



(19) 대한민국특허청(KR)
(12) 공개특허공보(A)

(11) 공개번호 10-2009-0065639
(43) 공개일자 2009년06월23일

(51) Int. Cl.

H04N 5/74 (2006.01) G03B 21/00 (2006.01)

(21) 출원번호 10-2007-0133039

(22) 출원일자 2007년12월18일

심사청구일자 2007년12월18일

(71) 출원인

경희대학교 산학협력단

경기도 용인시 기흥구 서천동 1 경희대학교 국제 캠퍼스내

(72) 발명자

이승룡

경기 성남시 분당구 구미동 250 삼환빌라 102동 102호

이영구

경기 수원시 영통구 영통동 1024-14 경희유니빌 706호

버딘민날

경기 용인시 기흥구 서천동 1번지 경희대학교 전자정보과

(74) 대리인

김삼수

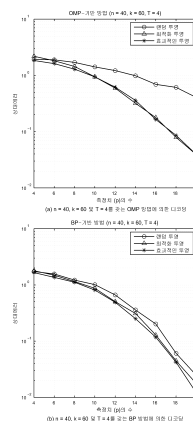
전체 청구항 수 : 총 5 항

(54) 압축 센싱을 위한 효과적인 투영법

(57) 요약

본 발명은 효과적인 투영법(Efficient Projection:EP)을 위한 투영 매트릭스를 얻는 알고리즘을 제안한다. 투영 매트릭스는 새롭게 투영된 디셔너리가 원래의 디셔너리와 비슷한 구조를 갖도록 설계되었다. 이를 위하여, 새로운 투영 디셔너리 내의 새로운 원소(atom)들 사이의 페어와이즈 거리(pairwise distances)들이 원래의 디셔너리 내의 원래의 원소(atom)들과 가능한 한 잘 매치되도록 하는 낮은 차원의 새로운 투영 디셔너리를 찾는 데 도움을 주는 다차원 스케일링(MDS) 기술을 사용하였다. 따라서, 효과적인 투영법(EP)의 해결방법을 이끌어냈고, 그 해결 방법은 매우 간단하며, 원래의 디셔너리를 특이값(singular value) 분해 방식으로 얻을 수 있다. 실험들은 우리 접근 방식의 새로움을 보여주었고 그것은 OP와 비교했을 때 매우 낮은 복잡도를 갖는 대비적인 퍼포먼스를 얻을 수 있다.

대표도 - 도2



특허청구의 범위

청구항 1

원래의 디서너리 매트릭스 Ψ 의 특이값 분해를 $\Psi = A\Lambda B^T$ 와 같이 가정하는 제1단계;

$\Psi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 에 다차원 스케일링(MDS)을 적용하여 Ψ 와 연관성을 갖는 새로운 투영 매트릭스 $\Omega = A_p^T \Psi$ 를 얻는 제2단계

를 포함하는 압축 센싱을 위한 효과적인 투영법.

청구항 2

제 1항에 있어서, 새로운 투영 매트릭스 $\Omega = A_p^T \Psi$ 로부터 효과적인 투영 매트릭스 $\Phi = A_p^T$ 를 설계할 수 있고, 새로운 투영 디서너리 $\Omega = \Phi \Psi$ 를 얻는 압축 센싱을 위한 효과적인 투영법.

청구항 3

제 1항에 있어서, 상기 제2단계에서 다차원 스케일링(MDS)은 새로운 투영 디서너리 내의 새로운 원소(atom)들 사이의 페어와이즈 거리(pairwise distance)들이 원래의 디서너리 내의 원래의 원소(atom)들과 가능한 한 잘 매치되도록 하는 압축 센싱을 위한 효과적인 투영법.

청구항 4

제 1항에 있어서, A_p 는 Ψ 의 p 개의 가장 큰 고유값(eigenvalue)에 대응하는 고유벡터인 A 의 첫 번째 P 열들을 포함하는 압축 센싱을 위한 효과적인 투영법.

청구항 5

제 1항 또는 제 2항에 있어서, 새로운 투영 디서너리 $\Omega = \Phi \Psi$ 는 Ψ 와 비슷한 구조를 갖는 압축 센싱을 위한 효과적인 투영법.

명세서

발명의 상세한 설명

기술 분야

<1> 본 발명은 압축 센싱(Compressed Sensing:CS)의 투영법(projection)에 관한 것이다.

배경 기술

<2> 압축 센싱(Compressed Sensing:CS)은 압축과 센싱 프로세스의 결합으로서, 신호가 샘플링과 동시에 크게 감소된 비율로 압축되는 최근 생겨난 분야이다. CS에서 투영(projection) 매트릭스는 랜덤하게 선택되어지고 그것은 비 효과적인 압축 센싱의 퍼포먼스를 나타낸다. 최근에 최적화 투영법(optimized projection:OP)이 좀 더 나은 효과적인 디서너리의 통일성을 이끌어내도록 선택되어, 상당히 더 나은 압축 센싱의 복구 퍼포먼스를 이끌어내었다.

