Office de la Propriété Intellectuelle du Canada
Un organisme d'Industrie Canada

Canadian Intellectual Property Office
An agency of Industry Canada

CA 2360887 C 2009/03/24

(11)(21) 2 360 887

(12) BREVET CANADIEN
CANADIAN PATENT

(13) C

(86) Date de dépôt PCT/PCT Filing Date: 2000/01/27
(87) Date publication PCT/PCT Publication Date: 2000/08/10
(45) Date de délivrance/Issue Date: 2009/03/24
(85) Entrée phase nationale/National Entry: 2001/07/16
(86) N° demande PCT/PCT Application No.: FR 2000/000189
(87) N° publication PCT/PCT Publication No.: 2000/046947
(30) Priorités/Priorities: 1999/01/27 (FR99/01065); 1999/03/23 (FR99/03770); 1999/10/01 (FR99/12465); 1999/10/01 (FR99/12468); 1999/10/01 (FR99/12467)

(51) Cl.Int./Int.Cl. *H04L 9/32* (2006.01), *H04L 9/28* (2006.01)

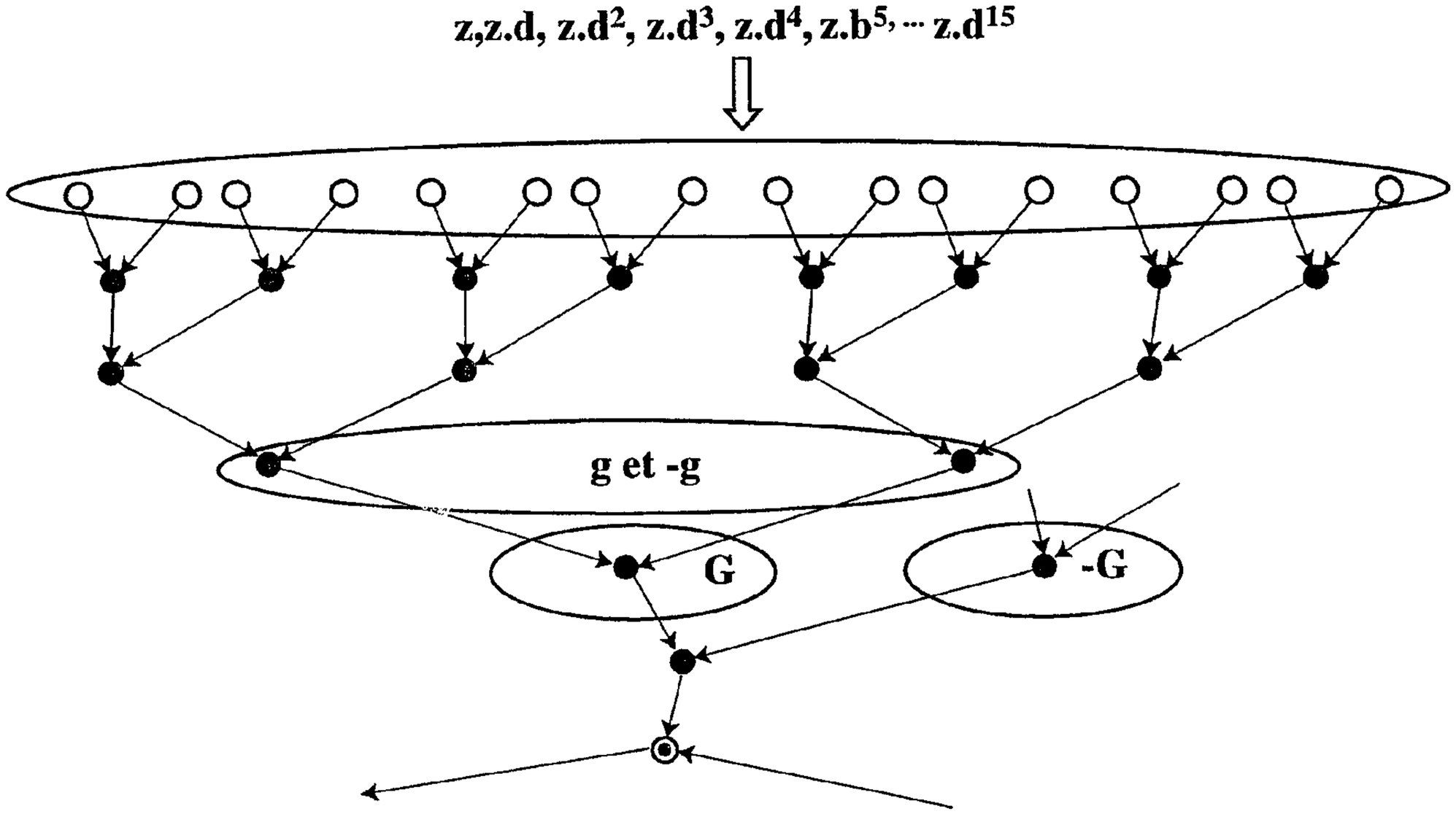
(72) Inventeurs/Inventors:
GUILLOU, LOUIS, FR;
QUISQUATER, JEAN-JACQUES, BE

(73) Propriétaires/Owners:
FRANCE TELECOM, FR;
MATH RIZK, BE;
TDF, FR

(74) Agent: OYEN WIGGS GREEN & MUTALA LLP

(54) Titre : PROCEDE, SYSTEME, DISPOSITIF DESTINES A PROUVER L'AUTHENTICITE D'UNE ENTITE ET/OU L'INTEGRITE ET/OU L'AUTHENTICITE D'UN MESSAGE AUX MOYENS DE FACTEURS PREMIERS PARTICULIERS

(54) Title: METHOD, SYSTEM, DEVICE FOR PROVING THE AUTHENTICITY OF AN ENTITY AND/OR THE INTEGRITY AND/OR THE AUTHENTICITY OF A MESSAGE USING SPECIFIC PRIME FACTORS



(57) Abrégé/Abstract:
La preuve est établie au moyen des paramètres suivants: un module public n constitué par le produit de f facteurs premiers, p_i,f >2, un exposant public v, m nombres de base, g_i, m>1. Les nombres de base g_i, sont tels que les deux équations: $x^2 \equiv g_i \bmod n$ et $x^2 \equiv g_i \bmod n$ n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n, et tel que l'équation $x^v \equiv -g_i^2 \bmod n$ a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo n dans le cas, où l'exposant public v est de la forme $v = 2^k$ où k est un paramètre de sécurité.

PCT ORGANISATION MONDIALE DE LA PROPRIETE INTELLECTUELLE
Bureau international

DEMANDE INTERNATIONALE PUBLIEE EN VERTU DU TRAITE DE COOPERATION EN MATIERE DE BREVETS (PCT)

(51) Classification internationale des brevets 7 : H04L

A2

(11) Numéro de publication internationale: **WO 00/46947**

(43) Date de publication internationale: 10 août 2000 (10.08.00)

(21) Numéro de la demande internationale: PCT/FR00/00189

(22) Date de dépôt international: 27 janvier 2000 (27.01.00)

(30) Données relatives à la priorité:

99/01065	27 janvier 1999 (27.01.99)	FR
99/03770	23 mars 1999 (23.03.99)	FR
99/12465	1er octobre 1999 (01.10.99)	FR
99/12467	1er octobre 1999 (01.10.99)	FR
99/12468	1er octobre 1999 (01.10.99)	FR

(71) Déposants *(pour tous les Etats désignés sauf US)*: FRANCE TELECOM [FR/FR]; 6, place d'Alleray, F–75015 Paris (FR). TELEDIFFUSION DE FRANCE [FR/FR]; 10, rue d'Oradour–sur–Glane, F–75732 Paris Cedex 15 (FR). MATH RIZK [BE/BE]; Verte Voie, 20 Boîte 5, B–1348 Louvain–la–Neuve (BE).

(72) Inventeurs; et
(75) Inventeurs/Déposants *(US seulement)*: GUILLOU, Louis [FR/FR]; 16, rue de l'Ise, F–35230 Bourgbarre (FR). QUISQUATER, Jean–Jacques [BE/BE]; 3, avenue des Canards, B–1640 Rhode Saint Genese (BE).

(74) Mandataire: VIDON, Patrice; Cabinet Patrice Vidon, Immeuble Germanium, 80, avenue des Buttes de Coësmes, F–35700 Rennes (FR).

(81) Etats désignés: AE, AL, AM, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BR, BY, CA, CH, CN, CR, CU, CZ, DE, DK, DM, EE, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, HR, HU, ID, IL, IN, IS, JP, KE, KG, KP, KR, KZ, LC, LK, LR, LS, LT, LU, LV, MA, MD, MG, MK, MN, MW, MX, NO, NZ, PL, PT, RO, RU, SD, SE, SG, SI, SK, SL, TJ, TM, TR, TT, TZ, UA, UG, US, UZ, VN, YU, ZA, ZW, brevet ARIPO (GH, GM, KE, LS, MW, SD, SL, SZ, TZ, UG, ZW), brevet eurasien (AM, AZ, BY, KG, KZ, MD, RU, TJ, TM), brevet européen (AT, BE, CH, CY, DE, DK, ES, FI, FR, GB, GR, IE, IT, LU, MC, NL, PT, SE), brevet OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GW, ML, MR, NE, SN, TD, TG).

Publiée

Sans rapport de recherche internationale, sera republiée dès réception de ce rapport.

(54) Title: METHOD, SYSTEM, DEVICE FOR PROVING THE AUTHENTICITY OF AN ENTITY AND/OR THE INTEGRITY AND/OR THE AUTHENTICITY OF A MESSAGE USING SPECIFIC PRIME FACTORS

(54) Titre: PROCEDE, SYSTEME, DISPOSITIF DESTINES A PROUVER L'AUTHENTICITE D'UNE ENTITE ET/OU L'INTEGRITE ET/OU L'AUTHENTICITE D'UN MESSAGE AUX MOYENS DE FACTEURS PREMIERS PARTICULIERS

(57) Abstract

The proof is provided by means of the following parameters: a public module n formed by the product of f prime factors p_i, f>2; a public superscript v; m base numbers g_i, m>1. The base numbers g_i are such that the two equations: $x^2 \equiv g_i \bmod n$ and $x^2 \equiv -g_i \bmod n$ cannot de solved in x in the ring of integers modulo n, and such that the equation $x^v \equiv g_i^2 \bmod n$ can be solved in x in the ring of integers modulo n in the case where the public superscript v is in the form $v = 2^k$, wherein k is a security parameter.

(57) Abrégé

La preuve est établie au moyen des paramètres suivants: un module public n constitué par le produit de f facteurs premiers, p_i,f>2, un exposant public v, m nombres de base, g_i, m>1. Les nombres de base g_i, sont tels que les deux équations: $x^2 \equiv g_i \bmod n$ et $x^2 \equiv g_i \bmod n$ n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n, et tel que l'équation $x^v \equiv -g_i^2 \bmod n$ a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo n dans le cas, où l'exposant public v est de la forme $v = 2^k$ où k est un paramètre de sécurité.

Procédé, système, dispositif destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message aux moyens de facteurs premiers particuliers.

La présente invention concerne le domaine technique des procédés, des systèmes ainsi que des dispositifs destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message.

Le brevet EP 0 311 470 B1 dont les inventeurs sont Louis Guillou et Jean-Jacques Quisquater décrit un tel procédé. On y fera ci-après référence en le désignant par les termes : "brevet GQ" ou "procédé GQ". Par la suite on désignera parfois par "GQ2", "invention GQ2" ou "technologie GQ2" de nouveaux développements de la technologie GQ faisant l'objet des demandes pendantes déposées le même jour que la présente demande par France Télécom, TDF et la Société Mathrizk et ayant pour inventeur Louis Guillou et Jean-Jacques Quisquater. Les traits caractéristiques de ces demandes pendantes sont rappelés chaque fois que cela est nécessaire dans la description qui suit.

Selon le procédé GQ, une entité appelée " autorité de confiance " attribue une identité à chaque entité appelée " témoin " et en calcule la signature RSA; durant un processus de personnalisation, l'autorité de confiance donne identité et signature au témoin. Par la suite, le témoin proclame : " *Voici mon identité ; j'en connais la signature RSA.* " Le témoin prouve sans la révéler qu'il connaît la signature RSA de son identité. Grâce à la clé publique de vérification RSA distribuée par l'autorité de confiance, une entité appelée " contrôleur " vérifie sans en prendre connaissance que la signature RSA correspond à l'identité proclamée. Les mécanismes utilisant le procédé GQ se déroulent " sans transfert de connaissance ". Selon le procédé GQ, le témoin ne connaît pas la clé privée RSA avec laquelle l'autorité de confiance signe un grand nombre d'identités.

La technologie GQ précédemment décrite fait appel à la technologie RSA.

Mais si la technologie RSA dépend bel et bien de la factorisation du module n, cette dépendance n'est pas une équivalence, loin s'en faut, comme le démontrent les attaques dites "multiplicatives" contre les diverses normes de signature numérique mettant en oeuvre la technologie RSA.

L'objectif de la technologie GQ2 est double : d'une part, améliorer les performances par rapport à la technologie RSA ; d'autre part, éviter les problèmes inhérents à la technologie RSA. La connaissance de la clé privée GQ2 est équivalente à la connaissance de la factorisation du module n. Toute attaque au niveau des triplets GQ2 se ramène à la factorisation du module n : il y a cette fois équivalence. Avec la technologie GQ2, la charge de travail est réduite, tant pour l'entité qui signe ou qui s'authentifie que pour celle qui contrôle. Grâce à un meilleur usage du problème de la factorisation, tant en sécurité qu'en performance, la technologie GQ2 évite les inconvénients présentés par la technologie RSA.

Le procédé GQ met en œuvre des calculs modulo des nombres de 512 bits ou davantage. Ces calculs concernent des nombres ayant sensiblement la même taille élevés à des puissances de l'ordre de $2^{16} + 1$. Or les infrastructures microélectroniques existantes, notamment dans le domaine des cartes bancaires, font usage de microprocesseurs auto-programmables monolithiques dépourvus de coprocesseurs arithmétiques. La charge de travail liée aux multiples opérations arithmétiques impliquées par des procédés tels que le procédé GQ, entraîne des temps de calcul qui dans certains cas s'avèrent pénalisant pour les consommateurs utilisant des cartes bancaires pour acquitter leurs achats. Il est rappelé ici, qu'en cherchant à accroître la sécurité des cartes de paiement, les autorités bancaires posent un problème particulièrement délicat à résoudre. En effet, il faut traiter deux questions apparemment contradictoires : augmenter la sécurité en utilisant des clés de plus en plus longues et distinctes pour

chaque carte tout en évitant que la charge de travail n'entraîne des temps de calcul prohibitifs pour les utilisateurs. Ce problème prend un relief particulier dans la mesure où, en outre, il convient de tenir compte de l'infrastructure en place et des composants microprocesseurs existants.

La technologie GQ2 apporte une solution à ce problème tout en renforçant la sécurité.

La technologie GQ2 met en oeuvre des facteurs premiers ayant des propriétés particulières. Différentes techniques existent pour produire ces facteurs premiers. La présente invention a pour objet un procédé permettant de produire de manière systématique de tels facteurs premiers. Elle concerne aussi l'application qui peut être faite de ceux-ci plus particulièrement dans la mise en oeuvre de la technologie GQ2. On souligne dès à présent que ces facteurs premiers particuliers et le procédé permettant de les obtenir sont susceptibles d'application en dehors du champ de la technologie GQ2.

L'invention s'applique à un procédé (procédé GQ2) destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou
- l'intégrité d'un message **M** associé à cette entité.

Cette preuve est établie au moyen de tout ou partie des paramètres suivants ou dérivés de ceux-ci:

- un module public **n** constitué par le produit de **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$ (**f** étant supérieur ou égal à 2),
- un exposant public **v** ;
- **m** nombres de base $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, ... $\mathbf{g_m}$ entiers, distincts, (**m** étant supérieur ou égal à 1).

Les nombres de base $\mathbf{g_i}$ sont tels que les deux équations (1) et (2) :

$$\mathbf{x^2 \equiv g_i \bmod n} \quad \text{et} \quad \mathbf{x^2 \equiv - g_i \bmod n}$$

n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo **n**,

et tel que l'équation (3):

$$\mathbf{x^v \equiv g_i^2 \bmod n}$$

a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo **n** .

Le procédé selon l'invention permet de produire les **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$. de telle sorte que les équations (1), (2) et (3) soient satisfaites. Le procédé selon l'invention comprend l'étape de choisir en premier :

- les **m** nombres de base $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, ... $\mathbf{g_m}$,
- la taille du module **n**,
- la taille des **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$.

