \quad \dots \dots (17)$

[0114] 通过使用方程 (17) 中示出的可变节点比率, 再次计算等级分布多项式 $\lambda(x)$, 并且, 根据方程 (18) 而计算通过对应的等级分布定义的低密度奇偶校验码的 AWGN 中的阈值 σ^* 。

[0115] $\sigma^* = 0.9352 \quad (Eb/No)^* = 0.5819dB \quad \dots \dots (18)$

[0116] 由方程 (18) 确定的值是与具有 1/2 码率的低密度奇偶校验码相对应的值。使用作为分析技术的、基于高斯近似值的密度演化技术, 导出此值, 并且, 如果位误差的估算概率小于 10^{-6} , 则认为不存在误差而计算对应值。可如下定义使用所计算的值而分配到信息部分 H_d 的每个子矩阵列的等级序列:

[0117] $D = [15, 15, 15, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3] \dots \dots (19)$

[0118] 在本发明中, 可根据由方程 (18) 定义的等级序列, 基于阵列码结构而定义在描述了阵列码结构的章节 A 中描述的奇偶校验矩阵 H 的信息部分 H_d 。

[0119] 图 7 是图解以在章节 A 中描述的方法生成的奇偶校验矩阵的信息部分 H_d 的例子的图, 其中, 最大可变节点等级为 15。在图 7 中图解的矩阵构造中, 列和行分别表示子矩阵列和子矩阵行。指示列和行的数表示子矩阵列和子矩阵行的循环移位。每个数由 $p \times p$ 子矩阵组成, 其中, $p = 89$ 。因此, 以前述方法生成的信息部分 H_d 的矩阵变为 $(d_v \cdot p) \times (d_v \cdot p)$ 矩阵。

[0120] (II) 提升和 H_p 构造

[0121] 通常,矩阵的提升表示通过在特定位置中对具有 0 和 1 的矩阵的子矩阵替换、而提升基本矩阵的大小的方法。这将通过参照图 8 来描述。图 8 是图解通过以用 3×3 单位矩阵或 3×3 “0”矩阵来替代 4×4 矩阵中的每个元素的方法、对基本 4×4 矩阵进行矩阵提升而得到的 12×12 矩阵的图。

[0122] 如图 8 所示,对于元素 0 来说,矩阵提升形成具有与目标提升大小的倍数一样多的元素 0 的方阵。将仅描述第一行。位于第一行中的相应列的元素变为 {0, 0, 1, 0}, 并且, 分别对其分配附图标记 801、802、803 和 804。在所有元素中,具有值 0 的 3 个元素 801、802 和 804 分别被提升为 3×3 矩阵 801a、802a 和 804a。第一行中具有值 1 的元素 803 被提升为 3×3 单位矩阵 803a。还将相同的矩阵提升应用于其它行中的元素。

[0123] 如上所述,矩阵提升通常是指:通过将 $k \times k$ 子矩阵插入到由 0 和 1 组成的基本矩阵的每个元素的位置中而扩展矩阵的大小的方法。通常,使用通过对单位矩阵的每列进行循环移位而得到的循环排列矩阵,作为所插入的 $k \times k$ 矩阵。

[0124] 要在本发明中定义的奇偶校验矩阵 H 的奇偶部分 H_p 是在章节 B 中描述的一般化的双对角线矩阵。另外,考虑到以章节 C 的 (I) 中描述的方法生成的 H_d 由 $p \times p$ 子矩阵组成, 还通过使用 $p \times p$ 子矩阵来对 $r \times r$ 一般化的双对角线矩阵进行提升, 而构造 H_p。

[0125] 图 9 是图解通过用 $p \times p$ 循环排列子矩阵来进行矩阵提升而构造的奇偶矩阵 H_p 的图。通过参照图 9, 现在将针对奇偶矩阵提升而做出描述。对于低密度奇偶校验码的线性时间编码和各个行之间的线性独立性, 通过循环排列子矩阵而提升的矩阵移除存在于 σ^j 的第一行中的 1。以图 9 的方式构造的奇偶部分 H_p 变为 $(rp) \times (rp)$ 矩阵, 并且, 在每个子矩阵 σ^j 中, j_i 表示对于分配到每个子矩阵的循环列移位的偏移值。现在, 将针对用于允许利用线性计算来编码的方法而做出描述。

[0126] 可注意到, 当将在章节 B(一般化的双对角线矩阵)中做出的描述应用于以图 9 的方法提升的奇偶部分 H_p 时, 当“r”与“f”互质时, 通过 r 次计算而仅选择奇偶部分 H_p 的每个子矩阵列一次。在这一个选择过程中, 有可能执行计算与子矩阵列中的特定列相对应的奇偶码元的操作。因此, 为了计算与特定 $p \times p$ 子矩阵 σ^j 中所有列相对应的奇偶码元, 在 rp 次计算期间, 应仅执行与 p 列相对应的奇偶码元的计算一次。现在, 将针对用于满足前述条件的子矩阵的偏移值的条件而做出描述。

[0127] 在图 9 中图解的奇偶部分 H_p 的矩阵构造中, 如下定义在对角线中具有子矩阵行索引 = i 的子矩阵中的行索引 $y^{(1)}_i$ 和列索引 $x^{(1)}_i$ 之间的关系:

$$y^{(1)}_i = x^{(1)}_i - j_{2i} \pmod{p} \quad \dots \dots (20)$$

[0129] 如下定义在偏移对角线中具有子矩阵行索引 = i 的子矩阵中的行索引 $y^{(2)}_i$ 和列索引 $x^{(2)}_i$ 之间的关系:

$$y^{(2)}_i = x^{(2)}_i - j_{2i+1} \pmod{p} \quad \dots \dots (21)$$

[0131] 基于方程 (20) 和方程 (21), 可根据方程 (22), 从具有子矩阵行索引 0 的子矩阵 σ^{j_0} 和 σ^{j_1} 中的第一行得到奇偶码元 P_{j_0} 的值。

$$P_{j_0} = v_0 \quad \dots \dots (22)$$

[0133] 在方程 (22) 中, v_0 表示从奇偶校验矩阵中的信息部分 H_d 的第一行得到的部分校

验和值。对于列索引 = j_0 , 可如下表示共享相同列的偏移对角线的子矩阵中的行索引 :

$$[0134] \quad y_{(r-f)}^{(2)} = x_0^{(1)} - j_{2(r-f)+1} = j_0 - j_{2(r-f)+1} \quad \dots \dots (23)$$

[0135] 可如下表示共享相同行索引的对角线的子矩阵中的列索引 :

$$[0136] \quad x_{(r-f)}^{(1)} = y_{(r-f)}^{(2)} + j_{2(r-f)} = j_0 - j_{2(r-f)+1} + j_{2(r-f)} \quad \dots \dots (24)$$

[0137] 如果方程 (23) 和方程 (24) 的 “r” 和 “f” 彼此互质, 则可在重复这样的过程 r 次的同时仅选择奇偶部分 H_p 中的所有子矩阵一次。因此, 可如下表示通过重复前述过程 r 次而再次得到的子矩阵中的行索引 :

$$[0138] \quad x_{(0)}^{(1)} + \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i j_i \quad (\text{mod } p) \quad \dots \dots (25)$$

[0139] 在方程 (25) 中, 如果利用子矩阵的所有其它列索引而做出提升, 则通过如下方程而确定通过 r 次计算而对于存在于对角线中的子矩阵 σ^j 更新的列索引中的方差 x :

$$[0140] \quad x = \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i j_i \quad \dots \dots (26)$$

[0141] 定理 2 : 由特定质数 p 定义的有限域 $F_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 中的所有非 0 元素总是可通过对其执行小于 “p” 次的加法而仅生成一次。如果存在满足用于有限域 F_p 中的特定非 0 元素的方程 (27) 的小于 “p”的 “k”, 以便对其证明, 则违背了 “p” 为质数的假定。因此, 满足方程 (27) 的 k 的最小值总为 “p”。

[0142]

$$ka = \underbrace{a + a + \dots + a}_k = 0 \quad (\text{mod } p) \quad \dots \dots (27)$$

[0143] 因此, 有限域 F_p 中的所有非 0 元素 “a” 可通过对其执行小于 “p” 次的加法而生成。根据定理 2, 如果通过 r 次线性计算而更新的特定子矩阵 σ^j 的列索引方差不为 0, 那么, 当 j 次线性计算总共重复了 “p” 次时, 可生成用于 p 个列索引的奇偶码元。这样, 可生成 rp 个奇偶码元中的全部。也就是说, 满足了方程 (28) 的条件。

$$[0144] \quad x = \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i j_i \neq 0 \quad \dots \dots (28)$$

[0145] 有可能通过重复方程 (28) 的 r 次计算 p 次, 而生成与子矩阵中的所有列相对应的奇偶码元。另外, 在 r 次计算期间, 可逐个生成与存在于对角线上的 (r-1) 个子矩阵中的每一个中的特定列相对应的奇偶码元。因此, 可注意到, 可通过 rp 次线性计算而仅生成具有 rp 个不同列索引的奇偶码元一次。

[0146] 将通过参照图 10 来描述以上述方法而生成奇偶部分 H_p 的矩阵的过程。图 10 是图解根据本发明的优选实施例用于生成奇偶部分的矩阵的方法的流程图。

[0147] 在步骤 1000 中, 将奇偶码元计算索引 n 设为 0, 以便生成奇偶部分的矩阵。之后, 在步骤 1002 中, 对于具有子矩阵列索引 = 0 的子矩阵中的第一列, 根据信息部分 H_d 的矩阵构造, 计算信息码元和 v_0 , 并将用于对应的子矩阵中的第一行的奇偶码元 P_{t_0} 设为 v_0 。在步骤 1004 中, 将用于存在于奇偶部分 H_p 的对角线中的具有子矩阵列索引 = 0 的子矩阵中的奇偶码元的列索引 $x_0^{(1)}$ 初始化为 j_0 。