<3> 이것이 최근의 최적화 투영법 매트릭스에 관련된 유일한 연구이다. 그러나, 이러한 접근 방식의 주요 결점은 이것의 알고리즘이 반복적이고 매우 복잡하다는 것이다. 투영 매트릭스를 설계하는데 효과적이고 가벼운 알고리즘이 압축 센싱의 퍼포먼스를 적절하게 보충하고 강화할 것이라는 게 고려되었다.

<4> 우리는 효과적인 투영법(Efficient Projection:EP)이라 불리우는 투영 매트릭스를 얻는 알고리즘을 제안한다. 투영 매트릭스는 새롭게 투영된 디서너리가 원래의 디서너리와 비슷한 구조를 갖도록 설계되었다. 이를 위하여, 새로운 투영 디서너리 내의 새로운 원소(atom)들 사이의 페어와이즈 거리(pairwise distances)들이 원래의 디서너리 내의 원래의 원소(atom)들과 가능한 한 잘 매치되도록 하는 낮은 차원의 새로운 투영 디서너리를 찾는 데 도움을 주는 다차원 스케일링(MDS) 기술을 사용하였다.

발명의 내용

해결 하고자하는 과제

<5> 본 발명은 압축 센싱 프레임워크에 대한 효과적이고 신규한 투영법을 설계하는데 목적이 있다.

효 과

<6> 이것은 효과적인 투영법(EP)의 해결방법을 이끌어냈고, 그 해결방법은 매우 간단하며, 원래의 디서너리를 특이 값(singular value) 분해 방식으로 얻을 수 있다. 실험들은 우리 접근 방식의 새로움을 보여주었고 그것은 OP와 비교했을 때 매우 낮은 복잡도를 갖는 대비적인 퍼포먼스를 얻을 수 있다.

발명의 실시를 위한 구체적인 내용

<7> 압축 및 센싱 프로세스 결합인 압축 센싱(CS)은 예전의 전형적인 접근 방식들보다 더 낮은 샘플링 리소스들을 요구하는 스파스(sparse) 신호들을 획득하고 표시하는 새로운 방법을 제공한다.

<8> 1.1 문제 제시(statement)

<9> 수학적 문제 제시(statement)는 다음과 같이 요약될 수 있다.

<10> 디서너리 $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 위에 스파스(sparse) 신호 $x \in \mathbb{R}^n$ 를 나타내는 T 가 주어지고, $n < k$ 이고 Ψ 의 각 열은 원소(atom)으로 불린다. 신호 x 는 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 및 $\|\alpha\|_0 < T \ll n$ 인 $x = \Psi\alpha$ 와 같이 설명될 수 있다. $\|\alpha\|_0$ 은 α 에서 0이 아닌 것들의 수를 카운트하는 α 의 l^0 -norm임을 유의해야한다. CS에서, 신호 x 는 $T < p \ll n$ 인 투영 매트릭스 $\Phi \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 에 의해 압축되고, 센싱 벡터 $y = \Phi x \in \mathbb{R}^p$ (도 1에서 보임)를 산출한다. 이제 목표는 원래의 신호 x 를 주어진 디서너리 Ψ , 투영 매트릭스 Φ 및 $y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha$ 로 재구성하는 것이다. $\Omega = \Phi \Psi \in \mathbb{R}^{p \times k}$ 라고 한다면, $x \in \mathbb{R}^n$ 는 수식 (1)을 만족하는 벡터 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 를 나타낸다고 생각할 수 있다.

$$y = \Omega \alpha \quad (1)$$

<11> $p \ll k$ 이므로, 문제 (1)은 결정되지 않는다.(그 문제에 대한 유일한 해결방법은 없다) 그래서, CS는 그 희박성(sparsity)을 이용하여 x 를 y 로부터 재구성한다.(즉, $y = \Omega \alpha$ 를 만족하는 모든 가능한 α 중에서 가장 희박한 것을 찾는다). 재구성 문제는 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$(P_0) \hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \text{ s.t. } y = \Omega \alpha \quad (2)$$

<14> $\hat{\alpha}$ 를 얻은 다음, 그 재구성된 신호는 $\hat{x} = \Psi \hat{\alpha}$ 로 계산된다.

<15> 1.2 CS의 현 해결방법들

<16> 원래 신호인 x 를 재구성하기 위해 스파스(sparse) 표시(representation)인 α 를 찾는 문제를 해결하기 위해

기본적으로 매칭 추적(Matching Pursuit:MP), 직교 매칭 추적(Orthogonal Matching Pursuit:OMP) 및 기초 추적(Basis Pursuit:BP)로 구성된 몇몇의 방법들이 개발되고 소개되어왔다. [Mallat and Zhang 1993]에서 제안된 그리디(greedy) 알고리즘인 매칭 추적(MP)은 매우 풍부한 함수의 디서너리에서 서브 최적 신호의 표시를 찾는 반복 프로시저이다. MP에서 신호 표시는 최대한으로 그 표시를 개선하는 원소(atom)를 각 반복 때마다 선택함으로써 반복적으로 만들어진다. MP가 스파스(sparse) 표시들을 계산해낸다는 확신이 없음에도 불구하고, MP는 쉽게 구현되고, 빠르게 수렴하고, 좋은 접근 특성들을 갖는다[Huggins and Zucker 2007].