Le procédé concerne le cas où l'exposant public **v** est de la forme :

$$\mathbf{v = 2^k}$$

où **k** est un paramètre de sécurité plus grand que 1. On choisit également en premier le paramètre de sécurité **k**. Cette valeur particulière de l'exposant **v** est un des traits essentiels de la technologie GQ2.

De préférence, les **m** nombres de base $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, ... $\mathbf{g_m}$, sont choisis au moins en partie parmi les premiers nombres entiers. De préférence également, le paramètre de sécurité **k** est un petit nombre entier, notamment inférieur à 100. Avantageusement, la taille du module **n** est supérieure à plusieurs centaines de bits. Avantageusement également, les **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$ ont une taille voisine de la taille du module **n** divisé par le nombre **f** de facteurs.

Selon une caractéristique importante du procédé selon l'invention, les **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$ ne sont pas choisis de manière quelconque. Parmi les **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$ un certain nombre d'entre eux : **e** seront choisis congrus à 1 modulo 4. Ce nombre **e** de facteurs premiers peut être nul. Dans le cas où **e** est nul le module **n** sera ci-après qualifié de module basique, dans le cas où $\mathbf{e > 0}$ le module **n** sera ci-après qualifié de module mixte. Les **f-e** autres facteurs premiers sont choisis congrus à 3 modulo 4. Ce nombre **f-e** de facteurs premiers est au moins égal à 2.

Choix des f-e facteurs premiers congrus à 3 modulo 4

Pour produire les **f-e** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_{f-e}}$ congrus à 3 modulo 4, on met en oeuvre les étapes suivantes :

- on choisit le premier facteur premier $\mathbf{p_1}$ congru à 3 modulo 4 puis,

- on choisit le deuxième facteur premier $\mathbf{p_2}$ tel que $\mathbf{p_2}$ soit complémentaire de $\mathbf{p_1}$ par rapport au nombre de base $\mathbf{g_1}$.

Pour choisir le facteur $\mathbf{p_{i+1}}$, on procède comme suit en distinguant deux cas:

(1) Cas où i> m

Dans le cas où i> m, on choisit le facteur $\mathbf{p_{i+1}}$ congru à 3 modulo 4.

(2) Cas où i≤ m

Dans ce cas où i≤ m, on calcule le profil ($\mathbf{Profil_i(g_i)}$) de $\mathbf{g_i}$ par rapport aux i premiers facteurs premiers $\mathbf{p_i}$,

- si le $\mathbf{Profil_i(g_i)}$ est plat, on choisit le facteur $\mathbf{p_{i+1}}$ tel que $\mathbf{p_{i+1}}$ soit complémentaire de $\mathbf{p_1}$ par rapport à $\mathbf{g_i}$,

- sinon, on choisit parmi les **i-1** nombres de bases $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, ... $\mathbf{g_{i-1}}$ et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé **g**, tel que $\mathbf{Profil_i(g) = Profil_i(g_i)}$, on choisit ensuite $\mathbf{p_{i+1}}$ tel que $\mathbf{Profil_{i+1}(g_i) \neq Profil_{i+1}(g)}$.

Les expressions “complémentaire”, “profil”, “profil plat” ont le sens défini dans la description.

Pour choisir le dernier facteur premier $\mathbf{p_{f-e}}$ on procède comme suit, en distinguant trois cas :

(1) Cas où f-e-1 > m

Dans le cas où f-e-1 > m, on choisit $\mathbf{p_{f-e}}$ congru à 3 modulo 4.

(2) Cas où f-e-1 = m

Dans le cas où f-e-1 = m, on calcule $\mathbf{Profil_{f-e-1}(g_m)}$ par rapport aux f-e-1 premiers facteurs premiers, de $\mathbf{p_1}$ à $\mathbf{p_{f-e-1}}$,

- si $\mathbf{Profil_{f-e-1}(g_m)}$ est plat, on choisit $\mathbf{p_{f-e-1}}$ tel qu’il soit

complémentaire de $\mathbf{p_1}$ par rapport à $\mathbf{g_m}$,

• sinon, on procède comme il est ci-après stipulé.

On choisit parmi les **m-1** nombres de bases de $\mathbf{g_1}$ à $\mathbf{g_{m-1}}$ et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé **g,** tel que $\mathbf{Profil_i(g) = Profil_i(g_i)}$ puis, on choisit ensuite $\mathbf{p_{f-e}}$ tel que $\mathbf{Profil_{f-e}(g) \neq Profil_{f-e}(g_m)}$.

(3) Cas où f-e-1 < m

Dans le cas où f-e-1 < m, on choisit $\mathbf{p_{f-e}}$ tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(3.1) Première condition.

On calcule $\mathbf{Profil_{f-e-1}(g_{f-e-1})}$ par rapport aux f-e-1 premiers facteurs premiers, de $\mathbf{p_1}$ à $\mathbf{p_{f-e-1}}$, Deux cas sont alors à considérer. Selon l'un ou l'autre de ces deux cas, la première condition sera différente.

Si $\mathbf{Profil_{f-e-1}(g_{f-e-1})}$ est plat, on choisit $\mathbf{p_{f-e}}$ tel qu'il satisfasse à la première condition d'être complémentaire de $\mathbf{p_1}$ par rapport à $\mathbf{g_{f-e-1}}$ (première condition selon le premier cas) sinon, on choisit parmi les **f-e-1** nombres de bases de $\mathbf{g_1}$ à $\mathbf{g_{m-1}}$ et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé **g,** tel que $\mathbf{Profil_i(g) = Profil_{f-e-1}(g_{f-e-1})}$ puis, on choisit ensuite $\mathbf{p_{f-e}}$ tel qu'il satisfasse à la condition d'être tel que $\mathbf{Profil_{f-e}\,(g) \neq Profil_{f-e}\,(g_m)}$, (première condition selon le deuxième cas)

(3.2) Deuxième condition

On sélectionne parmi l'ensemble des derniers nombres de bases de $\mathbf{g_{f-e}}$ à $\mathbf{g_m}$ ceux dont le profil $\mathbf{Profil_{f-e-1}(g_i)}$ est plat puis, on choisit $\mathbf{p_{f-e}}$ tel qu'il satisfasse à la condition d'être complémentaire de $\mathbf{p_1}$ par rapport à chacun des nombres de bases ainsi sélectionnés (deuxième condition).

Choix des e facteurs premiers congrus à 1 modulo 4

Pour produire les **e** facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, on évalue chaque candidat facteur premier **p** , de $\mathbf{p_{f-e}}$ à $\mathbf{p_f}$, en lui faisant subir les deux tests successifs suivants.

(1) Premier test

On calcule le symbole de Legendre de chaque nombre de base $\mathbf{g_i}$, de $\mathbf{g_1}$ à $\mathbf{g_m}$, par rapport au facteur premier **p** candidat,

- si le symbole de Legendre est égal à -1, on rejette le candidat **p**,
- si le symbole de Legendre est égal à +1, on poursuit l'évaluation du candidat **p** en passant au nombre de base suivant puis, lorsque le dernier nombre de base a été pris en compte on passe au deuxième test,

(2) Deuxième test,

On calcule un nombre entier **t** tel que p-1 est divisible par 2^t mais pas par 2^{t+1} puis, on calcule un entier **s** tel que $\mathbf{s = (p-1+2^t)/2^{t+1}}$.

On applique la clé $\langle \mathbf{s, p} \rangle$ à chaque valeur publique $\mathbf{G_i}$ pour obtenir un résultat **r**

$$\mathbf{r \equiv G_i^{\,s} \bmod p}$$

Si **r** est égal à $\mathbf{g_i}$ ou - $\mathbf{g_i}$, on poursuit le deuxième test en passant à la valeur publique $\mathbf{G_{i+1}}$ suivante.

Si **r** est différent de $\mathbf{g_i}$ ou - $\mathbf{g_i}$, on calcule un facteur **u** en appliquant l'algorithme ci-après spécifié pour un indice **ii** allant de 1 à t-2. L'algorithme met en oeuvre deux variables : **w** initialisée par **r** et $\mathbf{jj = 2^{ii}}$ prenant des valeurs allant de 2 à 2^{t-2}, ainsi qu'un nombre **b** obtenu par l'application de la clé $\langle \mathbf{(p-1)/2^t, p} \rangle$ à un résidu non quadratique de CG(p).

L'algorithme consiste à répéter autant que nécessaire, la séquence suivante:

- Etape 1 : on calcule $w^2/G_i \pmod p$.
- Etape 2 : on élève le résultat à la puissance 2^{t-ii-1}. Deux cas sont à considérer.

Premier cas

Si on obtient +1, on passe à la valeur publique $\mathbf{G_{i+1}}$ suivante et on poursuit le deuxième test pour cette valeur publique.

Deuxième cas.

Si on obtient -1, on calcule jj = 2^{ii} puis, on remplace w par w.b^{jj} (mod p). Ensuite, on poursuit l'algorithme pour la valeur suivante de l'indice ii.

A l'issue de l'algorithme, la valeur figurant dans la variable jj permet de calculer un nombre entier u par la relation jj = 2^{t-u} puis, on calcule l'expression t-u. Deux cas se présentent :

- si t-u < k , on rejette le candidat **p**
- si t-u ≥ k, on continue l'évaluation du candidat **p** en passant à la valeur publique $\mathbf{G_{i+1}}$ suivante puis, en poursuivant le deuxième test.

Le candidat **p** est accepté comme facteur premier congru à 1 modulo 4 si à l'issue du deuxième test, pour toutes les **m** valeurs publiques $\mathbf{G_i}$, il n'a pas été rejeté.

Application aux valeurs publiques et privées de GQ2

La présente invention concerne également un procédé (procédé GQ2) faisant application du procédé qui vient d'être décrit et qui permet, rappelons le, de produire **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$ ayant des propriétés particulières. Le procédé faisant application du procédé qui vient d'être décrit est destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou
- l'intégrité d'un message **M** associé à cette entité,

Cette preuve est établie au moyen de tout ou partie des paramètres suivants ou dérivés de ceux-ci:

- **m** couples de valeurs privées $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, ... $\mathbf{Q_m}$ et publiques $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, ... $\mathbf{G_m}$ (**m** étant supérieur ou égal à 1),
- le module public **n** constitué par le produit desdits **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots \mathbf{p_f}$ (**f** étant supérieur ou égal à 2),
- l'exposant public **v** .

Ledit module, ledit exposant et lesdites valeurs sont liés par des relations du type :

$$\mathbf{G_i \,.\, Q_i^{\,v} \equiv 1 \,.\, mod\ n} \text{ ou } \mathbf{G_i \equiv Q_i^{\,v}\ mod\ n}\ .$$

Ledit exposant **v** est tel que

$$\mathbf{v = 2^k}$$

où **k** est un paramètre de sécurité plus grand que 1 .

Ladite valeur publique $\mathbf{G_i}$ est le carré $\mathbf{g_i^2}$ du nombre de base $\mathbf{g_i}$ inférieur aux **f** facteurs premiers $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ... $\mathbf{p_f}$. Le nombre de base $\mathbf{g_i}$ est tel que les deux équations :

$$\mathbf{x^2 \equiv g_i \bmod n} \quad \text{et} \quad \mathbf{x^2 \equiv - g_i \bmod n}$$

n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo **n** et tel que l'équation :

$$\mathbf{x^v \equiv g_i^2 \bmod n}$$

a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo **n.**

Ledit procédé met en œuvre selon les étapes suivantes une entité appelée témoin. Ladite entité témoin dispose des **f** facteurs premiers $\mathbf{p_i}$ et/ou des paramètres des restes chinois des facteurs premiers et/ou du module public **n** et/ou des **m** valeurs privées $\mathbf{Q_i}$ et/ou des **f.m** composantes $\mathbf{Q_{i,j}}$ ($\mathbf{Q_{i,j} \equiv Q_i \bmod p_j}$) des valeurs privées $\mathbf{Q_i}$ et de l'exposant public **v** .

Le témoin calcule des engagements **R** dans l'anneau des entiers modulo **n** .

Chaque engagement est calculé :

- soit en effectuant des opérations du type

$$\mathbf{R \equiv r^v \bmod n}$$

où **r** est un aléa tel que $\mathbf{0 < r < n}$,

- soit en effectuant des opérations du type

$$\mathbf{R_i \equiv r_i^v \bmod p_i}$$

où $\mathbf{r_i}$ est un aléa associé au nombre premier $\mathbf{p_i}$ tel que $\mathbf{0 < r_i < p_i}$, chaque $\mathbf{r_i}$ appartenant à une collection d'aléas $\{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \ldots \mathbf{r_f}\}$, puis en appliquant la méthode des restes chinois.

Le témoin reçoit un ou plusieurs défis **d**. Chaque défi **d** comportant **m** entiers $\mathbf{d_i}$ ci-après appelés défis élémentaires. Le témoin calcule à partir de chaque défi **d** une réponse **D**,

- soit en effectuant des opérations du type :

$$\mathbf{D \equiv r \,.\, Q_1^{\,d1} \,.\, Q_2^{\,d2} \ldots\, Q_m^{\,dm} \bmod n}$$

- soit en effectuant des opérations du type :

$$\mathbf{D_i \equiv r_i \,.\, Q_{i,1}^{\,d1} \,.\, Q_{i,2}^{\,d2} \ldots\, Q_{i,m}^{\,dm} \bmod p_i}$$

puis, en appliquant la méthode des restes chinois.

Le procédé est tel qu'il y a autant de réponses **D** que de défis **d** que d'engagements **R,** chaque groupe de nombres **R, d, D** constituant un triplet noté **{R, d, D}.**

De préférence, pour mettre en oeuvre, comme il vient d'être décrit, les couples de valeurs privées $\mathbf{Q_1, Q_2, \ldots Q_m}$ et publiques $\mathbf{G_1, G_2, \ldots G_m}$, on utilise les facteurs premiers $\mathbf{p_1, p_2, \ldots p_f}$ et/ou les paramètres des restes chinois, les nombres de bases $\mathbf{g_1, g_2, \ldots g_m}$ et/ou les valeurs publiques $\mathbf{G_1, G_2, \ldots G_m}$ pour calculer :

- soit les valeurs privées $\mathbf{Q_1, Q_2, \ldots Q_m}$ en extrayant une **k ième** racine carrée modulo **n** de $\mathbf{G_i}$, ou en prenant l'inverse d'une **k ième** racine carrée modulo **n** de $\mathbf{G_i}$,

- soit les **f.m** composantes privées $\mathbf{Q_{i,\,j}}$ des valeurs privées $\mathbf{Q_1, Q_2, \ldots Q_m}$, telles que $\mathbf{Q_{i,\,j} \equiv Q_i \,(mod\ p_j)}$,

Plus particulièrement, pour calculer les **f.m** composantes privées $\mathbf{Q_{i,\,j}}$ des valeurs privées $\mathbf{Q_1, Q_2, \ldots Q_m}$:

- on applique la clé $\langle \mathbf{s, p_j} \rangle$ pour calculer **z** tel que

$$\mathbf{z \equiv G_i^{\,s} \,(mod\ p_j)}$$

- et on utilise les valeurs **t** et **u** .

Les valeurs **t** et **u** sont calculées comme il a été indiqué ci-dessus dans le cas où $\mathbf{p_j}$ est congru à 1 modulo 4. Les valeurs **t** et **u** sont prises respectivement égales à 1 (t=1) et 0 (u=0) dans le cas où $\mathbf{p_j}$ est congru à 3 modulo 4.

Si la valeur **u** est nul, on considère l'ensemble des nombres zz tels que :

• • • zz soit égale à z ou tel que

• • • zz soit égale au produit (mod p_j) de z par chacune des 2^{ii-t} racines 2^{ii} ièmes primitives de l'unité, ii allant de 1 à min(k,t) .

Si **u** est positif, on considère l'ensemble des nombres zz tels que zz soit égale au produit (mod p_j) de za par chacune des 2^k racines 2^k ièmes de l'unité, za désignant la valeur de la variable w à l'issue de l'algorithme ci-dessus décrit.

On en déduit au moins une valeur de la composante $\mathbf{Q_{i,j}}$. Elle est égale à zz lorsque l'équation $\mathbf{G_i \equiv Q_i^v \bmod n}$ est utilisée ou bien elle est égale à l'inverse de zz modulo p_j de zz lorsque l'équation $\mathbf{G_i \cdot Q_i^v \equiv 1 \cdot \bmod n}$ est utilisée.

Description

Rappelons l'objectif de la technologie GQ : l'authentification dynamique d'entités et de messages associés, ainsi que la signature numérique de messages.

La version classique de la technologie GQ fait appel à la technologie RSA. Mais, si la technologie RSA dépend bel et bien de la factorisation, cette dépendance n'est pas une équivalence, loin s'en faut, comme le démontrent les attaques dites « multiplicatives » contre diverses normes de signature numérique mettant en œuvre la technologie RSA.