[0148] 在根据信息部分 H_d 的矩阵构造, 通过计算信息码元的和 v_0 而确定用于第一行的奇偶码元 P_{t_0} 、并初始化列索引之后, 例程前进到步骤 1006。在步骤 1006 中, 对特定的列

索引 $x^{(1)}_i$, 通过如下方程而计算存在于共享相同列的偏移对角线中的子矩阵中的行索引 $y^{(2)}_{i+(r-f)}$:

$$[0149] \quad y^{(2)}_{i+(r-f)} = x^{(1)}_i - j_{2(i+(r-f))+1} \quad \dots \dots (29)$$

[0150] 之后, 在步骤 1008 中, 通过如下方程而计算存在于具有与偏移对角线中的行索引 $y^{(2)}_{i+(r-f)}$ 相同的行索引的对角线中的子矩阵中的列索引 $x^{(1)}_{i+(r-f)}$:

$$[0151] \quad x^{(1)}_{i+(r-f)} = y^{(2)}_{i+(r-f)} - j_{2(i+(r-f))} \quad \dots \dots (30)$$

[0152] 在步骤 1010 中, 计算存在于具有子矩阵行索引 $i+(r-f)$ 的子矩阵中的具有行索引 $y^{(2)}_{i+(r-f)}$ 的行中的信息码元的和 $v^{(2)}_{i+(r-f)}$ 。

[0153] 之后, 在步骤 1012 中, 使用方程 (31) 而计算与列索引 $x^{(1)}_{i+(r-f)}$ 相对应的奇偶码元 $p_{x^{(1)}_{i+(r-f)}}$ 。

$$[0154] \quad p_{x^{(1)}_{i+(r-f)}} = p_{x^{(1)}_i} + v_{y^{(2)}_{i+(r-f)}} \quad \dots \dots (31)$$

[0155] 之后, 在步骤 1014 中, 将 n 增加 1。在步骤 1016 中, 通过如下方程来更新子矩阵行索引 i :

$$[0156] \quad i := i + (r-2f) \quad \dots \dots (32)$$

[0157] 在步骤 1016 中, 确定 n 是否等于 rp 。也就是说, 在步骤 1016 中, 确定是否完成了编码。如果在步骤 1016 中确定 n 等于 rp , 则例程结束, 从而确定完成了编码。然而, 如果在步骤 1016 中确定 n 不等于 rp , 则例程返回到步骤 1006, 并重复其后续步骤, 以继续执行编码。

[0158] 在前述过程中, 应注意, 所有索引计算——子矩阵行索引和列索引——表示模 p 计算, 并且, 在索引计算过程中对下标和上标的计算也表示模 p 计算。在计算奇偶码元或信息信号的过程中的加法是模 2 计算。图 11 中图解了被生成以便满足这样的条件的 H_p 的例子。图 11 中图解的数值表示子矩阵的偏移值。

[0159] (III) H 的总体构造

[0160] 通过将矩阵划分为信息部分 H_d 和奇偶部分 H_p 并连接它们, 而定义用于要在本发明中定义的低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵 H , 用于系统编码。以在章节 (I) 和章节 (II) 中描述的方法来实现信息部分 H_d 和奇偶部分 H_p 的生成, 并且, 所生成的信息部分 H_d 和奇偶部分 H_p 分别变为 $(d_v \cdot p) \times (d_v \cdot p)$ 矩阵和 $(rp) \times (rp)$ 矩阵。这里, d_v 表示存在于不规则低密度奇偶校验码中的最大可变节点等级, “ p ” 表示子矩阵的维度, 而“ r ” 表示在提升奇偶部分 H_p 之前给定的基本矩阵的维度。因此, 为了连接, “ r ” 应该等于 d_v 。

[0161] 可容易地理解, 在矩阵的信息部分 H_d 和奇偶部分 H_p 中无长度 4 的循环。并且, 可容易地理解, 如果奇偶部分 H_p 的对角线偏移“ f ”被设为接近 $r/2$ 的值, 则在列权重小于 $r/2$ 的信息部分 H_d 的子矩阵列和奇偶部分 H_p 的特定列之间无长度 4 循环。然而, 在具有作为信息部分 H_d 中的权重的最大可变节点等级的列的情况下, 存在这样的可能情况, 其中, 存在奇偶部分 H_p 的列和长度 4 循环。如果适当地选择了奇偶部分 H_p 的子矩阵偏移值, 则有可能通过简单地移除它而防止长度 4 循环存在于整个奇偶校验矩阵 H 中。

[0162] 2. LDPC 码的性能

[0163] 迄今, 已针对用于定义比率 1/2 的不规则低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵的构造而做出了描述, 其中, 所述不规则低密度奇偶校验码可通过线性计算而容易地被系统化

地编码。在第 1 章中定义的奇偶校验矩阵被划分为信息部分和奇偶部分,以便根据给定的信息码元而生成码字的奇偶码元。将信息部分的矩阵构造为使得:基于阵列码结构的矩阵构造中的每列的权重具有接近可变节点的最优不规则等级分布的等级,并且,通过使用具有随机偏移的子矩阵来提升一般化的双对角线矩阵构造,而构造奇偶部分的矩阵。这里,具有等级 2 的可变节点总是被分配到奇偶部分的列。

[0164] 现在,将针对通过在前述描述中定义的奇偶校验矩阵而构造的低密度奇偶校验码的性能而做出描述。为此,首先将针对解码算法和用于评估低密度奇偶校验码的性能的实验环境而做出描述。

[0165] A. 迭代置信度传播解码

[0166] 可通过由 M 个校验节点和 N 个可变节点组成的因子图来表示由 $M \times N$ 奇偶校验矩阵定义的低密度奇偶校验码。在对数域中对具有等级 = d_c 的校验节点和具有等级 = d_v 的可变节点中的消息更新过程进行概括,可如方程 (33) 那样表示校验节点中的消息更新,可如方程 (34) 那样表示可变节点中的消息更新,并且,可如方程 (35) 那样表示对数似然比(LLR) 的更新。

$$[0167] r_{mn}^{(j)} = \ln \left(\frac{1 + \prod_{i=1}^{d_c-1} \tanh(q_i^{(j)} / 2)}{1 - \prod_{i=1}^{d_c-1} \tanh(q_i^{(j)} / 2)} \right)$$

[0168] 其中, $r_{mn}^{(j)}$ 是在第 j 次迭代时从校验节点 m 到可变节点 n 的消息,而 $q_i^{(j)}$ 是在第 j 次迭代时关联到其中 $q_0^{(j)} = q_{mn}^{(j)}$ 的校验节点 m 的重新排列的消息。

[0169] (33)

[0170] 在方程 (33) 中, $r_{mn}^{(j)}$ 是在半迭代解码过程中的第 j 次迭代解码过程中得到的值,并表示从校验节点 m 递交到可变节点 n 的消息。另外, $q_i^{(j)}$ 表示在第 j 次迭代解码过程中从可变节点 i 递交到校验节点 m 的消息。这里,“i”表示通过将连接到校验节点 m 的可变节点从 0 至 d_c-1 重新排列而得到的值。因此,对于 $i = 0$, 其表示可变节点 n。

$$[0171] q_{mn}^{(j+1)} = q_{mn}^{(0)} + \sum_{i=1}^{d_v-1} r_i^{(j)}$$

[0172] 其中, $q_{mn}^{(j)}$ 是在第 j 次迭代时从可变节点 n 到校验节点 m 的消息,而 $q_{mn}^{(0)}$ 是来自信道可靠性的初始消息。 $r_i^{(j)}$ 是在第 j 次迭代时关联到其中 $r_0^{(j)} = r_{mn}^{(j)}$ 的可变节点 n 的重新排列的消息。

[0173] (34)

[0174] 在方程 (34) 中, $q_{mn}^{(j+1)}$ 是在第 j 次迭代解码过程中得到的值,并表示从可变节点 n 递交到校验节点 m 的消息。这里, $r_i^{(j)}$ 表示在第 j 次迭代解码过程中从校验节点 i 递交到可变节点 n 的消息,并且,“i”表示通过将连接到可变节点 n 的校验节点从 0 至 d_v-1 重新排列而得到的值。因此,对于 $i = 0$, 其表示校验节点 m。

$$[0175] l_n^{(j+1)} = l_n^{(0)} + \sum_{i=0}^{d_v-1} r_i^{(j)}$$

[0176] 其中, $l_n^{(j)}$ 是在第 j 次迭代时的编码码元 n 的 LLR 输出,而 $l_n^{(0)}$ 是来自信道可靠性的初始 LLR 输出。

[0177] (35)

[0178] 在方程 (35) 中, $l_n^{(j+1)}$ 表示在第 j 次迭代解码过程中为可变节点 n 定义的 LLR 值。

[0179] 现在, 将针对使用方程 (33) 至方程 (35) 的过程的迭代置信度传播解码过程而做出描述。图 12 是图解使用方程 (33) 至方程 (35) 的迭代置信度传播解码过程的流程图。