<17> 게다가, MP의 한 변형인 직교 매칭 추적(OMP)은, 어떤 상황에서 스파스(sparse) 표시들을 계산하는 것을 보여줄 수 있다. [Pati et al. 1993]에서, 더 나은 수렴을 이끌어내고 잔여(여러)의 백워드 직교를 포함하는 직교 매칭 추적(OMP)이라 불리는 개선된 알고리즘이 제안되었다. OMP는 (2) 공식을 푸는데도 효과적으로 사용된다. 기본적으로 우리는 l^0 -norm을 통해 스파스(sparse) 표시를 찾기를 원하지만, NP-하드(hard) 문제가 있다. 그래서 우리는 컨벡스(convex) 폴리-타임 해결할 수 있는 선형 프로그램을 이끌어내므로, 우리는 그 NP-하드 문제를 l^1 -norm을 통해 완화할 수 있다. l^0 -norm 최적화 문제 (2)는 다음과 같이 l^1 -norm 최적화 문제에 완화될 수 있다.

$$(P_1) \hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \text{ s.t. } y = \Omega \alpha \quad (3)$$

<19> 기초 추적(BP)은 볼록(convex) 최적화로 스파스(sparse) 표시를 찾는다. 이것은 표시 내에서 l^1 -norm이 공동 작용하는 것을 최소화하는 분해법을 얻는다. 이것은 글로벌 최적화에 기초하므로, 매칭 추적(MP)이 하지 못하는 방법으로 안정적으로 풀 수 있다[Chen et al. 1998]. 최근 이론들은 또한 BP로 계산된 표시들이 어떤 상황에서 확실히 희박함을 보여준다[Huggins and Zucker 2007].

<20> 1.3 압축 센싱 응용

<21> 비록 CS는 훌륭한 이론적인 결과들을 가진 최근 생겨난 활동 분야이지만, 최근 몇년 동안 CS의 응용에 대한 여러 문헌이 있었다. [Wakin et al. 2006]에서, 그들은 처음 픽셀들/복셀들을 모으지 않고 신호의 랜덤 투영들을 직접적으로 획득하는 새로운 디지털 이미지/비디오 카메라에 기초하는 압축 이미징의 새로운 이론을 지원하기 위한 알고리즘 및 하드웨어를 제안했다. 그들의 카메라가 픽셀들의 수보다 이미지/비디오를 적은 횟수로 측정함에도 불구하고 그 카메라는 단일 검출 요소를 가진 이미지를 얻을 수 있는 능력을 포함한다는 것이 매우 흥미롭다. 이것은 비디오 획득/부호화에 요구되는 연산을 효과적으로 줄일 수 있다.

<22> 그 뒤를 이은 것이 [Lustig 2007]에서 연구된 의학 이미지상에서 CS의 응용이다. 그들은 CS의 이론에 기초하여 MR 이미징에 대한 샘플링 기법들을 개발한다.

<23> 압축 센싱 DNA 마이크로어레이는 또한 [Sheikh et al. 2007]에서 연구되었다. 매우 포괄적이고 거의 완전한 CS의 참조는 <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs/> 에서 찾을 수 있다.

<24> 1.4 포커스 및 목적(focus and aim)

<25> 비록 디서너리 매트릭스 Ψ 의 선택은 타겟 신호인 x 의 모델에 거의 의존하지만, 투영 매트릭스 Φ 는 CS 프레임워크에서 랜덤하게 선택된다. 투영 매트릭스를 간단하게 선택하는 이유는 그것의 이론적 분석을 간편하게 하고 또한 간단한 실행을 용이하게 하기 위한 것이다. 그러나, 랜덤하게 Φ 를 선택하는 것은 비효율적인 CS의 퍼포먼스를 이끌어낼 수 있으므로, 그것은 투영 매트릭스 Φ 를 효과적이고 최적의 방법으로 설계하기 위한 좋은 동기화(motivation)이다. [Elad 2007]에서, 그들은 투영 매트릭스 Φ 의 최적화함으로써 효과적인 디서너리의 더 나은 일관성을 이끌어냈다. 그 디서너리는 기초 추적(BP)과 직교 매칭 추적(OMP)와 함께 압축 센싱의 상당히 더 나은 재구성 퍼포먼스를 얻게 된다. 이것은 단지 최근의 투영 매트릭스 최적화에 관련된 연구이다. 그러나, 이 접근 방식의 주요 결점은 이것의 알고리즘이 반복적이고 매우 복잡하다는데 있다. 이것은 투영 매트릭스를 설계하는 데 있어 효과적이고 가벼운 방식의 알고리즘이 유용하도록 CS의 퍼포먼스를 보충(supplement)하고 개선하는 것이 고려된다.