Dans le cadre de la technologie GQ2, la présente partie de l'invention porte plus précisément sur la production des jeux de clés GQ2 destinés à assurer l'authentification dynamique et la signature numérique. La technologie GQ2 ne fait pas appel à la technologie RSA. L'objectif est double : d'une part, améliorer les performances par rapport à la technologie RSA ; d'autre part, éviter les problèmes inhérents à la technologie RSA. La clé privée GQ2 est la factorisation du module n. Toute attaque au niveau des triplets GQ2 se ramène à la factorisation du module n : il y a cette fois équivalence. Avec la technologie GQ2, la charge de travail est réduite, tant pour l'entité qui signe ou qui s'authentifie que pour celle qui contrôle. Grâce à un meilleur usage du problème de la factorisation, tant en sécurité qu'en performance, la technologie GQ2 concurrence la technologie RSA.

La technologie GQ2 utilise un ou plusieurs petits nombres entiers plus grands que 1, disons m petits nombres entiers ($m \geq 1$) appelés « nombres de base » et notés par g_i. Puis, on choisit une clé publique de vérification $\langle v, n \rangle$ de la manière suivante. L'exposant public de vérification v est 2^k où k est un petit nombre entier plus grand que 1 ($k \geq 2$). Le module public n est le produit d'au moins deux facteurs premiers plus grands que les nombres de base, disons f facteurs premiers ($f \geq 2$) notés par p_j, de $p_1 \ldots p_f$. Les f facteurs premiers sont choisis de façon à ce que le module public n ait les propriétés

suivantes par rapport à chacun des m nombres de base de g_1 à g_m.

- D'une part, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n, c'est-à-dire que g_i et $-g_i$ sont deux résidus non quadratiques (mod n).

$$x^2 \equiv g_i \pmod{n} \qquad (1)$$

$$x^2 \equiv -g_i \pmod{n} \qquad (2)$$

- D'autre part, l'équation (3) a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo n.

$$x^{2^k} \equiv g_i^2 \pmod{n} \qquad (3)$$

Par la suite, ces propriétés sont encore appelées les principes GQ2.

La clé publique de vérification $\langle v, n \rangle$ étant fixée selon les nombres de base de g_1 à g_m avec $m \geq 1$, chaque nombre de base g_i détermine un couple de valeurs GQ2 comprenant une valeur publique G_i et une valeur privée Q_i: soit m couples notés de G_1 Q_1 à G_m Q_m. La valeur publique G_i est le carré du nombre de base g_i : soit $G_i = g_i^2$. La valeur privée Q_i est une des solutions à l'équation (3) ou bien l'inverse (mod n) d'une telle solution.

De même que le module n se décompose en f facteurs premiers, l'anneau des entiers modulo n se décompose en f corps de Galois, de CG(p_1) à CG(p_f). Voici les projections des équations (1), (2) et (3) dans CG(p_j).

$$x^2 \equiv g_i \pmod{p_j} \qquad (1.a)$$

$$x^2 \equiv -g_i \pmod{p_j} \qquad (2.a)$$

$$x^{2^k} \equiv g_i^2 \pmod{p_j} \qquad (3.a)$$

Chaque valeur privée Q_i peut se représenter de manière unique par f composantes privées, une par facteur premier : $Q_{i,j} \equiv Q_i \pmod{p_j}$. Chaque composante privée $Q_{i,j}$ est une solution à l'équation (3.a) ou bien l'inverse (mod p_j) d'une telle solution. Après que toutes les solutions possibles à chaque équation (3.a) aient été calculées, la technique des restes chinois permet d'établir toutes les valeurs possibles pour chaque valeur privée Q_i à partir de f composantes de $Q_{i,1}$ à $Q_{i,f}$: Q_i = Restes Chinois ($Q_{i,1}$, $Q_{i,2}$, … $Q_{i,f}$) de manière à obtenir toutes les solutions possibles à l'équation (3).

Voici la technique des restes chinois : soient deux nombres entiers positifs premiers entre eux a et b tels que $0 < a < b$, et deux composantes X_a de 0 à a–1 et X_b de 0 à b–1 ; il s'agit de déterminer X = Restes Chinois (X_a, X_b), c'est-à-dire, le nombre unique X de 0 à $a.b$–1 tel que $X_a \equiv X \pmod{a}$ et $X_b \equiv X \pmod{b}$. Voici le paramètre des restes chinois : $\alpha \equiv \{b \pmod{a}\}^{-1} \pmod{a}$. Voici l'opération des restes chinois : $\varepsilon \equiv X_b \pmod{a}$; $\delta = X_a - \varepsilon$; si δ est négatif, remplacer δ par $\delta + a$; $\gamma \equiv \alpha \,.\, \delta \pmod{a}$; $X = \gamma \,.\, b + X_b$.

Lorsque les facteurs premiers sont rangés dans l'ordre croissant, du plus petit p_1 au plus grand p_f, les paramètres des restes chinois peuvent être les suivants (il y en a f–1, c'est-à-dire, un de moins que de facteurs premiers). Le premier paramètre des restes chinois est $\alpha \equiv \{p_2 \pmod{p_1}\}^{-1} \pmod{p_1}$. Le second paramètre des restes chinois est $\beta \equiv \{p_1.p_2 \pmod{p_3}\}^{-1} \pmod{p_3}$. Le i ième paramètre des restes chinois est $\lambda \equiv \{p_1.p_2. \ldots p_{i\_1} \pmod{p_i}\}^{-1} \pmod{p_i}$. Et ainsi de suite. Ensuite, en f–1 opérations des restes chinois, on établit un premier résultat (mod p_2 fois p_1) avec le premier paramètre, puis, un second résultat (mod $p_1.p_2$ fois p_3) avec le second paramètre, et ainsi de suite, jusqu'à un résultat (mod $p_1. \ldots p_{f\_1}$ fois p_f), c'est-à-dire, (mod n).

L'objet de l'invention est une méthode pour produire au hasard n'importe quel jeu de clés GQ2 parmi tous les jeux possibles, à savoir :

- produire au hasard n'importe quel module parmi tous les modules GQ2 possibles, c'est-à-dire, les modules assurant que, pour chacun des m nombres de base g_i, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n alors que l'équation (3) en a.
- calculer toutes les solutions possibles à chacune des équations (3.a). La technique des restes chinois permet ensuite d'obtenir une valeur privée Q_i à partir de chaque jeu de f composantes de $Q_{i,1}$ à $Q_{i,f}$ de manière à obtenir n'importe quelle solution en x à l'équation (3) parmi toutes les solutions possibles.

$$Q_i = \text{Restes Chinois } (Q_{i,1}, Q_{i,2}, \ldots Q_{i,f})$$

Pour appréhender le problème, puis, comprendre la solution que nous

donnons au problème, c'est-à-dire, l'invention, nous analysons tout d'abord l'applicabilité des principes de la technologie GQ2. Commençons par rappeler la notion de rang dans un corps de Galois CG(p) afin d'étudier les fonctions « élever au carré dans CG(p) » et « prendre une racine carrée d'un résidu quadratique dans CG(p) ». Puis, analysons l'existence et le nombre de solutions en x dans CG(p) aux équations (1.a), (2.a) et (3.a).

Rang des éléments dans CG(p)

Soit un nombre premier impair p et un nombre entier positif a plus petit que p. Définissons la suite $\{X\}$.

$$\{X\} \equiv \{x_1 = a;\ \text{puis, pour}\ i \geq 1,\ x_{i+1} \equiv a.x_i \pmod{p}\}$$

Calculons le terme pour l'indice $i+p$ et utilisons le théorème de Fermat.

$$x_{i+p} \equiv a^p x_i \equiv a.x_i \equiv x_{i+1} \pmod{p}$$

Par conséquent, la période de la suite $\{X\}$ est $p-1$ ou un diviseur de $p-1$. Cette période dépend de la valeur de a. Par définition, cette période est appelée « le rang de a (mod p) ». C'est l'indice d'apparition de l'unité dans la suite $\{X\}$.

$$x_{rang(a,p)} \equiv 1 \pmod{p}$$

Par exemple, lorsque $(p-1)/2$ est un nombre premier impair p', le corps de Galois CG(p) comporte un seul élément de rang 1 : c'est 1, un seul élément de rang 2 : c'est -1, $p'-1$ éléments de rang p', $p'-1$ éléments de rang $2.p'$, c'est-à-dire, de rang $p-1$.

Les éléments de CG(p) ayant pour rang $p-1$ sont appelés les éléments « primitifs » ou encore, « générateurs » de CG(p). La dénomination est due au fait que leurs puissances successives dans CG(p), c'est-à-dire, les termes de la suite $\{X\}$ pour les indices allant de 1 à $p-1$, forment une permutation de tous les éléments non nuls de CG(p).

Soit un élément primitif y de CG(p). Evaluons le rang de l'élément $y^i \pmod{p}$ en fonction de i et de $p-1$. Lorsque i est premier avec $p-1$, c'est $p-1$. Lorsque i divise $p-1$, c'est $(p-1)/i$. Dans tous les cas, c'est $(p-1)/\text{pgcd}(p-1, i)$.

La fonction d'Euler est notée par φ. Par définition, n étant un nombre entier positif, $\varphi(n)$ est le nombre de nombres entiers positifs, plus petits que n et premiers avec n. Dans le corps CG(p), il y a donc $\varphi(p-1)$ éléments primitifs.

A titre d'illustration, voici la base de la technologie RSA. Le module public n est le produit de f facteurs premiers, de p_1 à p_f avec $f \geq 2$, tel que pour chaque facteur premier p_j, l'exposant public v est premier avec p_j-1. La clé $\langle v, p_j \rangle$ respecte le rang des éléments de CG(p_j) : elle les permute. La permutation inverse s'obtient par une clé $\langle s_j, p_j \rangle$ telle que p_j-1 divise $v.s_j-1$.

Carrés et racines carrées dans CG(p)

Les éléments x et $p-x$ ont le même carré dans CG(p). La clé $\langle 2, p \rangle$ ne permute pas les éléments de CG(p) parce que $p-1$ est pair. Pour chaque nombre premier p, définissons un nombre entier t de la manière suivante : $p-1$ est divisible par 2^t, mais pas par 2^{t+1}, c'est-à-dire que p est congru à $2^t+1 \pmod{2^{t+1}}$. Par exemple, $t = 1$ lorsque p est congru à 3 (mod 4) ; $t = 2$ lorsque p est congru à 5 (mod 8) ; $t = 3$ lorsque p est congru à 9 (mod 16) ; $t = 4$ lorsque p est congru à 17 (mod 32) ; et ainsi de suite. Chaque nombre premier impair figure dans une et une seule catégorie : p figure dans la t ième catégorie. En pratique, si l'on considère un assez grand nombre de nombres premiers successifs, environ un sur deux figure dans la première catégorie, un sur quatre dans la deuxième, un sur huit dans la troisième, un sur seize dans la quatrième, et ainsi de suite ; en résumé, un sur 2^t en moyenne figure dans la t ième catégorie.

Considérons le comportement de la fonction « élever au carré dans CG(p) » selon la parité du rang de l'argument.

- Il y a un seul élément fixe : c'est 1. Le carré de tout autre élément de rang impair est un autre élément ayant le même rang. Par conséquent, la clé $\langle 2, p \rangle$ permute l'ensemble des $(p-1)/2^t$ éléments de rang impair. Le nombre de cycles de permutation dépend de la factorisation de $(p-1)/2^t$. Par exemple, lorsque $(p-1)/2^t$ est un nombre premier p', il y a

un grand cycle de permutation comportant $p'-1$ éléments.

- Le carré de tout élément de rang pair est un autre élément dont le rang est divisé par deux. Par conséquent, les éléments de rang pair se répartissent sur $(p-1)/2^t$ branches ; chaque élément non nul de rang impair porte une branche de longueur t comportant 2^t-1 éléments, à savoir : un élément de rang divisible par deux mais pas par quatre, puis, si $t \geq 2$, deux éléments de rang divisible par quatre mais pas par huit, puis, si $t \geq 3$, quatre éléments de rang divisible par huit mais pas par seize, puis, si $t \geq 4$, huit éléments de rang divisible par seize mais pas par 32, et ainsi de suite. Les 2^{t-1} extrémités de chaque branche sont des résidus non quadratiques ; leur rang est divisible par 2^t.

Les figures 1A à 1D illustrent la fonction « élever au carré dans CG(p) » par un graphe orienté où chacun des $p-1$ éléments non nuls du corps trouve sa place : les résidus non quadratiques sont en blanc et les résidus quadratiques en noir ; parmi les résidus quadratiques, les éléments de rang impair sont encerclés.

Ces figures présentent respectivement :

- figure 1A : cas où p est congru à 3 (mod 4) ;
- figure 1B : cas où p est congru à 5 (mod 8) ;
- figure 1 C : cas où p est congru à 9 (mod 16) ;
- figure 1D : cas où p est congru à 17 (mod 32).

Voyons comment calculer une solution en x à l'équation $x^2 \equiv a \pmod{p}$ sachant que a est un résidu quadratique de CG(p), c'est-à-dire, comment « prendre une racine carrée dans CG(p) ». Il y a bien sûr plusieurs façons d'obtenir le même résultat : le lecteur pourra avantageusement consulter les pages 31 à 36 du livre de Henri Cohen, *a Course in Computational Algebraic Number Theory*, publié en 1993 par Springer à Berlin comme le volume 138 de la série *Graduate Texts in Mathematics* (GTM 138).

Calculons un nombre entier $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$ pour établir une clé $\langle s, p \rangle$.

Soit : $\langle (p+1)/4, p\rangle$ lorsque p est congru à 3 (mod 4), $\langle (p+3)/8, p\rangle$ lorsque p est congru à 5 (mod 8), $\langle (p+7)/16, p\rangle$ lorsque p est congru à 9 (mod 16), $\langle (p+15)/32, p\rangle$ lorsque p est congru à 17 (mod 32), et ainsi de suite.

- La clé $\langle s, p\rangle$ donne la racine carrée de rang impair de n'importe quel élément de rang impair. En effet, dans CG(p), r^2/a vaut a élevé à la puissance $(2.(p-1+2^t)/2^{t+1})-1 = (p-1)/2^t$. Par conséquent, lorsque a est sur un cycle, la clé $\langle s, p\rangle$ transforme a en une solution que nous nommons w. L'autre solution est $p-w$.
- D'une manière générale, la clé $\langle s, p\rangle$ transforme tout résidu quadratique a en une première approximation de solution que nous nommons r. Voici deux points clés, puis, l'ébauche d'une méthode pour améliorer pas à pas l'approximation jusqu'à une racine carrée de a.
  - D'une part, puisque a est un résidu quadratique, la clé $\langle 2^{t-1}, p\rangle$ transforme certainement r^2/a en 1.
  - D'autre part, supposons que nous connaissons un résidu non quadratique de CG(p) que nous nommons y ; la clé $\langle (p-1)/2^t, p\rangle$ transforme y en un élément que nous nommons b : c'est une racine 2^{t-1} ième de –1 ; en effet, $y^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. Par conséquent, dans CG(p), le groupe multiplicatif des 2^t racines 2^t ièmes de l'unité est isomorphe au groupe multiplicatif des puissances de b pour les exposants de 1 à 2^t.
  - Pour se rapprocher d'une racine carrée de a, élevons r^2/a à la puissance 2^{t-2} (mod p) : le résultat est +1 ou –1. La nouvelle approximation reste r si le résultat est +1 ou bien devient $b.r$ (mod p) si le résultat est –1. Par conséquent, la clé $\langle 2^{t-2}, p\rangle$ transforme certainement la nouvelle approximation en 1. On peut continuer à se rapprocher : au prochain pas, on ajustera s'il le faut en multipliant par b^2 (mod p) ; et ainsi de suite.

L'algorithme suivant établit des approximations successives pour aboutir à une racine carrée de a à partir des nombres entiers r et b définis ci-dessus ;

il utilise deux variables entières : w initialisée par r pour représenter les approximations successives et jj prenant des valeurs parmi les puissances de 2, de 2 à 2^{t-2}.

Pour i allant de 1 à t–2, répéter la séquence suivante :

- Calculer $w^2/a \pmod p$, puis, élever le résultat à la puissance $2^{t-i-1} \pmod p$: on doit obtenir +1 ou –1. Lorsque l'on obtient –1, calculer $jj = 2^i$, puis, remplacer w par $w.b^{jj} \pmod p$. Lorsque l'on obtient +1, ne rien faire.