[0180] 图 12 图解了对接收器中所接收的消息解码的过程。因此, 定义用于所接收的消息的可变节点 n 的初始消息, 作为所接收的码字的第 n 个码元的信道可靠性, 并且, 可将其如下表示:

$$[0181] q_{mn}^{(0)} = l_n^{(0)} \quad \dots \dots (36)$$

[0182] 在方程 (36) 中, $q_{mn}^{(0)}$ 表示初始定义的可变节点消息的初始值, 而 $l_n^{(0)}$ 表示用于初始定义的可变节点的初始 LLR 值。在步骤 1200 中, 如方程 (36) 所示, 定义初始消息, 作为所接收的码字的第 n 个码元的信道可靠性。并且, 重置迭代计数器。之后, 在步骤 1202 中, 以由方程 (33) 给出的方法来更新校验节点的消息。在步骤 1204 中, 更新可变节点和对数似然比。以方程 (34) 的方法来更新可变节点的消息, 并且, 以方程 (35) 的方法来更新对数似然比。

[0183] 在以前述过程全部更新了校验节点、可变节点、以及对数似然比之后, 在步骤 1206 中, 对更新的对数似然比的值进行硬判决。之后, 在步骤 1208 中, 基于硬判决值而对所接收的消息执行奇偶校验。如果奇偶校验结果具有意味着已成功地执行了解码的值 0, 则在步骤 1216 中, 解码结束。然而, 如果奇偶校验结果不具有值 0, 则在步骤 1210 中, 确定迭代是否已到达了预定的迭代次数。如果在步骤 1210 中确定迭代已到达了预定的迭代次数, 则在步骤 1214 中, 执行解码失败过程, 从而确定尽管附加地执行了解码, 但仅存在很低的将会成功实现解码的概率。然而, 如果在步骤 1210 中确定迭代未到达预定的迭代次数, 则在步骤 1212 中, 将迭代计数器增加 1, 并且随后, 例程返回到步骤 1202。

[0184] B. 仿真环境

[0185] 在表 1 中示出了用于评估由在本发明中定义的奇偶校验矩阵构造的低密度奇偶校验码的性能的实验环境。

[0186] 表 1

[0187]

- 码率 = 1/2, 最大可变节点等级 = 15
- H_p 中的偏移 (f) = 7
- 帧大小 = 435 ($p = 29$)、759 ($p = 53$)、1545 ($p = 103$)、3855 ($p = 257$)
- AWGN 信道上的二进制对映 (antipodal) 信令
- 迭代置信度传播解码
- 浮点仿真
- 最大迭代次数 = 160
- 在每次迭代时由奇偶校验停止
- 帧误码率 (FER) 和信息位误码率 (BER) 评估

[0188] 为了方便起见, 本发明将低密度奇偶校验码的码率限制为 1/2。然而, 可讨论用于支持各种码率的低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵设计, 作为用于根据码率而提升在本发

明中提出的方案的方法。通过本发明中定义的奇偶校验矩阵，将低密度奇偶校验码的因子图中的最大可变节点等级设为 15，以便获得优异的性能，并防止在实现中增加硬件尺寸。将奇偶部分 H_p 的矩阵中的偏移 f 设为 7，以便以章节 C 的 (III) 中描述的方式而简单地从奇偶校验矩阵中移除长度 4 循环。将在本发明中仿真的低密度奇偶校验码的帧大小设为与在 cdma20001xEV-DV 标准中规定的编码器分组 (EP) 大小相类似的值，以便将低密度奇偶校验码的性能与当前在 cdma20001xEV-DV 标准中使用的透平解码器的性能相比较。在用于性能比较的透平码的解码过程中，使用了对数 MAP 算法，并将最大迭代次数限制为 8。

[0189] 考虑到在常规密度演化技术中不规则低密度奇偶校验码的收敛速度相对低的事实，将用于低密度奇偶校验码的迭代置信度传播解码器的最大迭代次数设为 160。对于对解码器的实验，执行以真实值来表示非本征 (extrinsic) 和 LLR 信息的浮点仿真。在校验节点更新过程中，为了防止函数 $\varphi(x) = -\log(\tanh(|x|/2))$ 的溢出，对于 $|x| < 10^{-8}$ 中的 x ，将 $\varphi(x)$ 的值限制为 20。用于低密度奇偶校验码的解码器在每次迭代时执行奇偶校验，并采用奇偶校验结果，作为停止判据，使得在奇偶校验过程中不会检测到误差。然而，当实际上出现了误差时，解码器将有缺陷的帧分类为具有未检测到的误差的帧。最后，使用帧误码率和位误码率，作为用于评估在本发明中设计的低密度奇偶校验码的性能的量度。仅在信息码元中出现误差时考虑帧 / 位误差。现在，将针对在前述仿真环境中仿真的奇偶校验码的性能而做出描述。

[0190] C. 仿真结果

[0191] 图 13A 是图解对于 $n = 870$ 且 $p = 29$ 的信息部分 H_d 的矩阵的例子的图，图 13B 是图解对于 $n = 870$ 且 $p = 29$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图，而图 13C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图。

[0192] 以根据本发明的前述方法构造在图 13A 和 13B 中图解的信息部分的矩阵以及奇偶部分的矩阵，并且，实际上，在编码之前将所述两个矩阵连接。现在，将针对用于在可得到图 13C 中图解的性能的情况的条件而做出描述。为了在两种编码方法之间进行性能比较，一起示出了对于 cdma20001xEV-DV 标准的编码器分组 (EP) 大小为 408 且码率为 1/2 的情况的性能。如图 13C 所示，可以理解，对于小的块大小，在 cdma20001xEV-DV 标准中使用的透平码的性能在帧误码率 (FER) 和位误码率 (BER) 方面略优于在本发明中提出的低密度奇偶校验码的性能。这显示出：在小的大小的情况下，定义在本发明中定义的低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵构造在码字的解码性能方面不是最优的构造。也就是说，可注意到，当低密度奇偶校验码的编码块大小很小时，为了使低密度奇偶校验码与现有的已知透平码相比显示出更佳的性能，应进一步执行对奇偶校验矩阵的优化操作。然而，已显示出：在大的块大小的情况下，低密度奇偶校验码在码字的解码性能方面优于透平码。

[0193] 表 2 示出了对于 $n = 870$ 的每个 E_b/N_0 的平均迭代次数。根据表 2，尽管对给定的低密度奇偶校验码执行最大 160 次迭代，但实际的解码结果显示：考虑到 20 次迭代内的高 SNR，有可能仅通过小于 10 次迭代而得到足够的性能。

[0194] 表 2

[0195]

Eb/No (dB)	平均迭代次数
1. 6	15. 085
1. 8	11. 353
2. 0	9. 317
2. 2	8. 01
2. 4	7. 087

[0196] 图 14A 是图解对于 $n = 1590$ 且 $p = 53$ 的信息部分 H_d 的矩阵的例子的图, 图 14B 是图解对于 $n = 1590$ 且 $p = 53$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图, 而图 14C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图。

[0197] 以根据本发明的前述方法构造在图 14A 和 14B 中图解的信息部分的矩阵、以及奇偶部分的矩阵, 并且, 实际上, 在编码之前将所述两个矩阵连接。

[0198] 现在, 将针对用于在可得到图 14C 中图解的性能的情况的条件而做出描述。为了在两种编码方法之间进行性能比较, 一起示出了对于 cdma20001xEV-DV 标准的编码器分组大小为 792、且码率为 $1/2$ 的情况的性能。可从图 14C 中注意到, 随着低密度奇偶校验码的块大小的增加, 低密度奇偶校验码在帧误码率方面几乎等于现有透平码。然而, 低密度奇偶校验码在位误码率方面仍劣于现有透平码。这是因为, 在存在于透平码的有缺陷帧中的位误差的比率方面, 透平码低于低密度奇偶校验码。也就是说, 对于相同的 Eb/No, 透平码在 BER/FER 方面低于低密度奇偶校验码。在此情况下, 这意味着透平码在存在于有缺陷帧中的位误差的平均数目方面低于低密度奇偶校验码。然而, 在采用混合自动重新传送请求 (ARQ) 的实际无线通信系统中, 因为 FER 性能优于 BER 性能是更优选的, 所以, 从图 14C 中, 可认为: 对于 $n = 1590$, 根据本发明的低密度奇偶校验码在性能方面等于在 cdma20001xEV-DV 标准中使用的透平码。

[0199] 表 3 示出了对于 $n = 1590$ 的每个 Eb/No 的平均迭代次数。随着块大小的增加, 平均迭代次数略高于表 2 中的平均迭代次数。然而, 可以理解, 可仅通过小于 20 次迭代而得到足够高的 SNR, 即足够高的性能。

[0200] 表 3

[0201]

Eb/No (dB)	平均迭代次数
1. 1	40. 308
1. 3	21. 504
1. 5	14. 858

Eb/No (dB)	平均迭代次数
1. 7	12. 018
1. 8	11. 020

[0202] 图 15A 是图解对于 $n = 3090$ 且 $p = 103$ 的信息部分 H_a 的矩阵的例子的图, 图 15B 是图解对于 $n = 3090$ 且 $p = 103$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图, 而图 15C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图。

[0203] 以根据本发明的前述方法构造在图 15A 和 15B 中图解的信息部分的矩阵、以及奇偶部分的矩阵, 并且, 实际上, 在编码之前将所述两个矩阵连接。

[0204] 现在, 将针对用于在可得到图 15C 中图解的性能的情况的条件而做出描述。为了在两种编码方法之间进行性能比较, 一起示出了对于 cdma20001xEV-DV 标准的编码器分组大小为 1560、且码率为 1/2 的情况的性能。可从图 15C 中注意到, 随着低密度奇偶校验码的块大小的增加, 低密度奇偶校验码在帧误码率方面优于具有类似大小的现有透平码。尽管如图 14C 所图解的那样, 低密度奇偶校验码在位误码率方面仍劣于现有透平码, 但它们之间的差显著减小, 从而非常接近透平码的性能。