<26> 이 특허에서 우리는 [Elad 2007]의 최적화 투영법(OP)과 구별하기 위한 효과적인 투영(EP)라 불리는 투영 매트릭스 Φ 를 설계하기 위한 알고리즘을 제안한다. EP는 새로운 투영 디서너리 $\Omega = \Phi\Psi$ 가 디서너리 Ψ 와 매

우 비슷한 구조를 갖게 되는 방식으로 설계되었다. 이 제안에서, 우리는 새로운 투영 디렉터리 내의 새로운 원소(atom)들 사이의 페어와이즈 거리(pairwise distances)들이 원래의 디렉터리 내의 원래의 원소(atom)들과 가능한 한 잘 매치되도록 하는 낮은 차원의 새로운 투영 디렉터리를 찾는 데 도움을 주는 다차원 스케일링(MDS) 기술을 사용한다. 이것은 EP의 해결방법을 이끌어내었고, 그 해결 방법은 매우 간단하며, 원래의 디렉터리 Ψ 를 특이값(singular value) 분해 방식으로 얻을 수 있다.

<27> 다음 섹션에서는 OP 기술이 보여질 것이다. MDS 및 제안된 EP 알고리즘은 섹션 3에서 보여진다. 우리의 제안된 알고리즘의 신규성을 보여주기 위한 여러 실험 결과를 섹션 4에서 펼쳐보였다. 결론들과 미래의 연구들은 섹션 5에 있다.

<28> 2. 최적화 투영법(Optimized Projection:OP)

<29> 주어진 디렉터리 Ψ 의 상호-간섭성(mutual-coherence)은 Ψ 내의 다른 열들 사이의 최대 정규화된 절대값 내적(inner product)으로 정의되며[Donoho and Elad 2002][Gribonval and Nielsen 2003][Elad 2007], 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\mu\{\Psi\} = \max_{i \neq j} \frac{|d_i^T d_j|}{\|d_i\| \|d_j\|} \quad (4)$$

<31> d_i 는 디렉터리 매트릭스 Ψ 내의 열 i^{th} 이다. 상호-간섭성은 디렉터리 열들 사이에 가장 최악의 유사성 측정값을 제공하는데, 이는 디렉터리의 취약성을 노출시키는 값으로서, 두 개의 가까이 연관된 열들은 어떠한 추적 기술도 혼란시킬 수 있다. 상호-간섭성을 이해하기 위한 다른 방법은 그것의 각각의 열들을 정규화시킨 후 디렉터리를 사용하여 계산되는 그램(gram) 매트릭스 $G = \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi}$ 를 고려함으로써 얻는다. 상호-간섭성은 가장 큰 등급을 갖는 비대각(off-diagonal) 엔트리(entry) g_{ij} 이다.

<32> 신호 x_0 가 스파스(sparse) 표시를 갖는 $x_0 = \Psi \alpha_0$ 로 구성된다고 가정해보자. 또 다음의 부등성이 만족된다고 가정해보자.

$$\|\alpha_0\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu\{\Psi\}} \right) \quad (5)$$

<34> 어떤 이론적 연구들[Donoho and Elad 2002][Gribonval and Nielsen 2003]은 만약 부등성(5)이 만족된다면, 벡터 α_0 는 BP 또는 OMP 알고리즘에 의해 정확하게 찾아질 수 있는 것을 보인다. 이러한 사실에 기초하여, [Elad 2007]의 Elad는 좀 더 한정된 요구사항을 제안하였다.

$$\|\alpha_0\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu\{\Phi\Psi\}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu\{\Psi\}} \right) \quad (6)$$

<36> 그리고, $\mu\{\Phi\Psi\}$ 이 가능한 한 작게 Φ 를 설계하였다. 그러나 그는 상기와 같이 정의된 상호-간섭성은 스파스(sparse) 표시의 실제 행동과 추적 알고리즘의 퍼포먼스에 타당하지 않다고 주장했다. 그래서, 그는 t-averaged 상호-간섭성이라 불리는 다른 상호-간섭성을 고려했고 그것은 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_t(\Psi) = \frac{\sum_{i \neq j} (|g_{ij}| \geq t) \cdot |g_{ij}|}{\sum_{i \neq j} (|g_{ij}| \geq t)} \quad (7)$$

<38> t-averaged 상호-간섭성에 기초하는 최적화 투영법은 [Elad 2007]에 제안된 알고리즘에 의해 얻어질 수 있고, 아래의 테이블 I와 같이 요약될 수 있다.