A l'issue du calcul, w et $p-w$ sont les deux racines carrées de a dans CG(p). En outre, nous apprenons que le rang de a dans CG(p) est divisible par $2^t/jj$ mais pas par $2^{t+1}/jj$. La pertinence de cette remarque apparaîtra par la suite.

Analyse des principes de la technologie GQ2 dans CG(p)

Soit deux nombres entiers g et k plus grands que 1 et un nombre premier p plus grand que g. Analysons l'existence et le nombre de solutions en x dans CG(p) aux équations (1.a), (2.a) et (3.a).

Dans le corps de Galois CG(p), distinguons différents cas selon la valeur de t, c'est-à-dire, selon la puissance de deux qui divise p–1. Rappelons que p–1 est divisible par 2^t, mais pas par 2^{t+1}, c'est-à-dire que p est congru à 2^t+1 (mod 2^{t+1}). L'analyse précédente nous donne une idée assez précise du problème posé ainsi qu'une ébauche de solution.

Lorsque $t = 1$, p est congru à 3 (mod 4). Les symboles de Legendre de g et $-g$ par rapport à p sont différents ; tout résidu quadratique de CG(p) a deux racines carrées dans CG(p) : l'une est un résidu quadratique et l'autre un résidu non quadratique. D'une part, une des deux équations (1.a) ou (2.a) a deux solutions en x dans CG(p) et l'autre n'en a pas. D'autre part, l'équation (3.a) a deux solutions en x dans CG(p) quelle que soit la valeur de k.

Lorsque $t = 2$, p est congru à 5 (mod 8). Deux cas se présentent selon le symbole de Legendre de g par rapport à p. Lorsque le symbole vaut –1, g et $-g$ sont deux résidus non quadratiques de CG(p) : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en x dans CG(p). Lorsque le

symbole vaut +1, g et $-g$ sont deux résidus quadratiques de CG(p), chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en x dans CG(p) ; de plus, le rang de g^2 dans CG(p) est impair, ce qui implique que quelle que soit la valeur de k, l'équation (3.a) a quatre solutions en x dans CG(p) dont une seule de rang impair.

La figure 2 illustre les solutions à l'équation (3.a) avec $k = 6$ et p congru à 5 (mod 8), soit $t = 2$. Remarquons que, parce que le symbole de Legendre de 2 par rapport à p congru à 5 (mod 8) vaut -1, $2^{(p-1)/4}$ (mod p) est alors une racine carrée de -1. On a donc :

$p \equiv 5 \pmod 8$; par conséquent : $(2|p) = -1$

$p \equiv 2^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$; donc $b^2 \equiv -1 \pmod p$

Lorsque $t = 3$, p est congru à 9 (mod 16). Considérons le symbole de Legendre de g par rapport à p. Lorsque le symbole vaut -1, g et $-g$ sont deux résidus non quadratiques de CG(p) : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en x dans CG(p). Lorsque le symbole vaut +1, g et $-g$ sont deux résidus quadratiques de CG(p) ; chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en x dans CG(p) ; l'existence de solutions en x à l'équation (3.a) dépend du rang de g^2 dans CG(p) : ce rang est impair ou divisible par deux, mais pas par quatre. Lorsque le rang de g^2 dans CG(p) est divisible par deux, mais pas par quatre, l'équation (3.a) a quatre solutions en x dans CG(p) pour $k = 2$; elle n'en a pas pour $k \geq 3$. Lorsque le rang de g^2 dans CG(p) est impair, l'équation (3.a) a quatre solutions en x dans CG(p) pour $k = 2$ et huit pour $k \geq 3$; dans les deux cas, une seule est de rang impair.

Lorsque $t = 4$, p est congru à 17 (mod 32). Considérons le symbole de Legendre de g par rapport à p. Lorsque le symbole vaut -1, g et $-g$ sont deux résidus non quadratiques de CG(p) : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en x dans CG(p). Lorsque le symbole vaut +1, g et $-g$ sont deux résidus quadratiques de CG(p) ; chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en x dans CG(p) ; l'existence de solutions en x à

l'équation (3.a) dépend du rang de g^2 dans CG(p) : ce rang est impair ou divisible par deux ou quatre, mais pas par huit. Lorsque le rang de g^2 dans CG(p) est divisible par quatre, mais pas par huit, l'équation (3.a) a quatre solutions en x dans CG(p) pour $k = 2$; elle n'en a pas pour $k \geq 3$. Lorsque le rang de g^2 dans CG(p) est divisible par deux, mais pas par quatre, l'équation (3.a) a quatre solutions en x dans CG(p) pour $k = 2$ ou huit pour $k = 3$; elle n'en a pas pour $k \geq 4$. Lorsque le rang de g^2 dans CG(p) est impair, l'équation (3.a) a quatre solutions en x dans CG(p) pour $k = 2$, huit pour $k = 3$ et seize pour $k \geq 4$; dans les trois cas, une seule est de rang impair.

Et ainsi de suite, de sorte que le cas où p est congru à 1 (mod 4) peut se résumer comme suit.

Lorsque p est congru à 1 (mod 4), considérons le symbole de Legendre de g par rapport à p. Lorsque le symbole vaut -1, g et $-g$ sont deux résidus non quadratiques de CG(p) : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en x dans CG(p). Lorsque le symbole vaut $+1$, g et $-g$ sont deux résidus quadratiques de CG(p) ; chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en x dans CG(p). Définissons le nombre entier u : le rang de g^2 dans CG(p) est divisible par 2^u, mais pas par 2^{u+1} ; la valeur de u figure parmi les $t-1$ valeurs possibles, de 0 à $t-2$. L'existence et le nombre de solutions en x dans CG(p) à l'équation (3.a) dépend des valeurs de k, t et u. Lorsque u est positif et k est supérieur à $t-u$, l'équation (3.a) n'a pas de solution en x dans CG(p). Lorsque u est nul et k supérieur à t, l'équation (3.a) a 2^t solutions en x dans CG(p). Lorsque k inférieur ou égal à $t-u$, l'équation (3.a) a 2^k solutions en x dans CG(p).

Applicabilité des principes GQ2 dans les anneaux d'entiers modulo

Pour que l'équation (1), respectivement (2), n'ait pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n, il faut et il suffit que, pour au moins un des facteurs premiers p, de p_1 à p_f, l'équation (1.a), respectivement (2.a), n'ait pas de solution en x dans CG(p).

Pour que l'équation (3) ait des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo n, il faut et il suffit que, pour chacun des facteurs premiers p, de p_1 à p_f, l'équation (3.a) ait des solutions en x dans CG(p).

L'équation (3) interdit tout facteur premier p congru à 1 (mod 4) dès que pour l'un des nombres de base g, de g_1 à g_m : ou bien, le symbole de Legendre de g par rapport à p est égal à -1 ; ou bien, le symbole de Legendre de g par rapport à p est égal à +1 avec la condition : u positif et supérieur à $t-k$. Pour qu'un facteur premier p congru à 1 (mod 4) soit possible, il doit remplir l'une des deux conditions suivantes pour chacun des nombres de base g, de g_1 à g_m, selon les deux nombres entiers t et u définis ci-dessus. Ou bien, le rang de $G = g^2$ est impair dans CG(p), c'est-à-dire, $u = 0$, quelle que soit la valeur de k. Ou bien, le rang de $G = g^2$ est pair dans CG(p), c'est-à-dire, $u > 0$, et il satisfait la condition : $u + k \leq t$.

Un produit de facteurs premiers congrus à 1 (mod 4) ne peut assurer l'ensemble des principes de la technologie GQ2. Chaque module GQ2 doit avoir au moins deux facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) tels que, pour chaque nombre de base g, le symbole de Legendre de g par rapport à l'un diffère du symbole de Legendre de g par rapport à l'autre. Lorsque tous les facteurs premiers sont congrus à 3 (mod 4), on dira que le **module GQ2** est **basique**. Lorsqu'en plus d'au moins deux facteurs premiers congrus à 3 (mod 4), le module inclut un ou plusieurs facteurs premiers congrus à 1 (mod 4), on dira que le **module GQ2** est **mixte**.

Construction systématique de modules GQ2

Au départ, il faut fixer les contraintes globales à imposer au module n : une taille en bits (par exemple, 512 ou 1024 bits) ainsi qu'un nombre de bits successifs à 1 en poids forts (au moins un bien sûr, typiquement 16 ou 32 bits), un nombre f de facteurs premiers et un nombre e (pouvant être nul) de facteurs premiers devant être congrus à 1 (mod 4) ; les autres facteurs premiers, soit $f-e$ facteurs, au moins deux, doivent être congrus à 3 (mod 4). Le module n sera le produit de f facteurs premiers de tailles voisines.

Lorsque $e=0$, on obtient un module GQ2 basique ; lorsque $e>0$, on obtient un module GQ2 mixte. Un module basique est le produit de facteurs premiers tous congrus à 3 (mod 4). Un module GQ2 mixte apparaît donc comme le produit d'un module GQ2 basique par un ou plusieurs autres facteurs premiers congrus à 1 (mod 4). On produit d'abord des facteurs premiers congrus à 3 (mod 4). Ensuite, si $e > 0$, on produit des facteurs premiers congrus à 1 (mod 4).

Pour l'efficacité de la construction de modules GQ2, il vaut bien mieux sélectionner chaque candidat avant de chercher à savoir s'il est premier.

Notés par $g_1\ g_2\ \ldots$, les nombres de base figurent typiquement parmi les premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, ... Faute d'indication contraire, les m nombres de base sont les m premiers nombres premiers : $g_1 = 2$, $g_2 = 3$, $g_3 = 5, g_4 = 7, \ldots$ Toutefois, notons les remarques suivantes : il faut éviter 2 si l'on escompte un facteur congru à 5 (mod 8) ; il faut éviter 3 si l'on doit utiliser la clé publique $\langle 3, n\rangle$ comme clé publique de vérification RSA.

Choix de *f–e* facteurs premiers congrus à 3 (mod 4)

A partir du deuxième facteur, le programme demande et utilise un nombre de base par facteur. Pour le choix du dernier facteur congru à 3 (mod 4), le programme demande s'il y a d'autres nombres de base, c'est-à-dire, si m est égal ou supérieur à $f–e$, puis, si tel est le cas, demande et prend en compte les derniers nombres de base, de g_{f-e} à g_m. Pour formaliser le choix des facteurs premiers congrus à 3 (mod 4), nous avons introduit une notion de **profil** ; le profil caractérise un nombre entier g par rapport à un ensemble de facteurs premiers plus grands que g et congrus à 3 (mod 4).

- Lorsqu'un nombre entier g a le même symbole de Legendre par rapport à deux facteurs premiers, on dit que les facteurs premiers sont **équivalents** par rapport à g. Sinon, ils sont **complémentaires** par rapport à g.
- Noté par $\text{Profil}_f(g)$, le **profil** d'un nombre entier g par rapport à f facteurs premiers $p_1\ p_2\ \ldots\ p_f$ est une séquence de f bits, un bit par facteur premier.

Le premier bit vaut 1 ; chaque bit suivant vaut 1 ou 0 selon que le facteur suivant est équivalent ou complémentaire de p_1 par rapport à g.

- Lorsque tous les bits d'un profil sont égaux à 1, on dit que le profil est **plat**. Dans un tel cas, tous les symboles de Legendre de g sont égaux à +1, ou bien, à –1. Lorsque le profil de g est non plat, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n.
- Par définition, le profil de g par rapport à un seul nombre premier congru à 3 (mod 4) est toujours plat. Cette extension permet de généraliser l'algorithme de choix des facteurs premiers congrus à 3 (mod 4).

Lorsque les profils de deux nombres de base g_1 et g_2 sont différents, ce qui implique au moins trois facteurs premiers congrus à 3 (mod 4), la connaissance des deux valeurs privées Q_1 et Q_2 induit la connaissance de deux décompositions différentes du module n. Lorsque les nombres de base sont des petits nombres premiers, le programme assure que les profils des $2^{f-e-1}-1$ combinaisons multiplicatives des $f-e-1$ premiers nombres de base sont tous différents : ils prennent toutes les valeurs possibles. La notion de profil ne s'étend pas aux facteurs premiers congrus à 1 (mod 4).

Premier facteur premier p_1 congru à 3 (mod 4) : Chaque candidat doit être congru à 3 (mod 4), sans autre contrainte particulière.

Deuxième facteur premier p_2 congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du premier nombre de base g_1 : Chaque candidat doit être complémentaire de p_1 par rapport à g_1.

Troisième facteur premier p_3 congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du deuxième nombre de base g_2 : Selon le profil de g_2 par rapport aux deux premiers facteurs premiers p_1 et p_2, deux cas se présentent. Lorsque $\text{Profil}_2(g_2)$ est plat, chaque candidat doit être complémentaire de p_1 par rapport à g_2. Sinon, on a $\text{Profil}_2(g_1) = \text{Profil}_2(g_2)$; chaque candidat doit alors assurer que $\text{Profil}_3(g_1) \neq \text{Profil}_3(g_2)$.

Choix du i ième facteur premier p_{i+1} congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du nombre de base g_i : Selon le profil de g_i par rapport aux i

premiers facteurs premiers p_1, p_2, ... p_i, deux cas se présentent. Lorsque Profil$_i(g_i)$ est plat, chaque candidat doit être complémentaire de p_1 par rapport à g_i. Sinon, parmi les i–1 nombres de base g_1, g_2, ... g_{i-1} et toutes leurs combinaisons multiplicatives, $g_1.g_2$, ... , $g_1.g_2$. ... g_{i-1}, soit en tout 2^{i-1}–1 nombres entiers, il existe un nombre entier g et un seul tel que Profil$_i(g_i)$ = Profil$_i(g)$; chaque candidat doit alors assurer que Profil$_{i+1}(g_i) \neq$ Profil$_{i+1}(g)$.

Dernier facteur premier p_{f-e} congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du nombre de base g_{f-e-1} et des autres nombres de base de g_{f-e} à g_m: On prend en compte les contraintes dues au nombre de base g_{f-e-1}, tout comme ci-dessus. En outre, lorsque m est égal ou supérieur à f–e, chaque candidat doit assurer un profil non plat aux derniers nombres de base, de g_{f-e} à g_m, par rapport aux f–e facteurs premiers. Chaque candidat doit être complémentaire de p_1 par rapport à tous les g_i pour lesquels Profil$_{f-e-1}(g_i)$ est plat.

En résumé, les facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) sont choisis les uns en fonction des autres.

Pour i allant de 0 à f–e–1, pour choisir le i+1 ième facteur premier congru à 3 (mod 4), le candidat p_{i+1} doit passer avec succès l'examen suivant :

- ✓ Si $i > m$ ou si $i = 0$, alors le candidat p_{i+1} n'a pas d'autre contrainte ; il est donc accepté.
- ✓ Si $0 < i \leq m$, alors le candidat p_{i+1} doit prendre en compte le i ième nombre de base g_i. On calcule le profil Profil$_i(g_i)$ du nombre de base g_i par rapport aux i premiers facteurs premiers, de p_1 à p_i. Selon le résultat, un et un seul des deux cas suivants se présente :
  - Si le profil est plat, alors le candidat p_{i+1} doit être complémentaire de p_1 par rapport à g_i ; sinon, il faut le rejeter.
  - Sinon, parmi les i–1 nombres de base et toutes leurs combinaisons multiplicatives, il y a un et un seul nombre que nous nommons g tel que Profil$_i(g)$ = Profil$_i(g_i)$; alors le candidat p_{i+1} doit être tel que Profil$_{i+1}(g) \neq$ Profil$_{i+1}(g_i)$; sinon, il faut le rejeter.

✓ Si $i+1 = f-e$ et $i < m$, c'est-à-dire, pour choisir le dernier facteur premier congru à 3 (mod 4) lorsqu'il reste des nombres de base, de g_{f-e} à g_m, qui n'ont pas encore été pris en compte, le candidat p_{f-e} doit les prendre en compte : parmi ces derniers nombres de base, on sélectionne ceux dont le profil $\text{Profil}_{f-e-1}(g_i)$ est plat ; le candidat p_{f-e} doit être complémentaire de p_1 par rapport à chacun des nombres de base ainsi sélectionnés ; sinon, il faut le rejeter.

Le candidat est accepté lorsqu'il a passé avec succès les tests appropriés.

Choix de *e* facteurs premiers congrus à 1 (mod 4)

Pour être acceptable, chaque candidat p congru à 1 (mod 4) doit remplir les conditions suivantes par rapport à chaque nombre de base de g_1 à g_m.