[0205] 表 4 示出了对于 $n = 3090$ 的每个 Eb/No 的平均迭代次数。随着块大小的增加, 平均迭代次数略高于表 2 中的平均迭代次数。然而, 可以理解, 可仅通过小于 20 次迭代而得到足够高的 SNR, 即足够高的性能。

[0206] 表 4

[0207]

Eb/No (dB)	平均迭代次数
1. 1	38. 495
1. 2	22. 051
1. 4	16. 190
1. 5	14. 623

[0208] 图 16A 是图解对于 $n = 7710$ 且 $p = 257$ 的信息部分 H_a 的矩阵的例子的图, 图 16B 是图解对于 $n = 7710$ 且 $p = 257$ 的奇偶部分 H_p 的矩阵的例子的图, 图 16C 是图解低密度奇偶校验码和透平码之间的比较的仿真结果图, 而图 16D 是根据迭代次数的变化的低密度奇偶校验码的仿真结果图。

[0209] 以根据本发明的前述方法构造在图 16A 和 16B 中图解的信息部分的矩阵、以及奇偶部分的矩阵, 并且实际上, 在编码之前将所述两个矩阵连接。

[0210] 现在, 将针对用于在可得到图 16C 中图解的性能的情况的条件而做出描述。为了进行性能比较, 一起示出了对于 cdma20001xEV-DV 标准的编码器分组大小为 3864、且码

率为 1/2 的情况的性能。可从图 16C 中注意到,当低密度奇偶校验码的块大小非常大时,低密度奇偶校验码在性能方面显著优于具有类似大小的透平码。具体地,可以理解,在 cdma20001xEV-DV 标准中使用的具有帧长度 3864 的透平码的情况下,帧误码率和位误码率两者均具有在高 SNR 下的低误差下限(error floor)。然而,已观察到:在于本发明中定义的低密度奇偶校验码的情况下,不会出现这样的误差下限。对于采用 H-ARQ 的通信系统来说,这样的性能具有显著优势。因而,可以注意到,本发明中定义的低密度奇偶校验码在性能方面显著优于在现有标准中使用的透平码。表 5 示出了对于 $n = 7710$ 的每个 Eb/No 的平均迭代次数。

[0211] 表 5

[0212]

Eb/No (dB)	平均迭代次数
0.9	41. 036
1.0	31. 034
1.1	25. 507
1.2	22. 170

[0213] 在表 5 中,随着低密度奇偶校验码的块大小的增加,平均迭代次数与表 4 相比以较高的速率增加。也就是说,即使在高 SNR 下,支持类似于在 cdma20001xEV-DV 标准中定义的大小的最大帧大小的低密度奇偶校验码也需要 20 或更多次的迭代解码。因此,为了显示出具有最小延迟的最优性能,有必要根据迭代次数观察 LDPC 解码器的性能。

[0214] 图 16C 是图解具有图 16A 和 16B 中示出的构造的低密度奇偶校验码的可用 FER/BER 性能的图,其中,将最大迭代次数限制为 40、80、120 和 160。与此不同,如果将最大迭代次数限制为 40、80 和 120,则出现小幅性能下降。然而,除了将最大迭代次数限制为 40 的情况之外,性能下降不显著。因此,尽管将最大迭代次数限制为 80 左右,但性能下降问题不显著。具体地,当块大小比其小时,由将最大迭代次数限制为 80 而引起的性能下降进一步减小,使得其变得可以忽略不计。因此,基于最大块大小为 7710 的假定,如果将最大迭代次数设为 80,则在本发明中提出的低密度奇偶校验码在解码期间可获得足够的性能。

[0215] 3. 结论

[0216] 本发明定义了能够允许有效率地编码并仅对码率 = 1/2 而得到优异的解码性能的低密度奇偶校验码。为此,本发明将定义低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵分割为两个部分,并使用其列权重高于 2 的阵列码结构,定义与有关奇偶校验矩阵中的码字的信息相对应的部分。另外,本发明定义与奇偶校验矩阵中的码字的奇偶性相对应的部分,作为其列权重均为 2 的一般化的双对角线矩阵。以此方式定义的奇偶校验矩阵生成其最大可变节点等级 $d_v = 15$ 的不规则低密度奇偶校验码,其中,通过基于高斯近似的密度演化技术,而使在 AWGN 信道中用于无误差的阈值为 0.9352。这对 1/2 速率的码显示出与香农信道容量近似 0.5819dB 的性能。

[0217] 基于线性编码可用的事实,一旦在不考虑实际线性编码的可能性的情况下以随机方案设计奇偶校验矩阵,便可生成与香农阈值近似 0.5819dB 或更接近的优异的低密度奇偶校验码。在此情况下,编码过程变复杂,从而使得难以进行实际实现。因为能够进行线性编码用作对定义低密度奇偶校验码的奇偶校验矩阵的一个限制条件,所以,奇偶校验矩阵应具有随机结构。因此,显示出优异性能的可能性将比在不考虑线性编码的情况下随机定义的奇偶校验矩阵的该可能性低。由此,本发明的应用考虑到线性编码显示出相对优异的性能。也就是说,尽管由于线性编码而造成对奇偶校验矩阵的限制,但本发明仍显示出相对优异的性能。

[0218] 为了显示出优异的解码性能,码字的大小增加,并且,在定义奇偶校验矩阵的等级分布时,最大可变节点等级相应地增加,从而使得有可能设计具有接近香农容量极限的性能的低密度奇偶校验码。然而,在此情况下,因为最大可变节点等级的增加使在解码期间的解码器的复杂度增加,所以,不能对实际实现做出贡献。因此,解码器复杂度是可允许的意味着:在实现中设置合理的最大可变节点等级。

[0219] 本发明中定义的奇偶校验矩阵的低密度奇偶校验码具有一般化的双对角线矩阵,其中,通过 $p \times p$ 单位矩阵的循环排列而提升奇偶校验矩阵中的码字的奇偶部分。因此,可以通过简单的线性计算来简单地编码对其进行编码。另外,当将利用迭代置信度传播的解码性能与在 cdma20001xEV-DV 标准中使用的透平码的解码性能相比较时,通过仿真而证明了:可对于相似的帧大小,可以得到较低的帧误码率。具体地,与透平码相比较,根据本发明的低密度奇偶校验码具有较低的帧误码率,并且,当它与混合 ARQ 技术一起使用时,它将充当优异的点。因此,可通过简单的线性计算而对本发明中定义的低密度奇偶校验码简单地编码。并且,在解码器的实现中,在相应子矩阵的行和列中并行实现校验节点处理器和可变节点处理器,由此允许快速解码。

[0220] 在本发明中定义的低密度奇偶校验码中,可根据构成奇偶校验矩阵的子矩阵的排列的特性,而简单地校验在定义低密度奇偶校验码的因子图中无长度 4 的循环。

[0221] 如上所述,本发明的应用可提供类似于或优于透平解码器的性能,并且,具体地,本发明的应用可生成能够减小帧误码率的低密度奇偶校验码。另外,根据本发明的低密度奇偶校验码可减小解码复杂度。

$$H = \begin{bmatrix} I & I & I & \cdots & I \\ I & \sigma^1 & \sigma^2 & \cdots & \sigma^{p-1} \\ I & \sigma^2 & \sigma^4 & \cdots & \sigma^{2(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \sigma^{r-1} & \sigma^{2(r-1)} & \cdots & \sigma^{(r-1)(p-1)} \end{bmatrix}$$

图 1

n_v 列				$(d_v - n_v)$ 列	
I	I	I	I	I	0
I	σ^1	σ^2	σ^{n_v-1}	σ^{n_v}	0
I	σ^2	σ^4	\cdots	$\sigma^{2(n_v-1)}$	0
I	σ^3	σ^6	$\sigma^{3(n_v-1)}$	0	$\sigma^{3(n_v+1)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
I	$\sigma^{(d_v-1)}$	$\sigma^{2(d_v-1)}$	$\sigma^{(d_v-1)(n_v-1)}$	0	0
				220	210