목적 : Φ 에 대해 $\mu, \{\Phi\Psi\}$ 최소화. 입력 : 다음의 파라미터들을 사용: (1) t 또는 $t\%$ - 간섭성 (고정 또는 관계) 쓰레숄드(threshold), (2) Ψ - 디셔너리, (3) p - 측정치들의 수, (4) γ - 다운 - 스케일링 인수, 및 (5) $Iter$ - 인터랙션의수. 초기화 : $\Phi \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 임의의 랜덤 매트릭스. 루프 : $k=0$으로 셋팅하고 $Iter$ 번 반복: (1) 그램 매트릭스 구성 : 매트릭스 $\Phi_k \Psi$ 내의 원주들을 표준화하고 효과적인 디셔너리 Ω_k를 얻고, 그램 매트릭스 $G_k = \Omega_k^T \Omega_k$를 연산한다. (2) 쓰레숄드(threshold) 및 쉬링크(shrink) 세트 : 만일 동작 모드가 고정된다면, 쓰레숄드와 같은 t를 사용한다. 반면에 상기 G_k 내의 비대각 엔트리들의 $t\%$와 같은 t가 선택된다. 다음에 의해 그램 매트릭스를 업데이트하고 $\hat{G}_k$를 얻는다. $g_{ij} = \begin{cases} \gamma g_{ij} & g_{ij} \geq t \\ \gamma t \cdot \text{sign}(g_{ij}) & t > g_{ij} \geq \gamma t \\ g_{ij} & \gamma t > g_{ij} \end{cases} \quad (8)$ (3) 랭크(Rank) 감소 : SVD 및 p와 같게 되는 $\hat{G}_k$의 랭크 force를 적용. (4) 제곱근(Squared-Root) : $\hat{G}_k = S_k^T S_k$의 제곱근을 만들고, 여기서 S_k는 $p \times n$의 크기다. (5) Φ 업데이트 : 에러 $\ \Phi_k - \Phi\Psi\ _F^2$를 최소화하는 Φ_{k+1}를 찾고 $k = k + 1$을 세트. 출력 : 상기 알고리즘의 출력은 Φ_{Iter}이다.

<39>

<40> 테이블 I. 최적화 투영법 알고리즘

<41> 3. 효과적인 투영법(Efficient Projection:EP)

<42> EP는 새로운 투영 디셔너리 내의 새로운 원소(atom)들 사이의 페어와이즈 거리(pairwise distances)들이 원래의 디셔너리 내의 원래의 원소(atom)들과 가능한 한 잘 매치되도록 하는 낮은 차원의 새로운 투영 디셔너리를 찾는 데 도움을 주는 다차원 스케일링(MDS) 기술의 아이디어에 기초한다. 이 섹션에서 우리는 MDS를 간단히 리뷰하고 EP를 얻기 위한 우리의 접근 방식을 제안하였다.

<43> 3.1 다차원 스케일링(Multidimensional Scaling:MDS)

<44> N 객체들의 세트가 (i, j) 객체들의 각 쌍 사이에 있다고 가정하면, 두 객체들 사이에 "차이점(dissimilarity)"의 측정값 δ_{ij} 이 있다. 전형적인 MDS의 목표는 공간에서의 포인트들은 객체들을 나타내며, 하나의 포인트는 하나의 객체를 표시하고, 공간 $\{d_{ij}\}$ 에서 포인트들 사이의 거리가, 원래의 차이점(dissimilarity)인 $\{\delta_{ij}\}$ 와 최대한 매치가 되도록 하는 통상적으로 유클리드인 낮은 차원의 공간을 찾는 데 있다.[Cox and Cox 1994]. 다차원 스케일링은 차이점(dissimilarity)들인 $\{\delta_{ij}\}$ 을 직접적으로 유클리드 간격들로 다루며, 두 배로 집중된 차이점들(dissimilarities) 매트릭스의 스펙트럼 분해를 이용한다. 형식적으로, 대칭적인 $N \times N$ 매트릭스 $\Delta = [\delta_{ij}]$ 가 만일 $\delta_{ij} \geq 0$ 이고 $\delta_{ii} = 0$ (zero diagonal elements) 이면 차이점(dissimilarity) 매트릭스로 불린다. 주어진 차이점(dissimilarity) 매트릭스 Δ 로부터, MDS 알고리즘은 특정 차원 P의 유클리드 공간에서 포인트들의 배열을 구성한다.

<45> 그 배열 공간 내의 간격들은 유클리드이기 때문에, 우리는

$$\delta_{ij}^2 = d_{ij}^2(X) = \|x_i - x_j\|^2 = (x_i - x_j)^T (x_i - x_j) \quad (9)$$

<47> 를 갖는다.

<48> 거리의 제곱을 $d_{ij}^2(X) = x_i^T x_i - 2x_i^T x_j + x_j^T x_j$ 와 같이 쓰고 $\Xi = [x_1^T x_1, \dots, x_N^T x_N]^T$, 와 같이 정의하면 [Costa et al. 2006], 거리 제곱 매트릭스 $D = [d_{ij}^2(X)]_{i,j=1}^N$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D = \Xi e^T - 2X^T X + e \Xi^T \quad (10)$$

여기서 $e \in \mathbb{R}^n$ 는 모든 것들의 벡터이고, $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ 이다. 내적 매트릭스 $B = X^T X$ 로 정의하면, 매트릭스 B 는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$B = -H D H \quad (11)$$

여기서, $H = I - ee^T / N$ 는 센터링(centering) 연산자이다. B 로부터 좌표들을 복구하기 위하여, MDS는 다음과 같은 고유벡터들 및 고유값들을 추출해야할 필요가 있다.