- Evaluons le symbole de Legendre de chaque nombre de base g_i par rapport à p. Si le symbole vaut –1, rejetons le candidat p pour passer à un autre candidat. Si le symbole vaut +1, poursuivons l'évaluation du candidat. Notons que si le nombre entier 2 est utilisé comme nombre de base, alors tous les candidats congrus à 5 (mod 8) doivent être écartés : le nombre de base 2 est incompatible avec un facteur congru à 5 (mod 8).
- Calculons un nombre entier $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$ pour établir une clé $\langle s, p \rangle$. Appliquons la clé $\langle s, p \rangle$ à chaque valeur publique G_i pour obtenir un résultat r. Deux cas se présentent.
  - Si r vaut g_i ou $-g_i$, alors $u = 0$. Dans ce cas et dans ce cas seulement, G_i est sur un cycle. Remarquons un cas trivial : G_i est sur un cycle dès lors que p est congru à 5 (mod 8) et que le symbole de Legendre de g_i par rapport à p vaut +1. Rappelons que $G_i = 4$ est impossible dans ce cas.
  - Si r ne vaut ni g_i ni $-g_i$, alors $u > 0$; notons que la clé $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$ transforme tout résidu non quadratique y en un élément b qui est une racine 2^t ième primitive de l'unité. L'algorithme suivant calcule u à partir de r et b en utilisant deux variables entières : w initialisée

par r et jj prenant des valeurs de 2 à 2^{t-2}.

Pour i allant de 1 à $t-2$, répéter la séquence suivante :

- Calculer $w^2/G_i \pmod{p_j}$, puis, élever le résultat à la puissance 2^{t-i-1} $\pmod{p_j}$: on doit obtenir +1 ou –1. Lorsque l'on obtient –1, calculer $jj = 2^i$, puis, remplacer w par $w.b^{jj} \pmod{p_j}$. Lorsque l'on obtient +1, ne rien faire.

A l'issue du calcul, la variable w a pour valeur g_i ou $-g_i$. De plus, nous savons que le rang de G_i dans $CG(p_j)$ est divisible par $2^t/jj$ mais pas par $2^{t+1}/jj$, c'est-à-dire que jj détermine la valeur de u par $jj = 2^{t-u}$. Lorsque v est plus grand que jj, c'est-à-dire, $k > t-u$, rejeter le candidat pour passer à un autre. Lorsque v est plus petit ou égal à jj, c'est-à-dire, $k \leq t-u$, poursuivre l'évaluation du candidat.

Lorsque les f facteurs premiers ont été produits, le module public n est le produit des f facteurs premiers $p_1, p_2, \ldots p_f$. L'entier non signé n peut se représenter par une séquence binaire ; cette séquence respecte les contraintes imposées au début du programme pour la taille en bits et pour le nombre de bits successifs à 1 en poids forts. Le choix des facteurs premiers assure les propriétés suivantes du module n par rapport à chacun des m nombres de base $g_1, g_2, \ldots g_m$. D'une part, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en x dans l'anneau des entiers modulo n. D'autre part, l'équation (3) a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo n.

En résumé, les facteurs premiers congrus à 1 (mod 4) sont choisis indépendamment les uns des autres. Alors que les facteurs congrus à 3 (mod 4) prennent en compte progressivement les nombres de base, chaque facteur premier congru à 1 (mod 4) doit prendre en compte l'ensemble des contraintes imposées par chacun des nombres de base. Chaque facteur premier congru à 1 (mod 4), soit p, de p_{f-e} à p_f, doit avoir passé avec succès l'examen suivant en deux étapes.

1) **L'étape (1) s'exécute successivement pour chacun des m nombres de base de g_1 à g_m.**

On calcule le symbole de Legendre du nombre de base courant g par rapport au candidat p. Un et un seul des deux cas suivants se présente : Si le symbole vaut –1, on rejette le candidat. Sinon (le symbole vaut +1), on poursuit l'examen en passant au nombre de base g suivant à l'étape (1).

Lorsque le candidat est acceptable pour l'ensemble des m nombres de base, on passe à l'étape (2).

2) L'étape (2) s'exécute successivement pour chacune des m valeurs publiques de G_1 à G_m.

On calcule un entier t tel que $p-1$ est divisible par 2^t mais pas par 2^{t+1}, puis, un entier $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$, de façon à établir une clé $\langle s, p \rangle$. On applique la clé $\langle s, p \rangle$ à la valeur publique courante $G = g^2$ pour obtenir un résultat r, soit : $r \equiv G^s \pmod{p}$. Selon le résultat, un et un seul des deux cas suivants se présente :

a) Si r est égal à g ou à $-g$, alors $u = 0$; on poursuit l'examen du candidat en passant à la valeur publique G suivante à l'étape (2).

b) Sinon, on calcule un nombre u positif, prenant une des valeurs de 1 à $t-2$, en appliquant l'algorithme suivant qui met en œuvre deux variables : jj prenant des valeurs allant de 2 à 2^{t-2} et w initialisée par r, ainsi qu'un nombre entier b obtenu en appliquant une clé $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$ à un résidu non quadratique de CG(p).

Pour un indice ii allant de 1 à $t-2$, on répète l'opération suivante :

On calcule $w^2/G \pmod{p}$, puis, on applique une clé $\langle 2^{t-ii-1}, p \rangle$ au résultat pour obtenir +1 ou –1 (sinon, on a une preuve que le candidat n'est pas premier). Si l'on obtient –1, alors on calcule $jj = 2^{ii}$, puis, $c \equiv b^{jj} \pmod{p}$, puis, on remplace w par $w.c \pmod{p}$, puis, on passe à l'indice ii suivant. Si l'on obtient +1, on passe à l'indice ii suivant.

A l'issue de l'algorithme, la valeur figurant dans la variable jj définit u par la relation $jj = 2^{t-u}$; la valeur figurant dans la variable w est une racine carrée de G, c'est-à-dire, g ou $-g$ (sinon, on a une preuve que le

candidat n'est pas premier). Deux cas se présentent :

- Si $t–u < k$, alors on rejette le candidat p parce que la branche où figure G n'est pas assez longue.
- Sinon ($t–u \geq k$), on poursuit l'évaluation du candidat en passant à la valeur publique G suivante à l'étape (2).

Lorsque le candidat est acceptable pour l'ensemble des m valeurs publiques, il est accepté comme facteur premier congru à 1 (mod 4).

Calcul des valeurs associées

Pour obtenir les composantes privées, calculons toutes les solutions à l'équation (3.a) dans les deux cas les plus simples et les plus courants avant d'aborder le cas général.

Pour chaque facteur premier p_j congru à 3 (mod 4), la clé $\langle (p_j+1)/4, p_j \rangle$ donne la racine carrée quadratique de n'importe quel résidu quadratique. On en déduit une manière de calculer une solution à l'équation (3.a) :

$$s_j \equiv ((p_j+1) / 4)^k \pmod{(p_j–1)/2} ; \quad \text{puis,} \quad Q_{i,j} \equiv G_i^{sj} \pmod{p_j}$$

ou bien plutôt, l'inverse (mod p_j) d'une telle solution.

$$s_j \equiv (p_j–1)/2–((p_j+1) / 4)^k \pmod{(p_j–1)/2} ; \quad \text{puis,} \quad Q_{i,j} \equiv G_i^{sj} \pmod{p_j}$$

Dans CG(p_j), il y a alors deux et seulement deux racines carrées de l'unité : +1 et –1 ; il y a donc deux solutions en x à l'équation (3.a) : les deux nombres $Q_{i,j}$ et $p_j–Q_{i,j}$ ont le même carré G_i (mod p_j).

Pour chaque facteur premier p_j congru à 5 (mod 8), la clé $\langle (p_j+3)/8, p_j \rangle$ donne la racine carrée de rang impair de n'importe quel élément de rang impair. On en déduit une solution à l'équation (3.a) :

$$s_j \equiv ((p_j+3) / 8)^k \pmod{(p_j–1)/4} ; \quad \text{puis,} \quad Q_{i,j} \equiv G_i^{sj} \pmod{p_j}$$

ou bien plutôt, l'inverse (mod p_j) d'une telle solution.

$$s_j \equiv (p_j–1)/4–((p_j+3) / 8)^k \pmod{(p_j–1)/4} ; \quad \text{puis,} \quad Q_{i,j} \equiv G_i^{sj} \pmod{p_j}$$

Dans CG(p_j), il y a alors quatre et seulement quatre racines quatrièmes de l'unité ; il y a donc quatre solutions en x à l'équation (3.a). Remarquons que $2^{(pj–1)/4}$ (mod p_j) est une racine carrée de –1 parce que le symbole de Legendre de 2 par rapport à p congru à 5 (mod 8) vaut –1. Si $Q_{i,j}$ est une

solution, alors $p_j - Q_{i,j}$ est une autre solution, ainsi que le produit (mod p_j) de $Q_{i,j}$ par une racine carrée de -1.

Pour un facteur premier p_j congru à 2^t+1 (mod 2^{t+1}), la clé $\langle (p_j-1+2^t)/2^{t+1}, p_j \rangle$ donne la racine carrée de rang impair de n'importe quel élément de rang impair. On peut donc calculer une solution à l'équation (3.a).

- Calculons d'abord un nombre entier $s_j \equiv ((p_j-1+2^t)/2^{t+1})^k \pmod{(p_j-1)/2^t}$ pour établir une clé $\langle s_j, p_j \rangle$.
- Lorsque la clé $\langle (p_j-1+2^t)/2^{t+1}, p_j \rangle$ transforme G_i en g_i ou en $-g_i$, le rang de G_i est impair dans $CG(p_j)$ ($u = 0$). Alors, la clé $\langle s_j, p_j \rangle$ transforme G_i en un nombre z : c'est la solution de rang impair à l'équation (3.a). Selon les valeurs de t et de k, il y a encore $\min(2^k-1, 2^t-1)$ autres solutions sur une ou plusieurs branches. La branche de z^2 porte une autre solution : c'est $p_j - z$. Lorsque $t \geq 2$, la branche de z^4 porte deux autres solutions : c'est le produit de z par chacune des deux racines carrées de -1, c'est-à-dire, chacune des deux racines quatrièmes primitives de l'unité. Or, si y est un résidu non quadratique de $CG(p_j)$, alors, $y^{(pj-1)/4} \pmod{p_j}$ est une racine carrée de -1. D'une manière générale, pour i prenant chaque valeur de 1 à $\min(k, t)$, la branche de la puissance 2^i ième de z porte 2^{i-1} solutions : ce sont les produits (mod p_j) de z par chacune des 2^{i-1} racines 2^i ièmes primitives de l'unité. Or, si y est un résidu non quadratique de $CG(p_j)$, alors, y à la puissance $(p_j-1)/2^i$ est une racine 2^i ième primitive de l'unité que nous nommons c. Les 2^{i-1} racines 2^i ièmes primitives de l'unité sont les puissances impaires de c : c, $c^3 \pmod{p_j}$, $c^5 \pmod{p_j}$, ... c à la puissance $2^i-1 \pmod{p_j}$.
- Lorsque la clé $\langle (p_j-1+2^t)/2^{t+1}, p_j \rangle$ transforme G_i en un nombre entier r qui n'est ni g_i ni $-g_i$, le rang de G_i est pair dans $CG(p_j)$ ($u > 0$). Alors, à condition que G_i soit convenablement placé sur une branche assez longue, c'est-à-dire, $t \geq k + u$, il y a 2^k solutions sur la branche où figure G_i. Pour calculer une racine 2^k ième, il suffit de réitérer k fois de rang l'algorithme de calcul de racine carrée donné ci-dessus, de façon à

calculer les racines carrées des résultats successifs jusqu'à une solution z. Ce calcul peut bien sûr être optimisé pour approcher directement une racine 2^k ième et ajuster ensuite une seule fois l'approximation d'une racine 2^k ième pour atteindre une solution z. Pour obtenir toutes les autres solutions, remarquons tout d'abord que si y est un résidu non quadratique de CG(p_j), alors, y à la puissance $(p_j-1)/2^k$ est une racine 2^k ième primitive de l'unité que nous nommons d. Les 2^k racines 2^k ièmes de l'unité sont les puissances successives de d : d, d^2 (mod p_j), d^3 (mod p_j), ... d à la puissance 2^k-1 (mod p_j), d à la puissance 2^k (mod p_j) qui vaut 1. Les 2^k solutions sur la branche où figure G_i sont les produits (mod p_j) de z par chacune de ces racines.

En résumé, pour calculer une composante pour le facteur premier p et le nombre de base g, connaissant k, t et u, on procède comme suit :

1) On calcule un nombre entier : $s \equiv ((p-1+2^t)/2^{t+1})^k \pmod{(p-1)/2^t}$ pour établir une clé $\langle s, p\rangle$. Puis, on applique la clé $\langle s, p\rangle$ à G pour obtenir $z \equiv G^s \pmod{p}$. Selon la valeur de u, on passe à l'étape (2) ou (3).

2) Si $u = 0$, z est la solution de rang impair à l'équation (3.a). Il y a encore $\min(2^k-1, 2^t-1)$ autres solutions de rang pair sur une ou plusieurs branches, très exactement sur $\min(k, t)$ autres branches. Pour i allant de 1 à $\min(k, t)$, la branche de la puissance 2^i ième de z porte 2^{i-1} solutions : ce sont les produits (mod p) de z par chacune des 2^{i-1} racines 2^i ièmes primitives de l'unité. La solution générique à l'équation (3.a) est représentée par zz. On passe à l'étape (4).

3) Si $u > 0$, toutes les solutions à l'équation (3.a) sont de rang pair. Il y en a 2^k et elles figurent toutes sur la branche où figure G ; en effet : $t-u \geq k$. Pour calculer une solution, l'algorithme suivant met en œuvre deux variables : jj prenant des valeurs allant de 2 à 2^{t-2} et w initialisée par z, ainsi qu'un nombre entier b obtenu en appliquant une clé $\langle (p-1)/2^t, p\rangle$ à un résidu non quadratique de CG(p).

On répète k fois de rang la séquence suivante :

Pour un indice *ii* allant de 1 à *t*–2, on répète l'opération suivante : On calcule $w^2/G \pmod{p}$, puis, on applique une clé $\langle 2^{t-ii-1}, p\rangle$ au résultat pour obtenir +1 ou –1 (sinon, on a une preuve que *p* n'est pas premier). Si l'on obtient –1, alors on calcule $jj = 2^{ii}$, puis, $c \equiv b^{jj} \pmod{p}$, puis, on remplace *w* par $w.c \pmod{p}$, puis, on passe à l'indice *ii* suivant. Si l'on obtient +1, on passe à l'indice *ii* suivant.

A l'issue de l'algorithme, la variable *w* a pour valeur *za*. Les 2^k solutions sur la branche où figure *G* sont les produits (mod *p*) de *za* par chacune des 2^k racines 2^k ièmes de l'unité. La solution générique à l'équation (3.a) est représentée par *zz*. On passe à l'étape (4).

4) Connaissant *zz*, on en déduit une valeur de composante : c'est l'inverse de *zz* modulo *p* lorsque l'équation $G.Q^v \equiv 1 \pmod{n}$ est utilisée et *zz* lorsque l'équation $G \equiv Q^v \pmod{n}$ est utilisée.

Remarque. Il y a diverses méthodes pour obtenir les composantes privées et les valeurs privées. Connaissant une collection de *f* composantes, c'est-à-dire, les *f* composante pour un nombre de base donné, la technique des restes chinois permet de calculer la valeur privée correspondante. On voit ainsi que, pour une valeur publique *G* et un module *n* donnés, il peut y avoir plusieurs valeurs privées *Q* possibles. Il y en a quatre lorsque *n* est le produit de deux facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) ; il y en a huit avec trois facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) ; il y en a seize avec deux facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) et un congru à 5 (mod 8). Un usage judicieux de ces multiples valeurs peut compliquer les attaques par analyse de la consommation électrique d'une carte à puce utilisant GQ2.

Ainsi, au fur et à mesure que *t* augmente, le programme se complique pour des cas de plus en plus rares. En effet, les nombres premiers se répartissent en moyenne comme suit : $t = 1$ pour un sur deux, $t = 2$ pour un sur quatre, $t = 3$ pour un sur huit, et ainsi de suite. De plus, les contraintes dues aux *m* nombres de base rendent les candidatures de moins en moins acceptables. Quoi qu'il en soit, les modules mixtes font définitivement partie de la

technologie GQ2 ; le type du module GQ2 n'affecte en rien les protocoles d'authentification dynamique et de signature numérique.

La figure 3 illustre $G_i = g_i^2$ sur un cycle avec un facteur premier p congru à 9 (mod 16), c'est-à-dire, $t = 3$, $u = 0$, ainsi que $k \geq 3$. On peut noter que :

$$b \equiv y^{\frac{p-1}{8}} \pmod{p}$$

$$b^8 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$b^4 \equiv -1 \pmod{p}$$

La figure 4 illustre $G_i = g_i^2$ sur une branche avec un facteur premier p congru à 65 (mod 128), c'est-à-dire, $t = 6$, ainsi que $k = 4$ et $u = 2$.