图 2

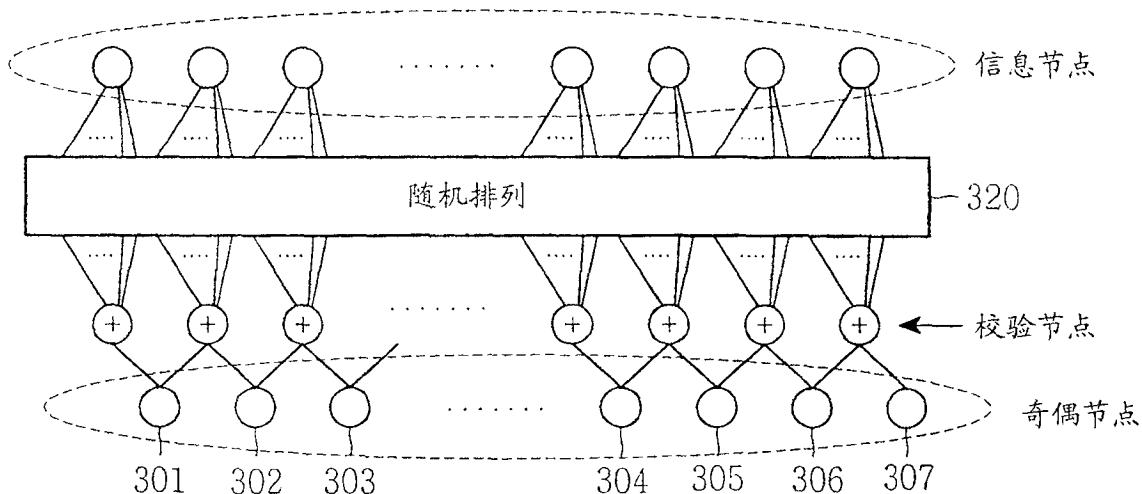


图 3

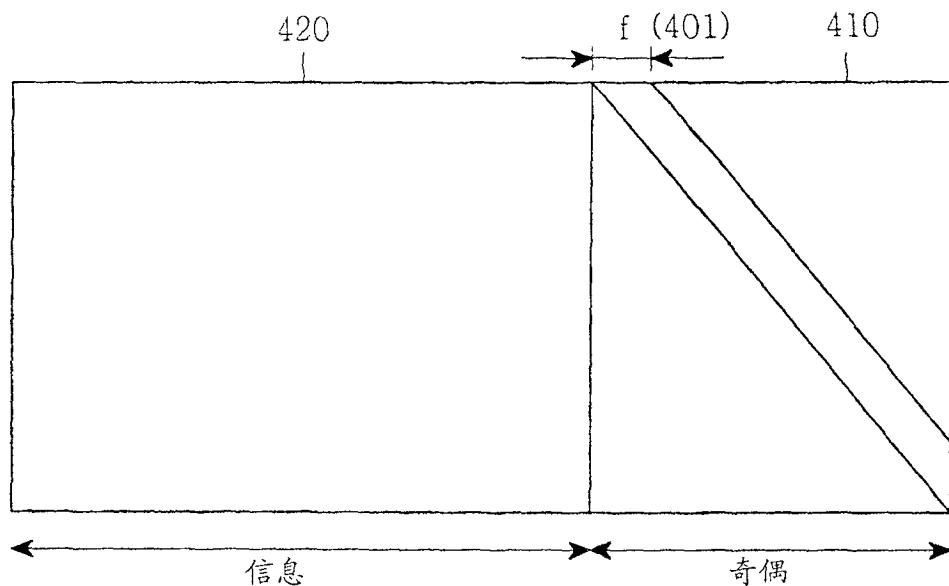


图 4

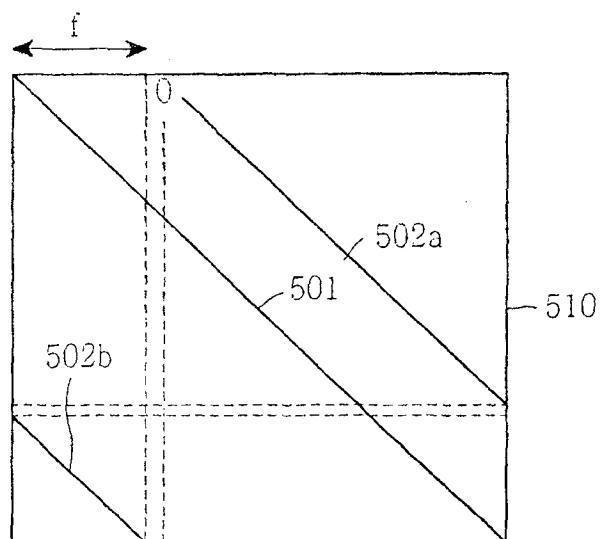


图 5

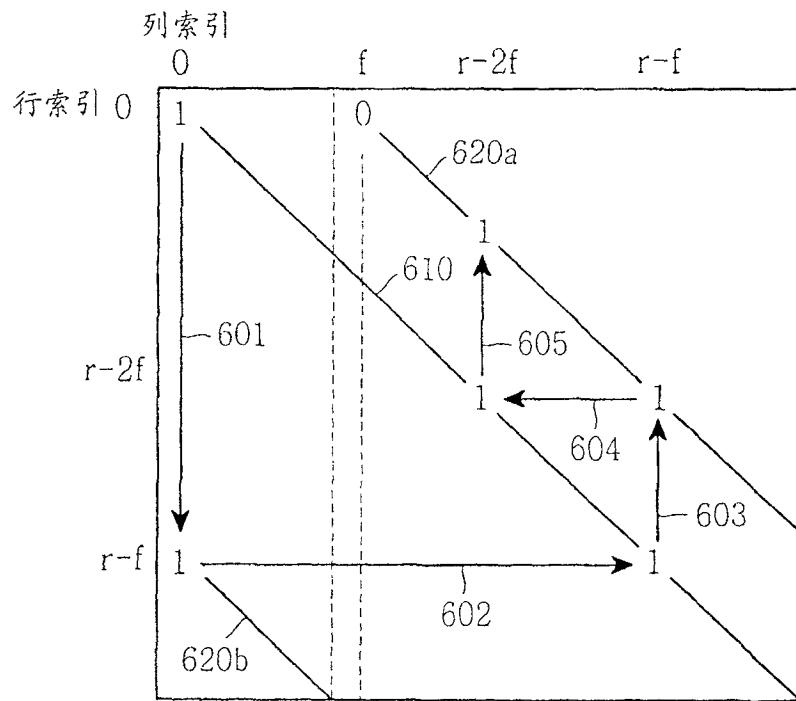


图 6

0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	6	11
0	2	4	6	12	22
0	3	6	9	18	33
0	4	8	12	28	48
0	5	10	20	35	60
0	6	12	24	42	72
0	7	14	28	56	2
0	8	16	32	64	15
0	9	18	36	72	28
0	10	20	50	1	51
0	11	22	55	10	65
0	12	24	60	19	79
0	13	26	65	41	
0	14	28	70	51	

具有 $d_v = 15$ ($p=89$) 的不规则分布的 H_d 的例子

图 7

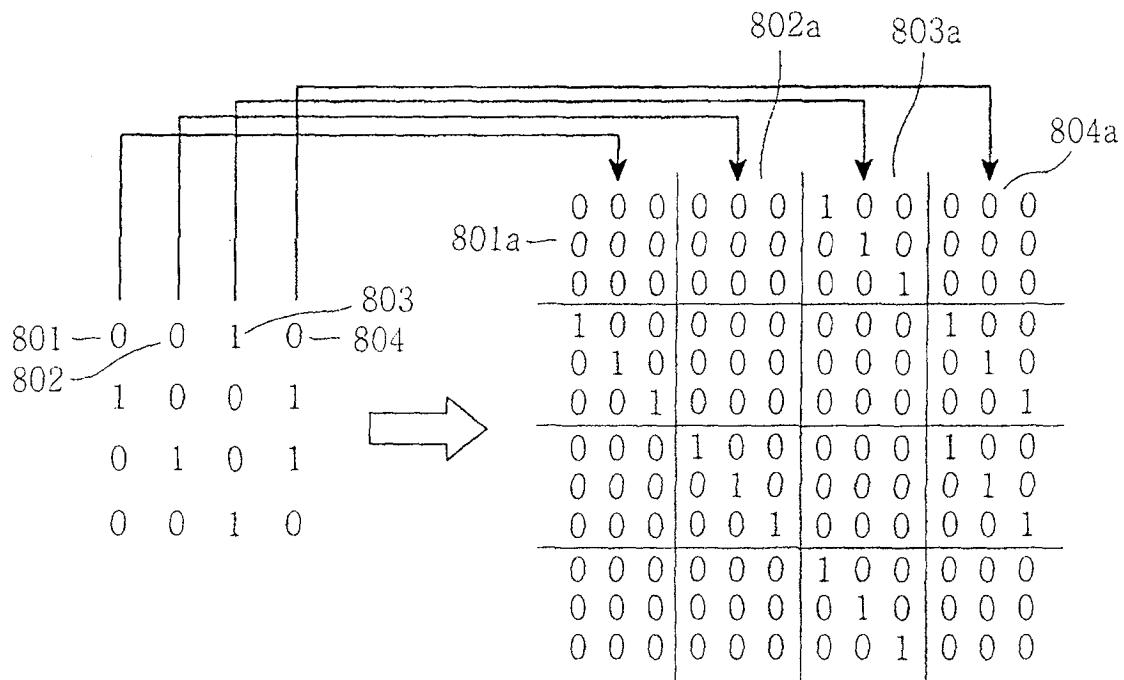


图 8

$$H_P = \left[\begin{array}{cccc} \sigma^{j_0} & & & \sigma^{j_1} \\ & \sigma^{j_2} & & \sigma^{j_3} \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{j_{2(r-f)}} \\ \sigma^{j_{2(r-f)+1}} & & & \sigma^{j_{2(r-f)+1}} \\ & \sigma^{j_{2(r-1)+1}} & & \sigma^{j_{2(r-1)}} \end{array} \right]$$

f个子矩阵列 (pxf列)