$$B = U \Lambda U^T \quad (12)$$

B 의 0이 아닌 가장 큰 고유 값들 P 의 대각 행렬을 $\Lambda_p = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ 라 하면, $U_p = [u_1, \dots, u_p]$ 은 대응하는 고유 벡터들이다. 그리고 새로운 좌표 매트릭스 $\hat{X}$ 는 $\hat{X} = \Lambda_p^{1/2} U_p^T$ 에 의해 주어진다. 이제 투영 매트릭스를 보기 위해 X 와 $\hat{X}$ 사이의 관계를 얻는다. 특이값(singular value) 분해 및 고유값(eigenvalue) 분해사이의 관계에 기초하여, 우리는 수식(13)을 쓸 수 있다.

$$X^T X = U_p \Lambda_p U_p^T = \left(U_p \Lambda_p^{1/2} V^T \right) \left(V \Lambda_p^{1/2} U_p^T \right) \quad (13)$$

여기서 $X = V \Lambda_p^{1/2} U_p^T$ 는 X 의 특이값(singular value) 분해를 보인다. 이제 우리는 $\hat{X} = V^T X$ 를 가질 수 있다. MDS가 유클리드 거리상에 적용될 때, 그것은 주성분 분석법(principal component analysis)과 마찬가지로 유의해야한다.

3.2 효과적인 투영법(Efficient Projection)

여기서는 어떻게 효과적인 투영법을 얻는지 유도한다. 우리가 앞서 제시한 대로 EP는 새로운 투영 디셔너리 $\Omega = \Phi \Psi$ 이 디셔너리 Ψ 와 비슷한 구조는 갖게되는 방식으로 설계되었다. 이 제안에서, 우리는 새로운 투영 디셔너리 내의 새로운 원소(atom)들 사이의 페어와이즈 거리(pairwise distances)들이 원래의 디셔너리 내의 원래의 원소(atom)들과 가능한 한 잘 매치되도록 하는 낮은 차원의 새로운 투영 디셔너리를 찾는 데 도움을 주는 다차원 스케일링(MDS) 기술을 사용한다. 디셔너리 매트릭스 Ψ 이 특이값(singular value) 분해를 다음과 같이 갖는다고 가정하자

$$\Psi = A \Lambda B^T \quad (14)$$

$\Psi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 에 MDS를 적용함으로써, 우리는 다음과 같이 Ψ 와 연관성을 갖는 새로운 투영 매트릭스 $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times k}$ 를 얻는다.

$$\Omega = A_p^T \Psi \quad (15)$$

- <62> 여기서 A_p 는 Ψ 의 P 개의 가장 큰 고유값(eigenvalues)에 대응하는 고유 벡터인 A 의 첫 번째 p 열들을 포함한다. (15)로부터, 우리는 효과적인 투영 매트릭스 $\Phi = A_p^T$ 를 설계할 수 있다.
- <63> 4. 실험 결과
- <64> 이 섹션에서 우리는 압축 센싱 프레임워크에서의 랜덤 투영법, 최적화 투영법 및 효과적인 투영법들의 퍼포먼스를 비교하기 위하여 생성된 데이터를 갖고 몇 가지 실험을 했다.
- <65> (1) 데이터 생성
- <66> - 표준화된 원주들을 갖는 랜덤 디서너리 매트릭스 $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 를 생성한다.
- <67> 투영 매트릭스 설계:
- <68> (a) 표준화된 행(row)들을 갖는 랜덤 투영 매트릭스 $\Phi \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 를 생성
- <69> (b) 또는 테이블 I의 알고리즘을 이용하여 OP 매트릭스 Φ 를 설계
- <70> (c) 또는 EP 매트릭스 Φ 를 이전 섹션에서 설명된 것처럼 설계
- <71> - $m=10000$ 인 샘플들 $X = [x_1, x_2, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 를 생성한다. 여기서, $x_i = \Psi \alpha_i \in \mathbb{R}^n$ 이고 α_i 는 임의로 선택된 0이 아닌 T 를 갖는 스파스(sparse) 벡터이다.
- <72> - $y_i = \Phi x_i \in \mathbb{R}^p$ 인 측정들을 계산한다. 여기서, $i = 1 \dots m$ 이다.
- <73> (2) 디코딩 및 에러 연산
- <74> - $i = 1 \dots m$ 를 갖는 Ψ , Φ , y_i 이 주어지고, 우리는 $\Phi \Psi \alpha_i = y_i$ 에 대한 subject인 스파스(sparse) 벡터 $\hat{\alpha}_i$ 를 찾기 위해 OMP 또는 BP를 사용하고, 추정된 $\hat{x}_i = \Psi \hat{\alpha}_i$ of x_i 를 계산한다.
- <75> - 원래의 (x_i) 와 추정된 $(\hat{x}_i)$ 샘플들간의 거리 에러(distance error)를 계산하고, 모든 샘플들 상의 에러 평균을 얻는다.
- <76> 우리는 우리의 실험들을 위해 두 개의 연구 케이스들을 셋업했다. 케이스 I은 $n=40$, $k=60$ 및 $T=4$ 를 수반하고 케이스 II는 $n=100$, $k=200$ 및 $T=4$ 가 선택되었다. 우리는 상기 실험 프로토콜을 모든 실험에서 따랐다. 이 프로토콜은 [Elad 2007]의 방식과 유사하다. 값 α 의 0이 아닌 위치들은 랜덤으로 선택되고 iid zero-mean과 단위변화 가우시안 값들이 있는 것을 유의해야한다.
- <77> 이 스파스(sparse) 벡터들은 샘플 매트릭스 X 를 만들어내고 압축 센싱의 퍼포먼스를 측정하는데 사용되었다. 이 실험들의 목적은 최적화되고 효과적인 투영법의 설계 전과 후에 BP 및 OMP와 함께 압축 센싱의 퍼포먼스를 연구하는데 있고, 변화하는 측정 합계들을 연구하는데 있다(예, 변화하는 값 p). 케이스 I의 테스트에서는 디서너리 매트릭스 사이즈가 디서너리 매트릭스 사이즈가 non-zero $T = 4$ 의 수를 갖는 40×60 이다. 그래서 우리는 측정치 p 를 4에서 20으로 2의 스텝 사이즈로 변화시켰다. OMP와 BP 둘다 CS의 퍼포먼스를 측정하기 위해 사용되었다(도 2에 도시함).
- <78> 케이스 II의 실험 퍼포먼스는 도 2에서 볼 수 있다.
- <79> 여기서 디서너리 사이즈는 100×200 이고, $T = 4$ 이고 p 는 4에서 40으로 2의 스텝 사이즈로 변화시켰다. 모든