Voici un premier jeu de clés GQ2 avec $\boldsymbol{k = 6}$, soit $v = 64$, $\boldsymbol{m = 3}$, soit trois nombres de base : $g_1 = 3$, $g_2 = 5$ et $g_3 = 7$, et $\boldsymbol{f = 3}$, soit un module à trois facteurs premiers : deux congrus à 3 (mod 4) et un à 5 (mod 8). Notons que $g = 2$ est incompatible avec un facteur premier congru à 5 (mod 8).

p_1 = 03CD2F4F21E0EAD60266D5CFCEBB6954683493E2E833

$(2 \mid p_1) = -1$; $(3 \mid p_1) = +1$; $(5 \mid p_1) = -1$; $(7 \mid p_1) = +1$

p_2 = 0583B097E8D8D777BAB3874F2E76659BB614F985EC1B

$(2 \mid p_1) = -1$; $(3 \mid p_1) = -1$; $(5 \mid p_1) = +1$; $(7 \mid p_1) = -1$

p_3 = 0C363CD93D6B3FEC78EE13D7BE9D84354B8FDD6DA1FD

$(2 \mid p_1) = -1$; $(3 \mid p_1) = +1$; $(5 \mid p_1) = +1$; $(7 \mid p_1) = +1$

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ = FFFF81CEA149DCF2F72EB449C5724742FE2A3630D9 02CC00EAFEE1B957F3BDC49BE9CBD4D94467B72AF28CFBB26144 CDF4BBDBA3C97578E29CC9BBEE8FB6DDDD

$Q_{1,1}$ = 0279C60D216696CD6F7526E23512DAE090CFF879FDDE

$Q_{2,1}$ = 7C977FC38F8413A284E9CE4EDEF4AEF35BF7793B89

$Q_{3,1}$ = 6FB3B9C05A03D7CADA9A3425571EF5ECC54D7A7B6F

$Q_{1,2}$ = 0388EC6AA1E87613D832E2B80E5AE8C1DF2E74BFF502

$Q_{2,2}$ = 04792CE70284D16E9A158C688A7B3FEAF9C40056469E

$Q_{3,2}$ = FDC4A8E53E185A4BA793E93BEE5C636DA731BDCA4E

$Q_{1,3}$ = 07BC1AB048A2EAFDAB59BD40CCF2F657AD8A6B573BDE

$Q_{2,3}$ = 0AE8551E116A3AC089566DFDB3AE003CF174FC4E4877

$Q_{3,3}$ = 01682D490041913A4EA5B80D16B685E4A6DD88070501

Q_1 = D7E1CAF28192CED6549FF457708D50A7481572DD5F2C335D8

C69E22521B510B64454FB7A19AEC8D06985558E764C6991B05FC2A

C74D9743435AB4D7CF0FF6557

Q_2 = CB1ED6B1DD649B89B9638DC33876C98AC7AF689E9D1359E4

DB17563B9B3DC582D5271949F3DBA5A70C108F561A274405A5CB8

82288273ADE67353A5BC316C093

Q_3 = 09AA6F4930E51A70CCDFA77442B10770DD1CD77490E3398A

AD9DC50249C34312915E55917A1ED4D83AA3D607E3EB5C8B197

697238537FE7A0195C5E8373EB74D

Voici d'autres valeurs possibles pour les composantes liées au facteur p_3 lequel est congru à 5 (mod 8).

Voici une racine carrée de –1 dans CG(p_3) : $c = 2^{(p3-1)/4} \pmod{p_3}$ =

0C3000933A854E4CB309213F12CAD59FA7AD775AAC37

$Q'_{1,3} = c \,.\, Q_{1,3} \pmod{p_3}$ =

050616671372B87DEC9AEEAC68A3948E9562F714D76C

$Q'_{2,3} = c \,.\, Q_{2,3} \pmod{p_3}$ =

06F308B529C9CE88D037D01002E7C838439DACC9F8AA

$Q'_{3,3} = c \,.\, Q_{3,3} \pmod{p_3}$ =

015BE9F4B92F1950A69766069F788E45439497463D58

Ce qui donne :

Q'_1 = 676DF1BA369FF306F4A1001602BCE5A008DB82882E87C148D0

D820A711121961C9376CB45C355945C5F2A9E5AFAAD7861886284A

9B319F9E4665211252D74580

Q'_2 = CAEC4F41752A228CF9B23B16B3921E47C059B9E0C68634C2C

64D6003156F30EF1BC02ADA25581C8FDE76AA14AB5CC60A2DE1C

565560B27E8AA0E6F4BCA7FE966

Q'_3 = 2ACDF5161FE53B68CC7C18B6AFE495815B46599F44C51A6A1

A4E858B470E8E5C7D2200EF135239AF0B7230388A6A5BDD8EE15B

0D094FC2BFA890BFDA669D9735

Voici un second jeu de clés GQ2, avec $\boldsymbol{k = 9}$, soit $v = 512$, $\boldsymbol{m = 2}$, soit deux nombres de base : $g_1 = 2$ et $g_2 = 3$, et $\boldsymbol{f = 3}$, soit un module à trois facteurs premiers congrus à 3 (mod 4).

$p_1 = 03852103E40CD4F06FA7BAA9CC8D5BCE96E3984570CB$

$(2 \mid p_1) = -1$; $(3 \mid p_1) = -1$; et on trouve bien, $(6 \mid p_1) = +1$.

$p_2 = 062AC9EC42AA3E688DC2BC871C8315CB939089B61DD7$

$(2 \mid p_2) = +1$; $(3 \mid p_2) = -1$; et on trouve bien, $(6 \mid p_2) = -1$.

$p_3 = 0BCADEC219F1DFBB8AB5FE808A0FFCB53458284ED8E3$

$(2 \mid p_3) = -1$; $(3 \mid p_3) = +1$; et on trouve bien, $(6 \mid p_3) = -1$.

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$ FFFF5401ECD9E537F167A80C0A9111986F7A8EBA4D
6698AD68FF670DE5D9D77DFF00716DC7539F7CBBCF969E73A0C49
761B276A8E6B6977A21D51669D039F1D7

$Q_{1,1} = 0260BC7243C22450D566B5C6EF74AA29F2B927AF68E1$

$Q_{2,1} = 0326C12FC7991ECDC9BB8D7C1C4501BE1BAE9485300E$

$Q_{1,2} = 02D0B4CC95A2DD435D0E22BFBB29C59418306F6CD00A$

$Q_{2,2} = 045ECB881387582E7C556887784D2671CA118E22FCF2$

$Q_{1,3} = B0C2B1F808D24F6376E3A534EB555EF54E6AEF5982$

$Q_{2,3} =$ 0AB9F81DF462F58A52D937E6D81F48FFA4A87A9935AB

$Q_1 =$ 27F7B9FC82C19ACAE47F3FE9560C3536A7E90F8C3C51E13C
35F32FD8C6823DF753685DD63555D2146FCDB9B28DA367327DD6
EDDA092D0CF108D0AB708405DA46

$Q_2 =$ 230D0B9595E5AD388F1F447A69918905EBFB05910582E5BA64
9C94B0B2661E49DF3C9B42FEF1F37A7909B1C2DD54113ACF87C6
F11F19874DE7DC5D1DF2A9252D

Dans la présente demande, on a décrit un procédé pour produire des jeux de clés GQ2, à savoir, des modules n et des couples de valeurs publique G et privée Q dans le cas où l'exposant v est égal à 2^k. Ces jeux de clés sont utilisés pour mettre en œuvre un procédé destiné à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message ainsi que

cela a été décrit.

Dans les demandes pendantes déposées le même jour que la présente demande par France Télécom, TDF et la Société Math RiZK et ayant pour inventeurs Louis Guillou et Jean-Jacques Quisquater, les traits caractéristiques des procédés, systèmes et dispositifs destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message ont été revendiqués.

Revendications

1. Procédé permettant de produire les **f** facteurs premiers p_1, p_2, ... p_f d'un protocole destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou
- l'intégrité d'un message **M** associé à cette entité,

au moyen d'un module public **n** constitué par le produit desdits **f** facteurs premiers p_1, p_2, ... p_f , **f** étant supérieur ou égal à 2, ou au moyen des **f** facteurs premiers ;

ledit procédé comprenant l'étape de produire lesdits **f** facteurs premiers p_1, p_2, ... p_f , en respectant les conditions suivantes :

- aucune des deux équations (1) et (2) :

$$x^2 \equiv g_i \bmod n \quad \text{et} \quad x^2 \equiv -g_i \bmod n$$

n'a de solution en x dans l'anneau des entiers modulo **n**,

- l'équation (3):

$$x^v \equiv g_i^2 \bmod n$$

a des solutions en x dans l'anneau des entiers modulo **n** ;

g_1, g_2, ... g_m désignant **m** nombres de base entiers, distincts, **m** étant supérieur ou égal à 1 ;

v désignant un exposant public de la forme :

$$v = 2^k$$

où **k** est un paramètre de sécurité plus grand que 1 ;

ledit procédé comprenant l'étape de choisir en premier :

- le paramètre de sécurité **k**
- les **m** nombres de base g_1, g_2, ... g_m,
- la taille du module **n**,
- la taille des **f** facteurs premiers p_1, p_2, ... p_f.

2. Procédé selon la revendication 1 tel que les **m** nombres de base g_1, g_2, ... g_m, sont choisis au moins en partie parmi les premiers nombres

entiers.

3. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 ou 2, tel que le paramètre de sécurité **k** est un petit nombre entier, notamment inférieur à 100.

4. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 3, tel que la taille du module **n** est supérieure à plusieurs centaines de bits.

5. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 4, tel que les **f** facteurs premiers p_1, p_2, ... p_f ont une taille voisine de la taille du module **n** divisé par le nombre **f** de facteurs.

6. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 5, tel que parmi les f facteurs premiers p_1, p_2, ... p_f

- on choisit un nombre **e** de facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, **e** pouvant être nul (dans le cas où **e** est nul le module **n** sera ci-après qualifié de module basique, dans le cas où **e > 0** le module **n** sera ci-après qualifié de module mixte),

- les **f-e** autres facteurs premiers sont choisis congrus à 3 modulo 4, **f-e** étant au moins égal à 2.

7. Procédé selon la revendication 6 tel que pour produire les **f-e** facteurs premiers p_1, p_2, ... p_{f-e} congrus à 3 modulo 4,
on met en oeuvre les étapes suivantes :

- on choisit le premier facteur premier p_1 congru à 3 modulo 4,

- on choisit le deuxième facteur premier p_2 tel que p_2 soit complémentaire de p_1 par rapport au nombre de base g_1,

- on choisit le facteur p_{i+1} en procédant comme suit en distinguant deux cas :

(1) Cas où $i > m$

• on choisit le facteur p_{i+1} congru à 3 modulo 4,

(2) Cas où $i \leq m$

• on calcule le profil ($Profil_i(g_i)$) de g_i par rapport aux i

premiers facteurs premiers p_i,

• si le $Profil_i(g_i)$ est plat, on choisit le facteur p_{i+1} tel que p_{i+1} soit complémentaire de p_1 par rapport à g_i,

• sinon, on choisit parmi les **i-1** nombres de bases g_1, g_2, ... g_{i-1} et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé g, tel que $Profil_i(g) = Profil_i(g_i)$, on choisit ensuite p_{i+1} tel que $Profil_{i+1}(g_i) \neq Profil_{i+1}(g)$,

(les expressions "complémentaire", "profil", "profil plat" ayant le sens défini dans la description).

8. Procédé selon la revendication 7 tel que pour choisir le dernier facteur premier p_{f-e} on procède comme suit, en distinguant trois cas :

(1) Cas où f-e-1 > m

• on choisit p_{f-e} congru à 3 modulo 4,

(2) Cas où f-e-1 = m

• on calcule $Profil_{f-e-1}(g_m)$ par rapport aux f-e-1 premiers facteurs premiers, de p_1 à p_{f-e-1},

• • si $Profil_{f-e-1}(g_m)$ est plat, on choisit p_{f-e-1} tel qu'il soit complémentaire de p_1 par rapport à g_m ,

• • sinon,

• • • on choisit parmi les **m-1** nombres de bases de g_1 à g_{m-1} et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé g, tel que $Profil_i(g) = Profil_i(g_i)$, puis

• • • on choisit ensuite p_{f-e} tel que $Profil_{f-e}(g) \neq Profil_{f-e}(g_m)$,

(3) Cas où f-e-1 < m

• on choisit p_{f-e} tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(3.1) Première condition,

• on calcule $Profil_{f-e-1}(g_{f-e-1})$ par rapport aux f-e-1 premiers

facteurs premiers, de p_1 à p_{f-e-1},

• • si $\mathbf{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$ est plat, on choisit p_{f-e} tel qu'il satisfasse à la première condition d'être complémentaire de p_1 par rapport à g_{f-e-1},

• • sinon,

• • • on choisit parmi les f-e-1 nombres de bases de g_1 à g_{m-1} et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé g, tel que $\mathbf{Profil}_1(g) = \mathbf{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$, puis

• • • on choisit ensuite p_{f-e} tel qu'il satisfasse à la première condition d'être tel que $\mathbf{Profil}_{f-e}(g) \neq \mathbf{Profil}_{f-e}(g_m)$,

(3.2) Deuxième condition,

• on sélectionne parmi l'ensemble des derniers nombres de bases de g_{f-e} à g_m ceux dont le profil $\mathbf{Profil}_{f-e-1}(g_i)$ est plat, puis

• on choisit p_{f-e} tel qu'il satisfasse à la deuxième condition d'être complémentaire de p_1 par rapport à chacun des nombres de bases ainsi sélectionnés.

9 Procédé selon les revendications 7 ou 8 tel que pour produire les e facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, on évalue chaque candidat facteur premier p , de p_{f-e} à p_f , en lui faisant subir les deux tests successifs suivants :

(1) Premier test

- on calcule le symbole de Legendre de chaque nombre de base g_i , de g_1 à g_m , par rapport au facteur premier p candidat,

• si le symbole de Legendre est égal à -1, on rejette le candidat p,

• si le symbole de Legendre est égal à +1, on poursuit l'évaluation du candidat p en passant au nombre de base suivant, puis lorsque le dernier nombre de base a été pris en compte on passe au deuxième test,

(2) Deuxième test,

- on calcule un nombre entier **t** tel que p-1 est divisible par 2^t mais pas par 2^{t+1} , puis

- on calcule un entier **s** tel que $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$,

- on applique la clé $\langle s, p \rangle$ à chaque valeur publique G_i pour obtenir un résultat **r**

$$r \equiv G_i^{\,s} \bmod p$$

• si **r** est égal à g_i ou $-g_i$, on poursuit le deuxième test en passant à la valeur publique G_{i+1} suivante,

• si **r** est différent de g_i ou $-g_i$, on calcule un facteur **u** en appliquant l'algorithme suivant :

• • l'algorithme consiste à répéter la séquence suivante pour un indice **ii** allant de 1 à t-2 :

• • l'algorithme met en oeuvre deux variables : **w** initialisée par **r** et $jj = 2^{ii}$ prenant des valeurs allant de 2 à 2^{t-2} , ainsi qu'un nombre **b** obtenu par l'application de la clé $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$ à un résidu non quadratique de CG(p), puis, on itère les étapes 1 et 2 suivantes,

• • • étape 1 : on calcule $w^2/G_i \pmod p$,

• • • étape 2 : on élève le résultat à la puissance 2^{t-ii-1}

• • • • si on obtient +1 , on poursuit le deuxième test en passant à la valeur publique G_{i+1} suivante,

• • • • si on obtient -1, on calcule $jj = 2^{ii}$, puis on remplace w par $w.b^{jj} \pmod p$, puis on poursuit l'algorithme pour la valeur suivante de l'indice ii,

• • à l'issue de l'algorithme, la valeur figurant dans la variable jj permet de calculer un nombre entier u par la relation $jj = 2^{t-u}$, puis on calcule l'expression t-u, deux cas se présentent :

• • • si $t-u < k$, on rejette le candidat **p**

• • • si $t-u \geq k$, on continue l'évaluation du candidat **p** en poursuivant le deuxième test en passant à la valeur publique G_{i+1} suivante,

le candidat **p** est accepté comme facteur premier congru à 1 modulo 4 si à l'issue du deuxième test, pour toutes les **m** valeurs publiques G_i , il n'a pas été rejeté.