图 9

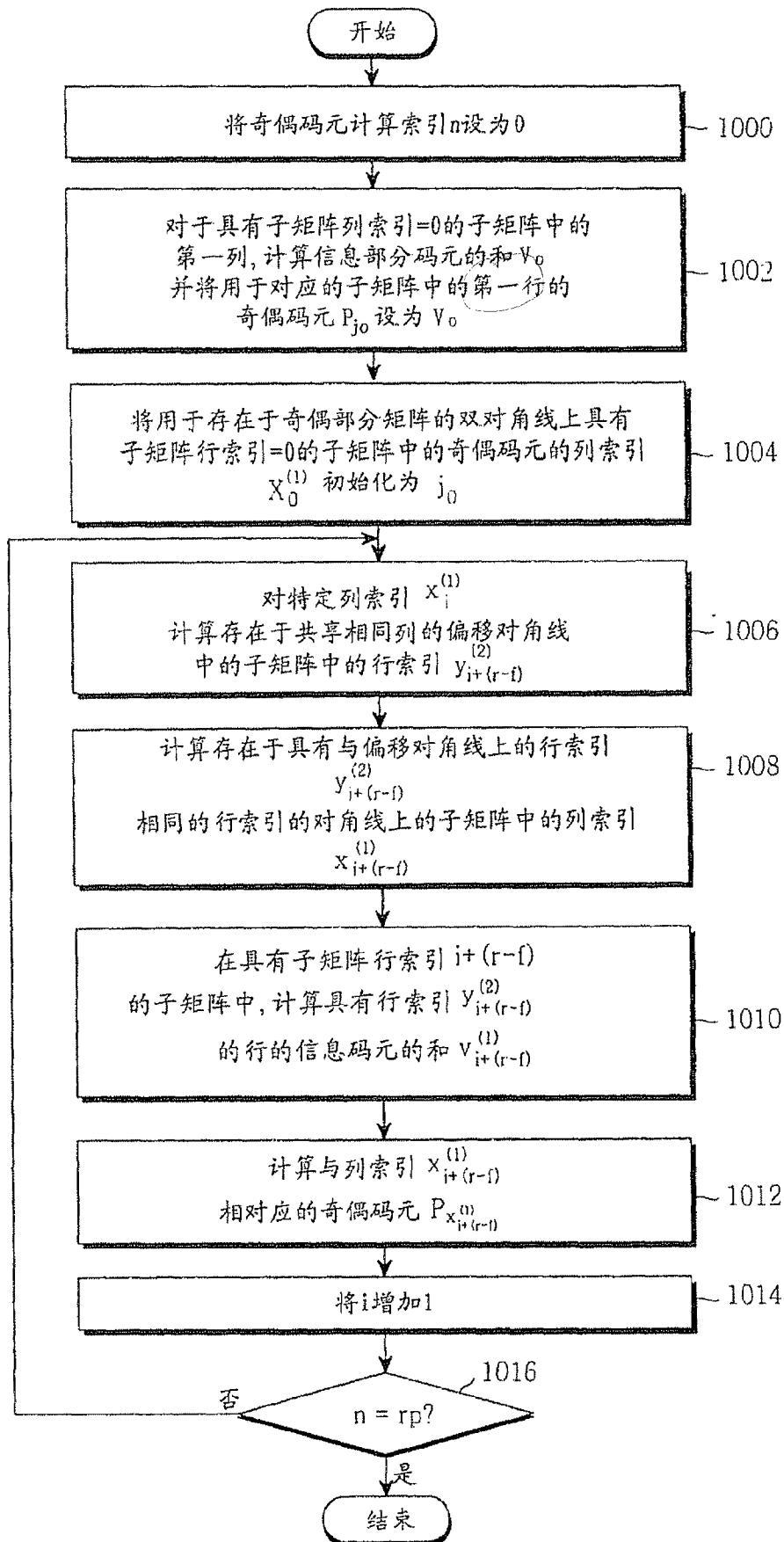
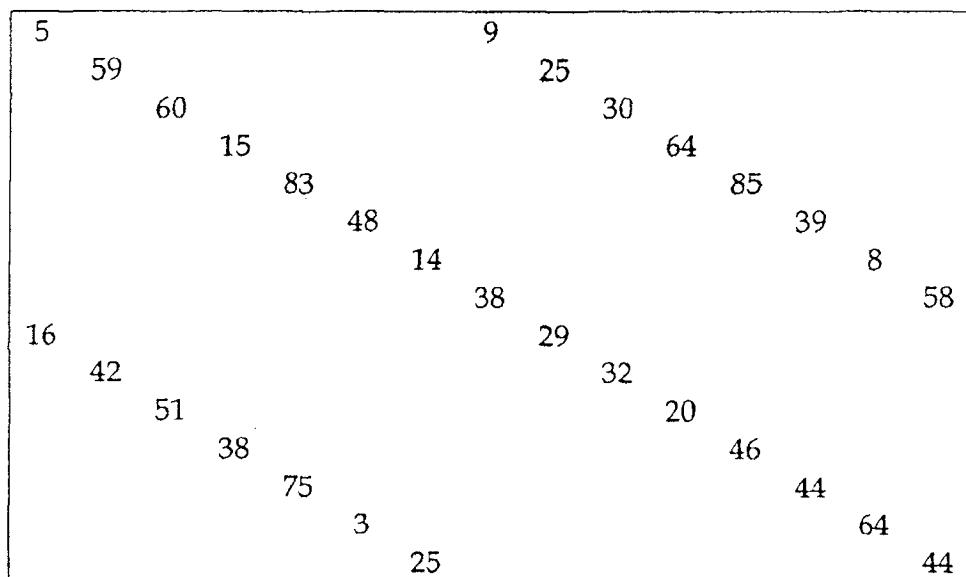


图 10



通过提升一般化双对角线矩阵的 H_p 的例子 ($r=15, f=7, p=89$)

图 11

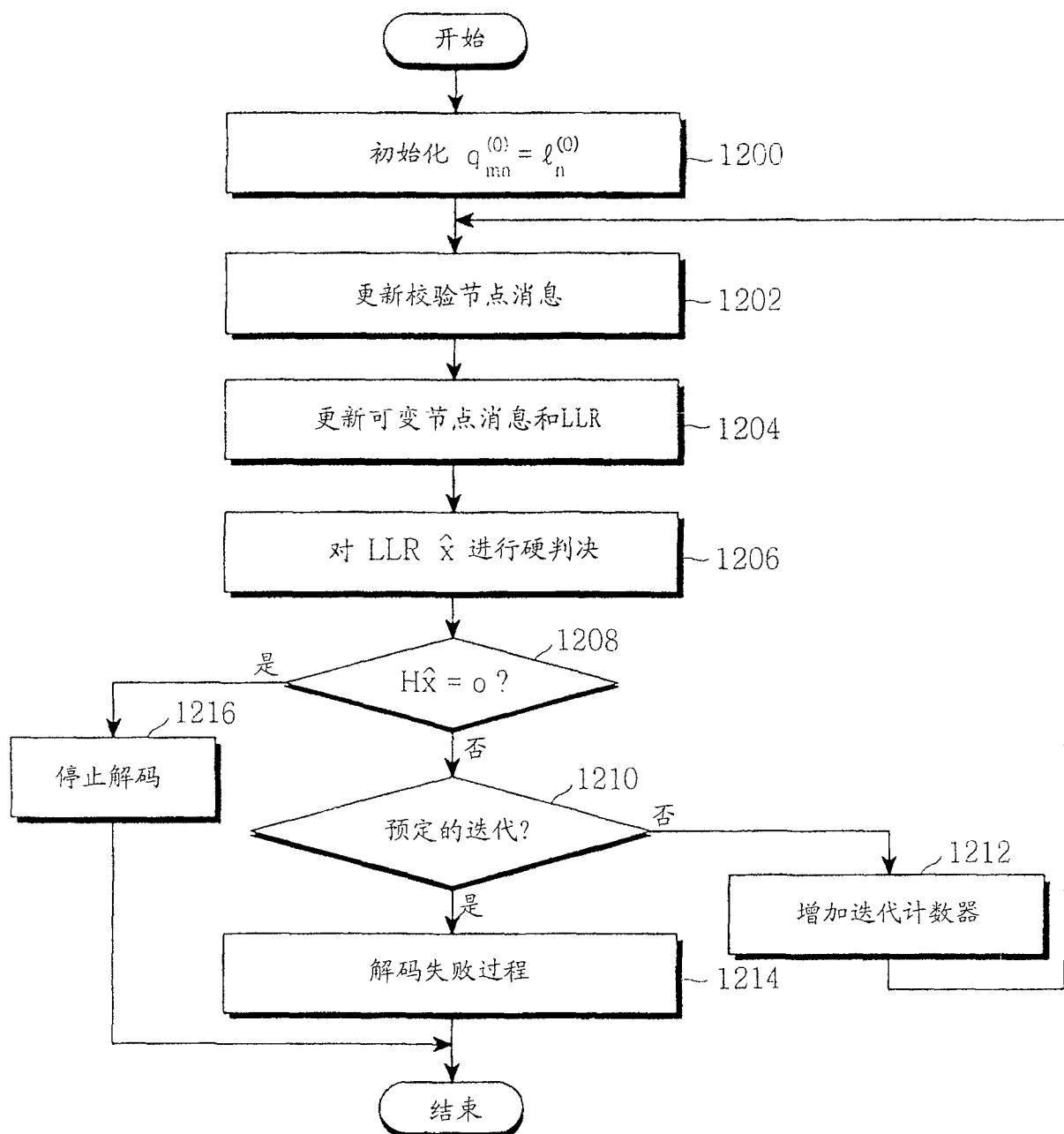


图 12

$- H_d$

0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	6	11	
0	2	4	6	12	22	
0	3	6	9	18	4	
0	4	8	12	28	19	
0	5	10	20	6	2	
0	6	12	24	13	14	
0	7	14	28	27	4	
0	8	16	3	6	17	
0	9	18	7	14	1	
0	10	20	21	3	24	
0	11	22	26	12	9	
0	12	24	2	21	23	
0	13	26	7	14		
0	14	28	12	24		