실험들을 통하여 몇 가지의 결론들이 다음과 같이 두드러진다.

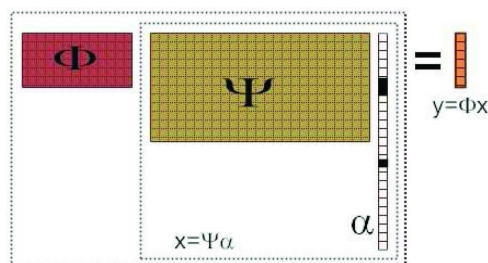
- <80> - CS 프레임워크에서, 효과적인 투영법은 최적화 투영법만큼 좋은 상대적인(comparative) 퍼포먼스를 준다.
- <81> - 비록 최적화 투영법을 설계하는 알고리즘은 복잡하고 반복적인 프로시저이지만, 효과적인 투영법은 단지 반복적이지 않고 덜 복잡한 프로시저의 잘 알려진 고유치 분해로 얻어질 수 있다.
- <82> - 일반적으로, CS 프레임워크에서 BP의 퍼포먼스는 OMP의 그것보다 더 낮다.
- <83> 5. 결론
- <84> 현재 연구의 목적은 압축 센싱 프레임워크에 대한 효과적이고 신규한 투영법을 설계하기 위함이다. 알고리즘은 CS 프레임워크에 대해 매우 효과적인 투영법을 만들어내는 특이값(singular value) 분해에 기초한다.
- <85> 실험들은 최적화 투영법 접근 방식에 비교했을 때 우리의 제안된 접근 방식이 매우 대비적인 결과를 보여준다. 이 방식의 단순함과 효과적임은 어떠한 CS 프레임워크의 응용에도 적절하게 적용될 수 있다. 비록 현재 연구가 투영 매트릭스 설계에 초점을 맞추고 있지만, 미래의 연구들은 그 이상의 측정에 대한 실제 응용들에 효과적인 투영법-기반 CS를 적용될 것이다.

도면의 간단한 설명

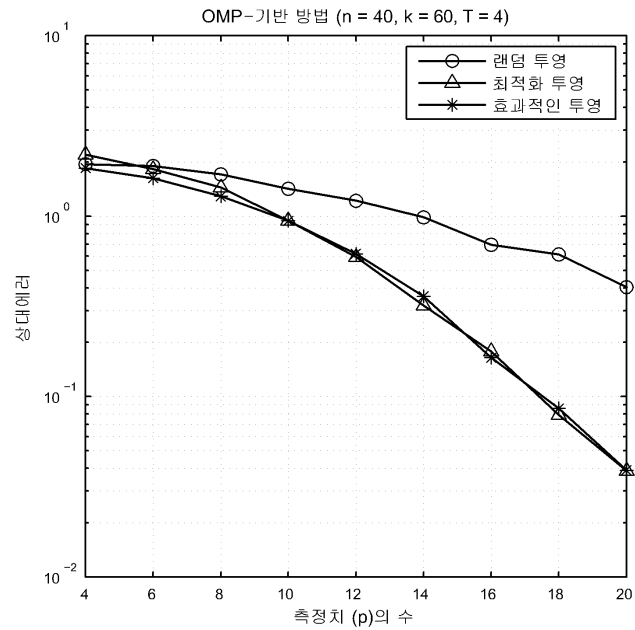
- <86> 도 1은 압축과 센싱 프로세스의 결합을 나타내는 도면이다.
- <87> 도 2는 본 발명의 제1실시 예에 따라 랜덤 투영 매트릭스, 최적화 투영 매트릭스 및 효과적인 투영 매트릭스에 기초하는 CS 퍼포먼스의 비교를 나타내는 도면이다.
- <88> 도 3은 본 발명의 제2실시 예에 따라 랜덤 투영 매트릭스, 최적화 투영 매트릭스 및 효과적인 투영 매트릭스에 기초하는 CS 퍼포먼스의 비교를 나타내는 도면이다.