10. Protocole faisant application du procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 9 ; ledit protocole étant destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou
- l'intégrité d'un message **M** associé à cette entité,

au moyen de **m** couples de valeurs privées $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ et publiques $G_1, G_2, \ldots G_m$, ou des paramètres dérivés de ceux-ci ;

ledit module et lesdites valeurs étant liés par des relations du type :

$$G_i \cdot Q_i^v \equiv 1 \cdot \mathbf{mod}\ n \text{ ou } G_i \equiv Q_i^{-v} \mathbf{mod}\ n ;$$

ladite valeur publique G_i étant le carré g_i^2 du nombre de base g_i inférieur aux **f** facteurs premiers $p_1, p_2, \ldots p_f$;

ledit protocole mettant en œuvre selon les étapes suivantes une entité appelée témoin disposant des **f** facteurs premiers p_i et/ou des paramètres des restes chinois des facteurs premiers et/ou du module public **n** et/ou des **m** valeurs privées Q_i et/ou des **f.m** composantes $Q_{i,j}$ ($Q_{i,j} \equiv Q_i \mathbf{mod}\ p_j$) des valeurs privées Q_i et de l'exposant public **v** ;

- le témoin calcule des engagements **R** dans l'anneau des entiers modulo **n** ; chaque engagement étant calculé :
  - soit en effectuant des opérations du type

$$R \equiv r^v \mathbf{mod}\ n$$

où **r** est un aléa tel que $0 < r < n$,

  - soit
    - en effectuant des opérations du type

$$R_i \equiv r_i^v \mathbf{mod}\ p_i$$

où r_i est un aléa associé au nombre premier p_i tel que $0 < r_i < p_i$, chaque r_i appartenant à une collection d'aléas $\{r_1 , r_2 , \ldots r_f\}$,

•• puis en appliquant la méthode des restes chinois ;

- le témoin reçoit un ou plusieurs défis **d** ; chaque défi **d** comportant **m** entiers d_i ci-après appelés défis élémentaires ; le témoin calcule à partir de chaque défi **d** une réponse **D**,

• soit en effectuant des opérations du type :

$$D \equiv r \cdot Q_1^{d1} \cdot Q_2^{d2} \cdot \ldots Q_m^{dm} \bmod n$$

• soit

•• en effectuant des opérations du type :

$$D_i \equiv r_i \cdot Q_{i,1}^{d1} \cdot Q_{i,2}^{d2} \cdot \ldots Q_{i,m}^{dm} \bmod p_i$$

•• puis en appliquant la méthode des restes chinois ;

ledit procédé étant tel qu'il y a autant de réponses **D** que de défis **d** que d'engagements **R**, chaque groupe de nombres **R, d, D** constituant un triplet noté **{R, d, D}**.

11. Procédé selon la revendication 10 tel que pour mettre en oeuvre les couples de valeurs privées $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ et publiques $G_1, G_2, \ldots G_m$, on utilise les facteurs premiers $p_1, p_2, \ldots p_f$ et/ou les paramètres des restes chinois, les nombres de bases $g_1, g_2, \ldots g_m$ et/ou les valeurs publiques $G_1, G_2, \ldots G_m$ pour calculer :

- soit les valeurs privées $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ en extrayant une **k ième** racine carrée modulo **n** de G_i , ou en prenant l'inverse d'une **k ième** racine carrée modulo **n** de G_i ,

- soit les **f.m** composantes privées $Q_{i,j}$ des valeurs privées $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$, telles que $Q_{i,j} \equiv Q_i \pmod{p_j}$,

12 Procédé selon la revendication 11 tel que pour calculer les **f.m** composantes privées $Q_{i,j}$ des valeurs privées $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$:

- on applique la clé $\langle s, p_j \rangle$ pour calculer **z** tel que

$$z \equiv G_i^s \pmod{p_j}$$

- on utilise les valeurs **t** et **u**

• calculées comme indiqué ci-dessus dans le cas où p_j est congru

à 1 modulo 4 et

• prises respectivement égales à 1 (t=1) et 0 (u=0) dans le cas où p_j est congru à 3 modulo 4,

• • si u est nul on considère l'ensemble des nombres zz tels que :

• • • zz soit égale à z ou tel que

• • • zz soit égale au produit (mod p_j) de z par chacune des 2^{ii-t} racines 2^{ii}ièmes primitives de l'unité, ii allant de 1 à min(k,t) ,

• • si u est positif on considère l'ensemble des nombres zz tels que zz soit égale au produit (mod p_j) de za par chacune des 2^k racines 2^k ièmes de l'unité, za désignant la valeur de la variable w à l'issue de l'algorithme mis en oeuvre dans la revendication 10,

- on en déduit au moins une valeur de la composante $Q_{i,j}$ elle est égale à zz lorsque l'équation $G_i \equiv Q_i^v \bmod n$ est utilisée ou bien elle est égale à l'inverse de zz modulo p_j de zz lorsque l'équation $G_i . Q_i^v \equiv 1 . \bmod n$ est utilisée.