图 13A

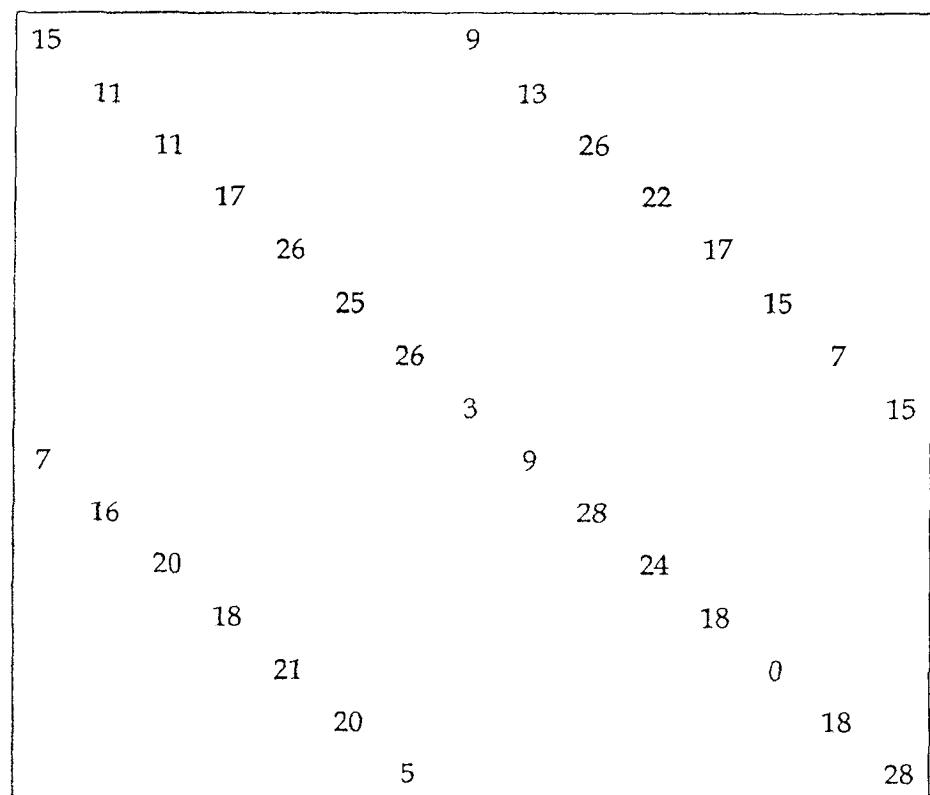
$- H_p$ 

图 13B

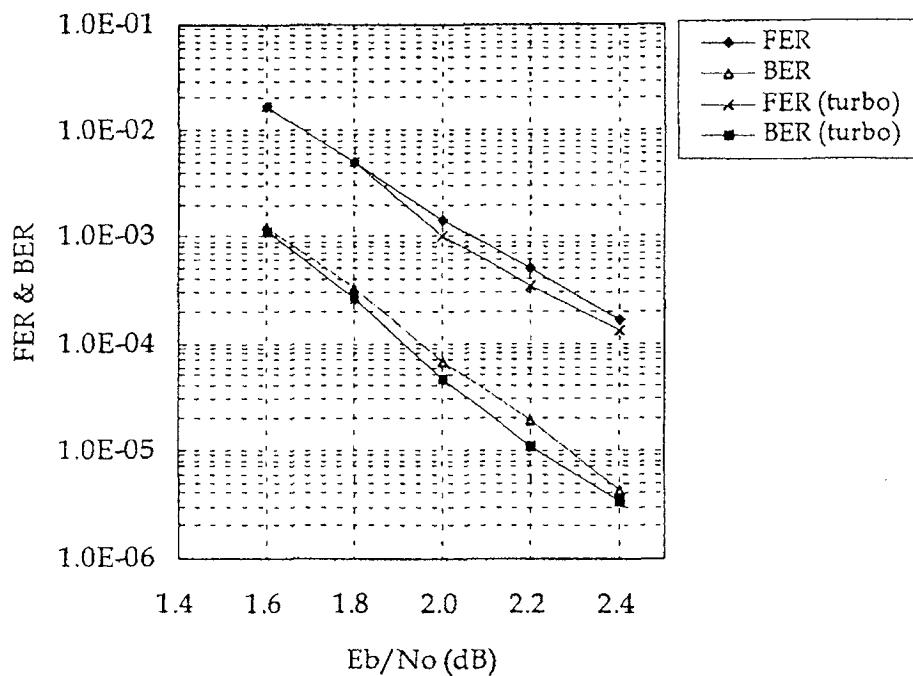
FER & BER 性能 ($n=0.8K, R=1/2$)

图 13C

$- H_d$

0	0	0	0	0	0	
0	1	2	3	6	11	
0	2	4	6	12	22	
0	3	6	9	18	33	
0	4	8	12	28	48	
0	5	10	20	35	7	
0	6	12	24	42	19	
0	7	14	28	3	38	
0	8	16	32	11	51	
0	9	18	36	19	11	
0	10	20	50	37	34	
0	11	22	2	46	48	
0	12	24	7	2	9	
0	13	26	12	24		
0	14	28	17	34		

图 14A

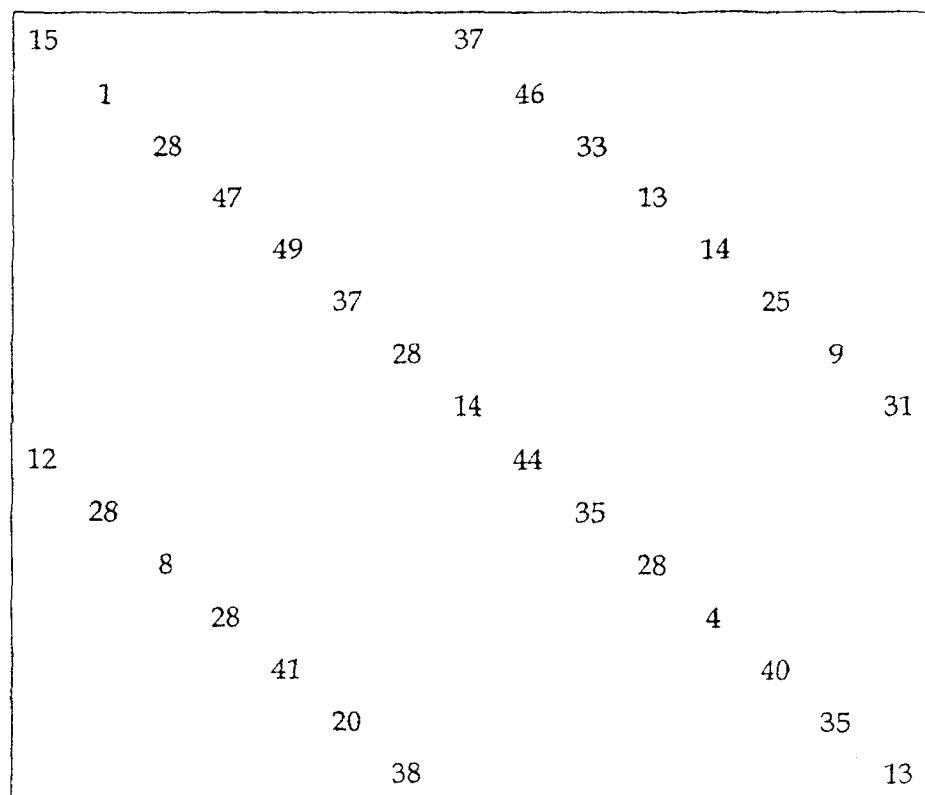
$-H_p$ 

图 14B

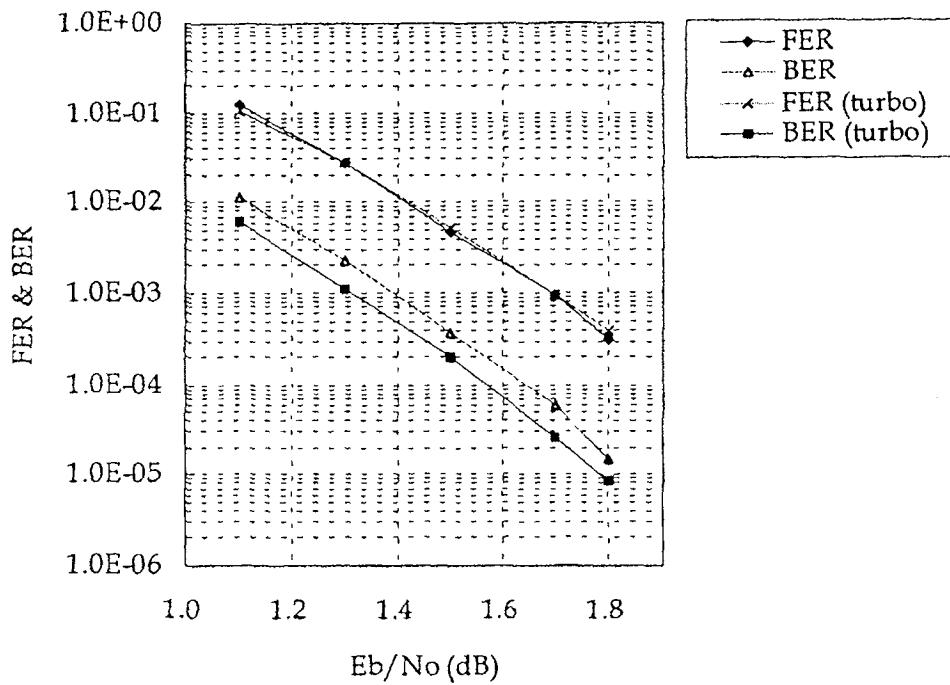
FER & BER 性能 ($n=1.6K, R=1/2$)

图 14C

- H_d

0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	6	11
0	2	4	6	12	22
0	3	6	9	18	33
0	4	8	12	28	48
0	5	10	20	35	60
0	6	12	24	42	72
0	7	14	28	56	91
0	8	16	32	64	1
0	9	18	36	72	14
0	10	20	50	90	37
0	11	22	55	99	51
0	12	24	60	5	65
0	13	26	65	27	
0	14	28	70	37	