도면

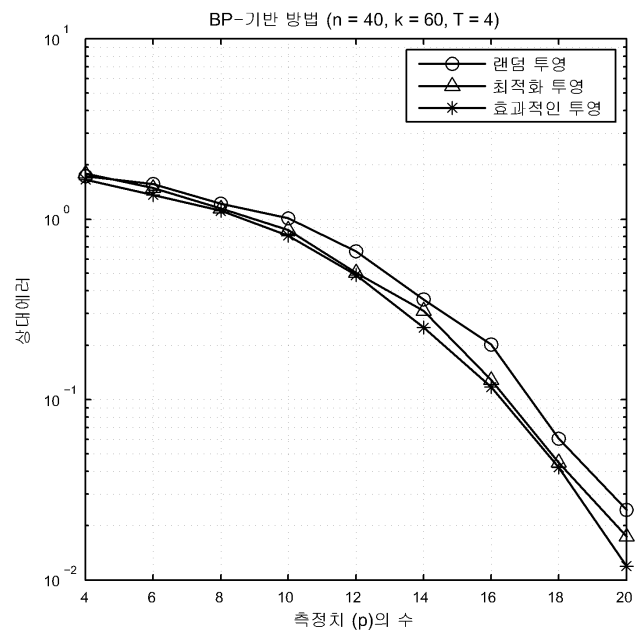
도면1



도면2

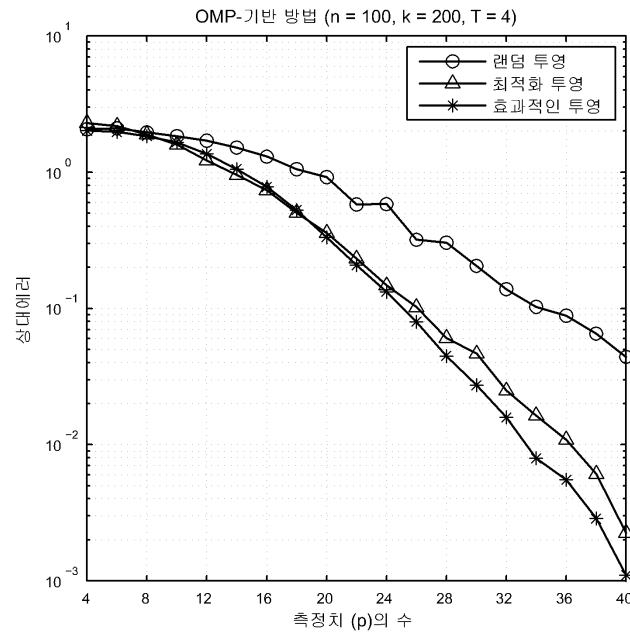


(a) $n = 40, k = 60$ 및 $T = 4$ 를 갖는 OMP 방법에 의한 디코딩

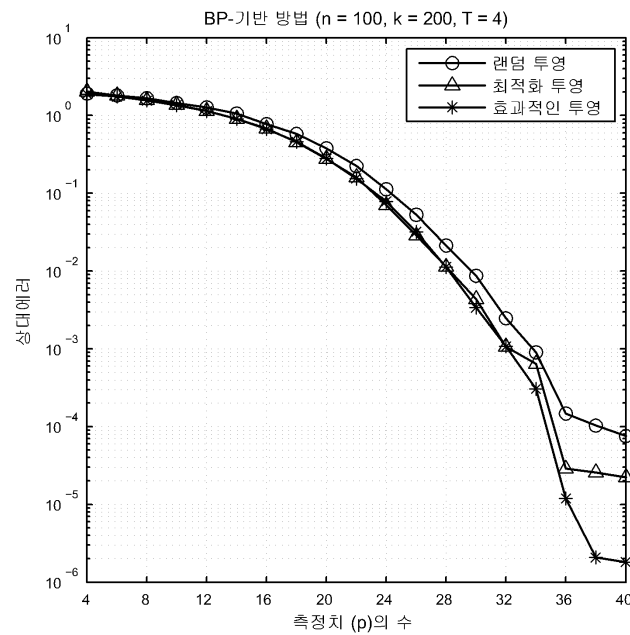


(b) $n = 40, k = 60$ 및 $T = 4$ 를 갖는 BP 방법에 의한 디코딩

도면3



(a) $n = 100, k = 200$ 및 $T = 4$ 를 갖는 OMP 방법에 의한 디코딩



(b) $n = 100, k = 200$ 및 $T = 4$ 를 갖는 BP 방법에 의한 디코딩