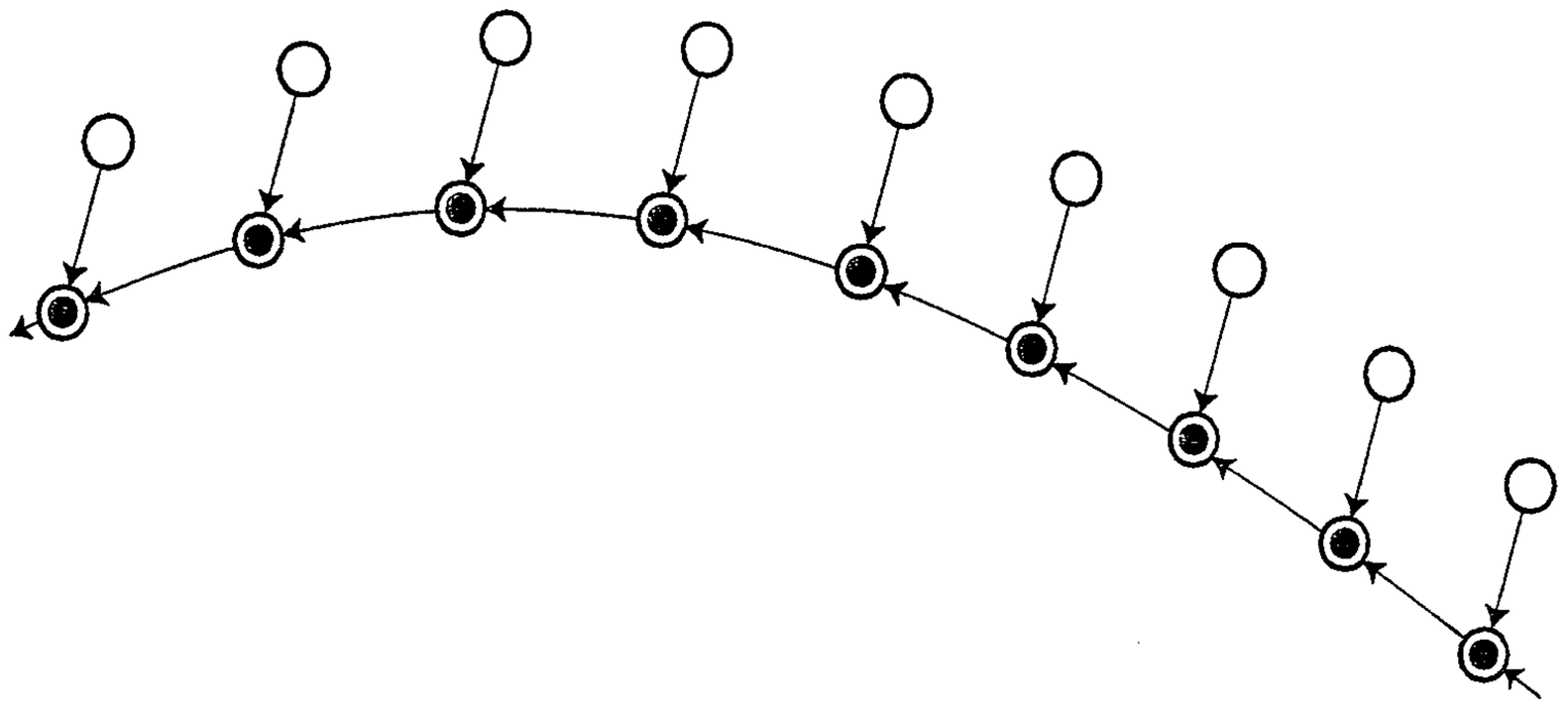


Fig.1A

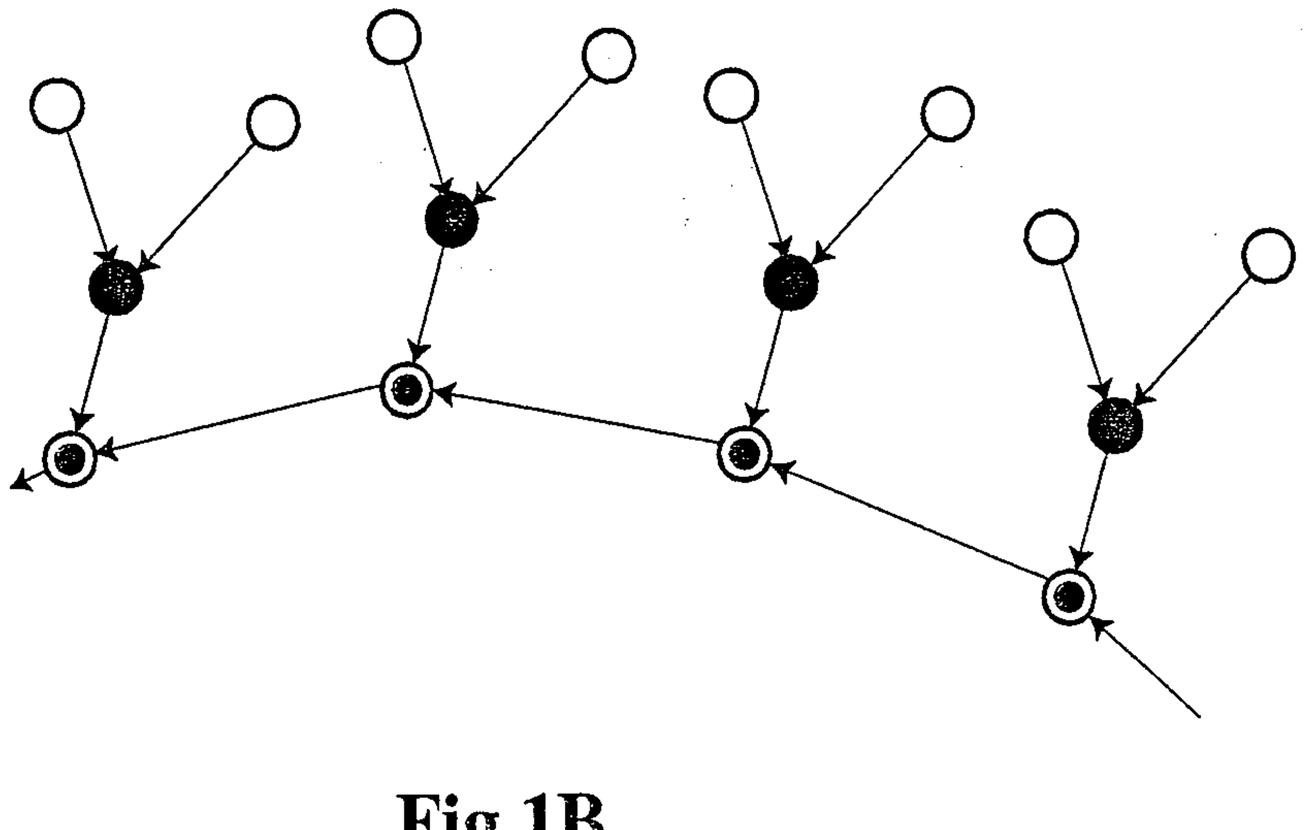


Fig.1B

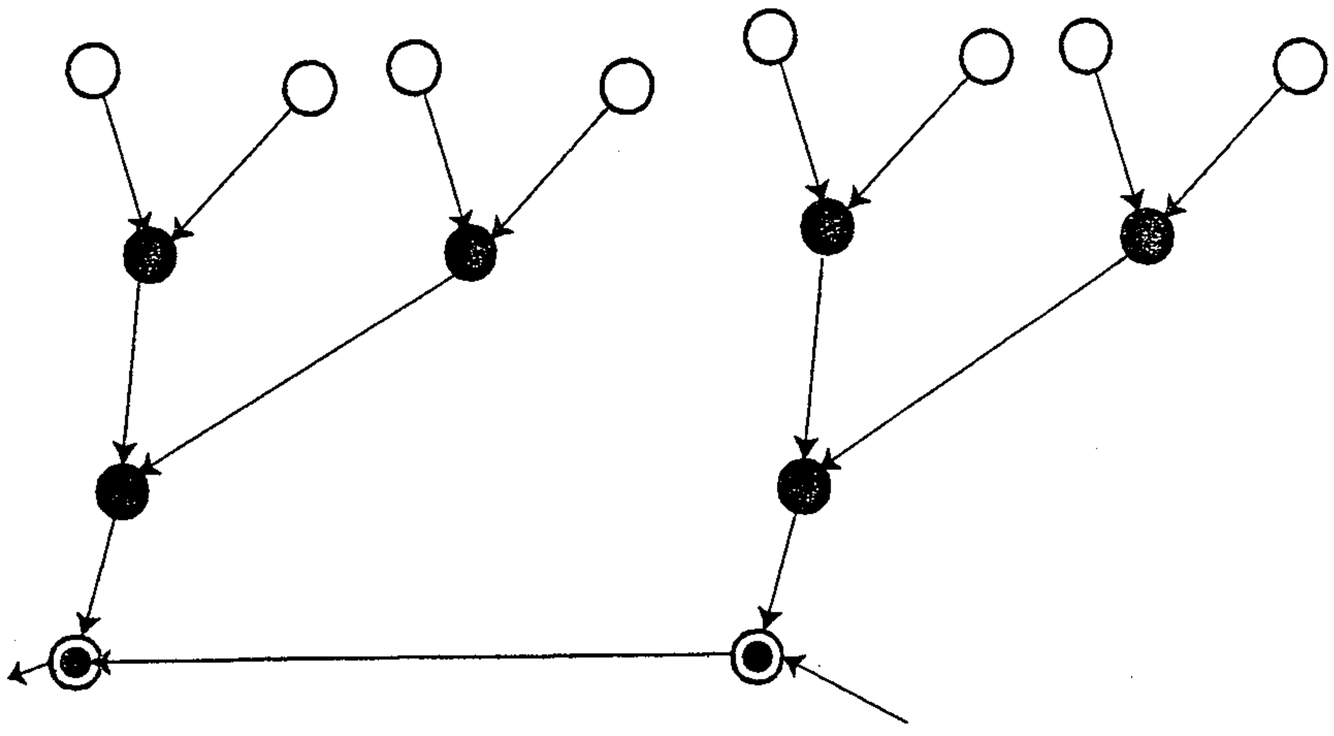


Fig.1C

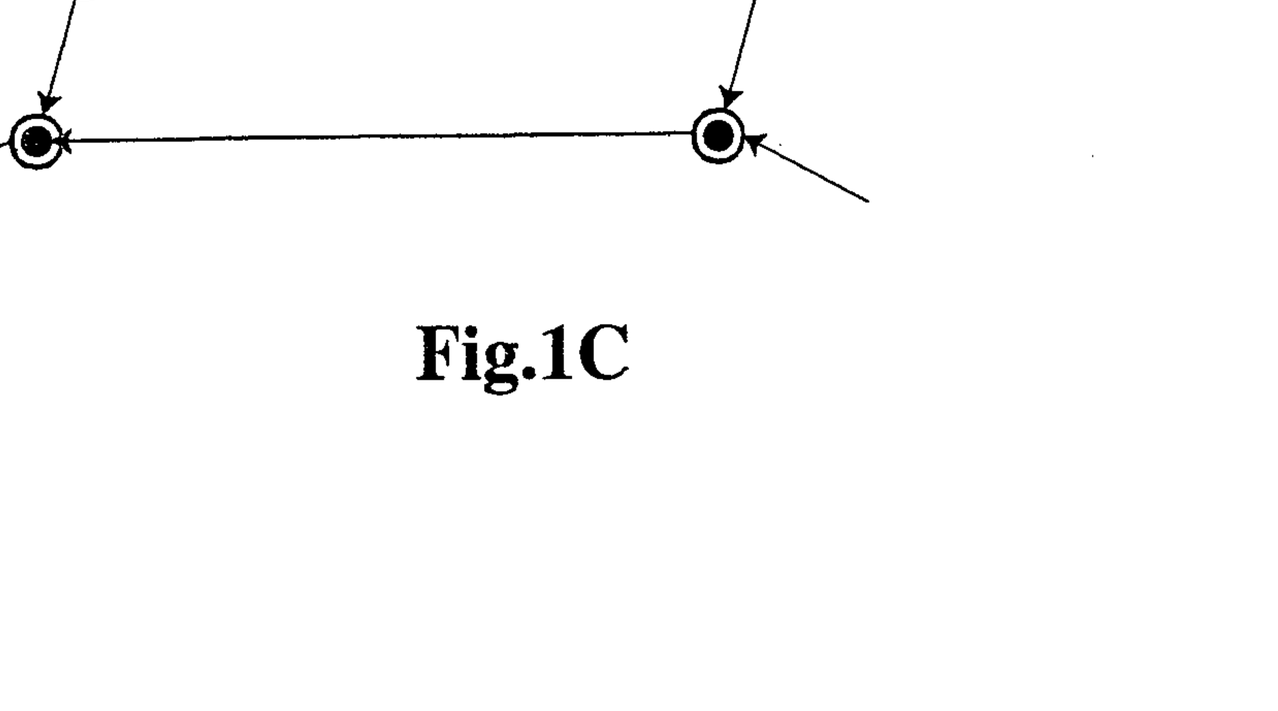


Fig.1D

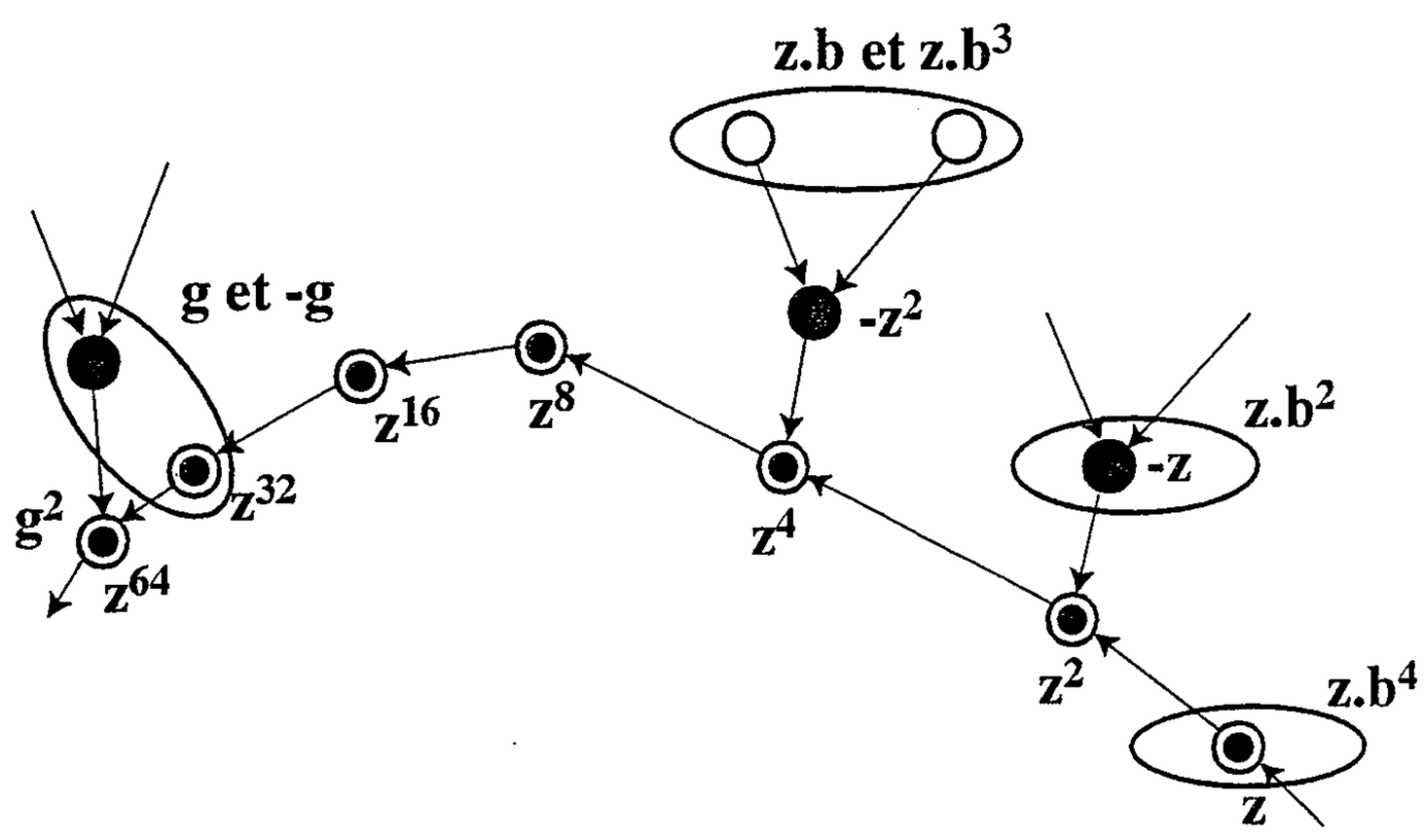

z.b et z.b3
g et -g
-z2
z.b2
z16
z8
-z
g2
z32
z4
z64
z2
z.b4
z

Fig.2

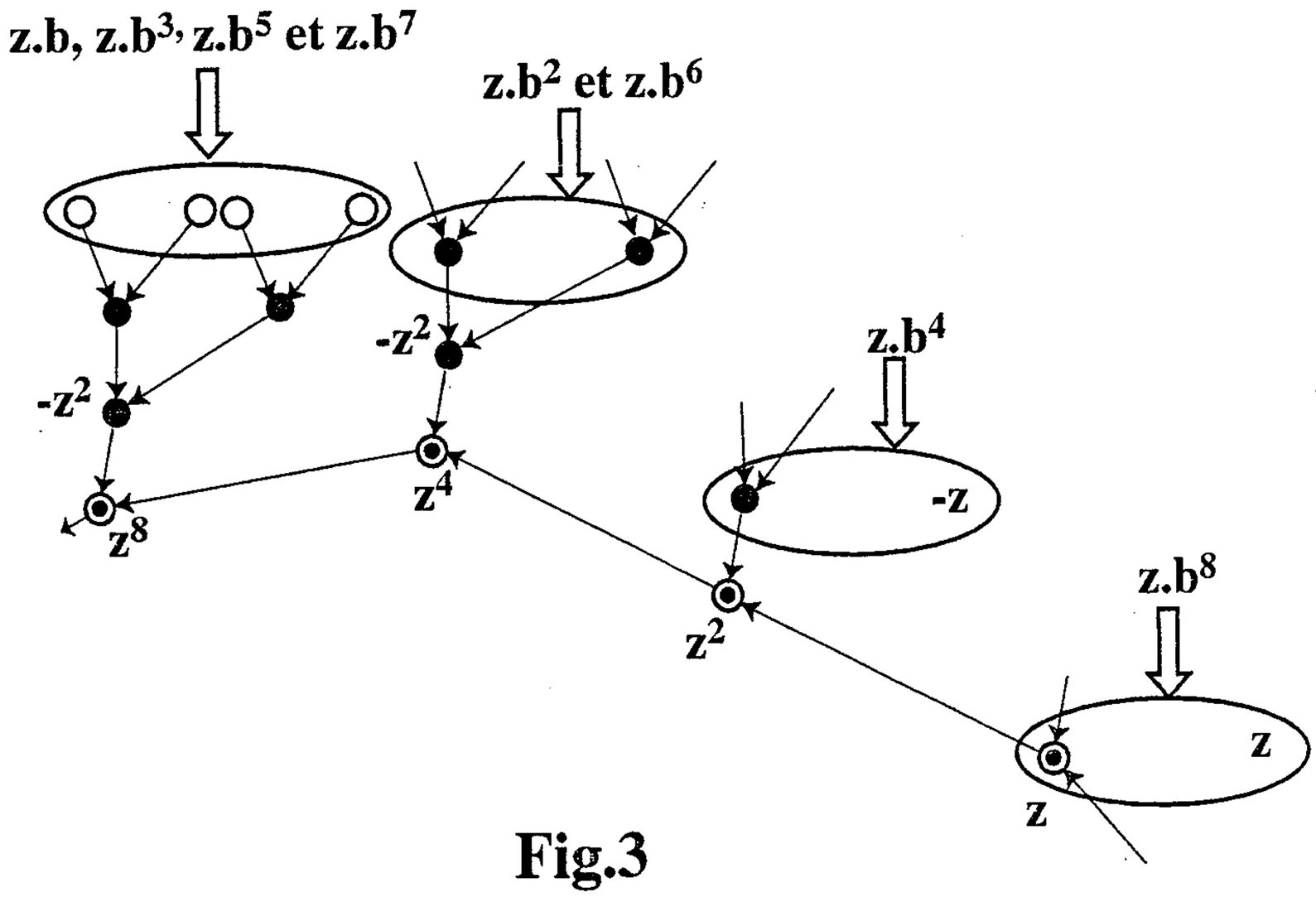

z.b, z.b3, z.b5 et z.b7
z.b2 et z.b6
-z2
z.b4
-z
z8
z4
z2
z.b8
z
z

Fig.3

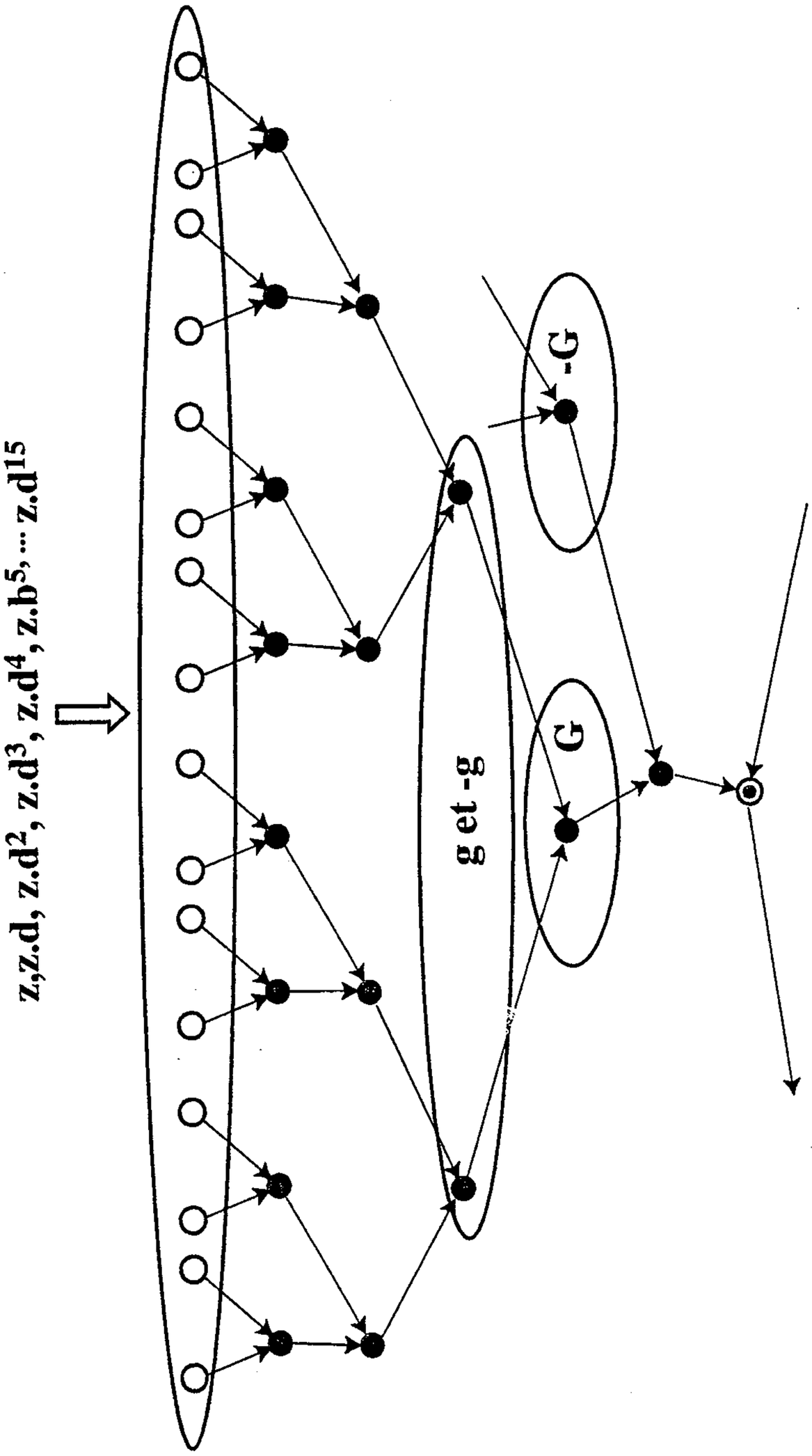
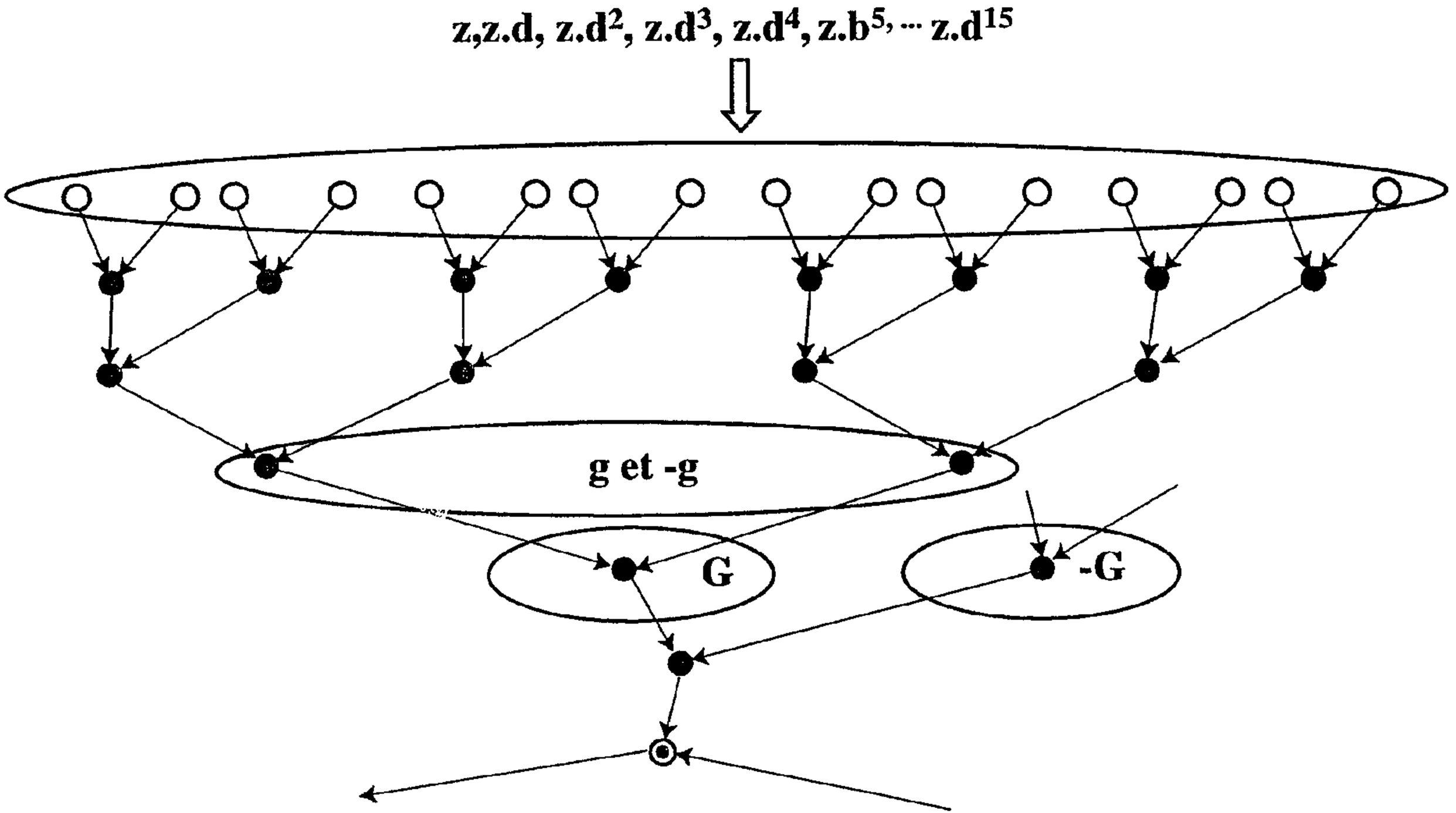


Fig.4


z,z.d, z.d2, z.d3, z.d4, z.b5, ··· z.d15
g et -g
G
-G