图 15A

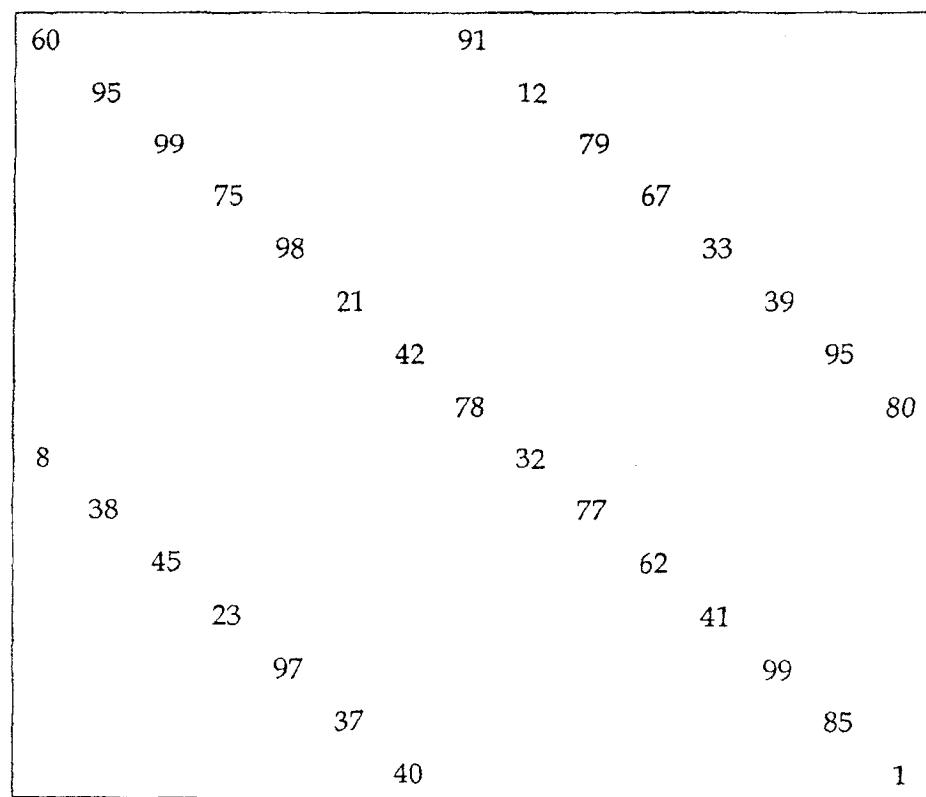
$-H_p$ 

图 15B

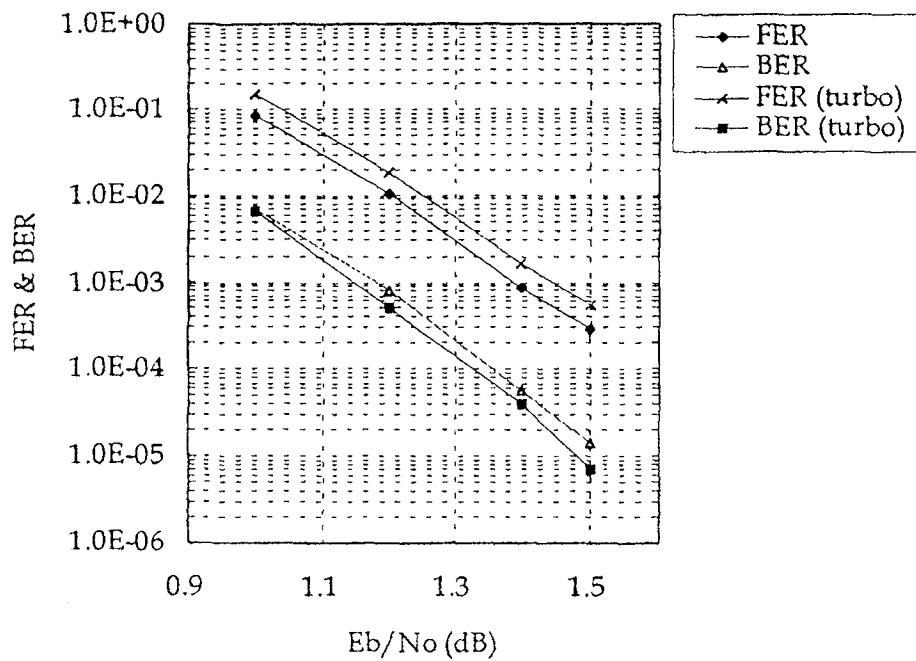
FER & BER 性能 ($n=3.1K, R=1/2$)

图 15C

$- H_d$

0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	6	11
0	2	4	6	12	22
0	3	6	9	18	33
0	4	8	12	28	48
0	5	10	20	35	60
0	6	12	24	42	72
0	7	14	28	56	91
0	8	16	32	64	104
0	9	18	36	72	117
0	10	20	50	90	140
0	11	22	55	99	154
0	12	24	60	108	168
0	13	26	65	130	
0	14	28	70	140	

图 16A

0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	6	11
0	2	4	6	12	22
0	3	6	9	18	33
0	4	8	12	28	48
0	5	10	20	35	60
0	6	12	24	42	72
0	7	14	28	56	2
0	8	16	32	64	15
0	9	18	36	72	28
0	10	20	50	1	51
0	11	22	55	10	65
0	12	24	60	19	79
0	13	26	65	41	
0	14	28	70	51	

具有 $d_v = 15$ ($p=89$) 的不规则分布的 H_d 的例子

图 16B

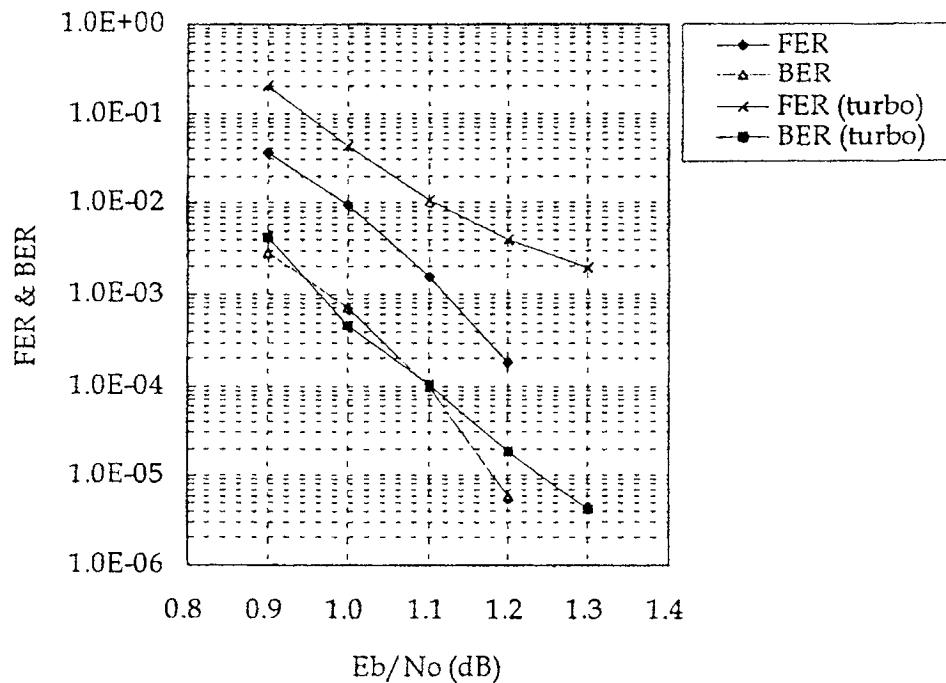
FER & BER 性能 ($n=7.7K, R=1/2$)

图 16C

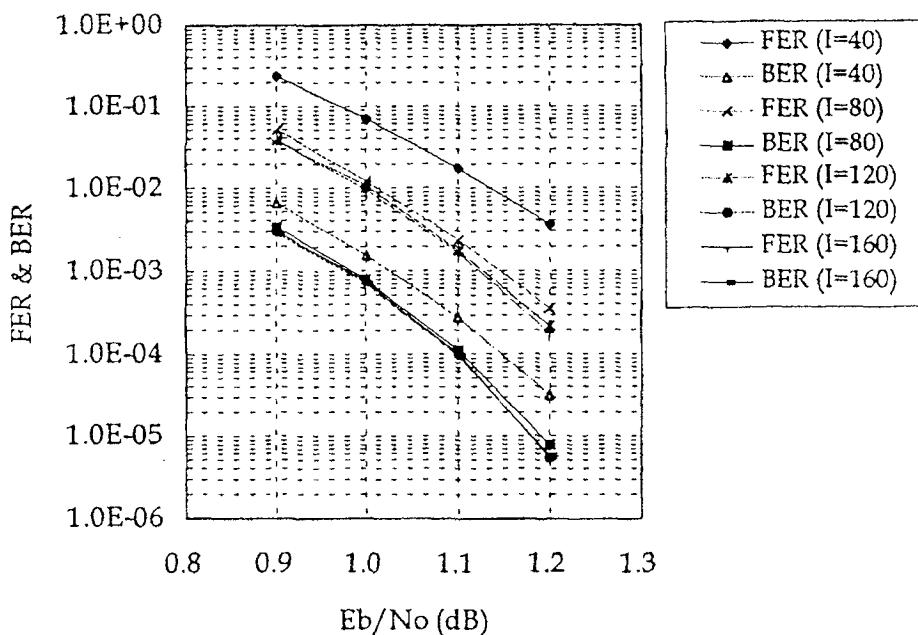
FER & BER 性能 ($n=7.7K, R=1/2$)

图 16D