

[19] 中华人民共和国国家知识产权局

[51] Int. Cl.

G07D 5/00 (2006.01)

G07D 7/00 (2006.01)

G06K 9/62 (2006.01)



[12] 发明专利说明书

专利号 ZL 99815989.1

[45] 授权公告日 2007 年 12 月 12 日

[11] 授权公告号 CN 100354897C

[22] 申请日 1999.12.1 [21] 申请号 99815989.1

[30] 优先权

[32] 1998.12.2 [33] GB [31] 9826494.8

[86] 国际申请 PCT/IB1999/002012 1999.12.1

[87] 国际公布 WO2000/033262 英 2000.6.8

[85] 进入国家阶段日期 2001.8.2

[73] 专利权人 MEI 公司

地址 美国宾夕法尼亚州

[72] 发明人 G·鲍达特

[56] 参考文献

MACHINE LIARNING PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL CONFERENCE 1996.7.3

US5522491A 1996.6.4

CN1153363A 1997.7.2

EP0367921A 1990.5.16

Simplified support vector decision rules.
BURGES C J C. MACHINE LEARNING PRO-
CEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFER-
ENCE. 1996

审查员 宋红明

[74] 专利代理机构 中国专利代理(香港)有限公司

代理人 王 勇 张志醒

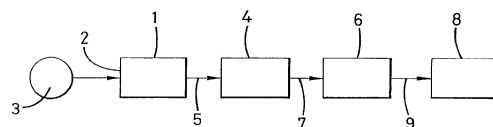
权利要求书 2 页 说明书 12 页 附图 2 页

[54] 发明名称

分类方法和设备

[57] 摘要

一种导出用于将货币物品分类成两个或多个类别的分类的方法, 包括: 测量每个类别的已知样本, 选择一个对应于特征向量空间到第二更高维数空间的非线性映射的函数, 将特征向量映射到图象向量, 并在第二空间中导出表示 $N-1$ 个轴的系数, 其中 N 是类别数, 获得表示所测量样本的图象向量到 $N-1$ 个轴上的投影的值, 并采用这些值来导出一个与第二空间中的分离函数等效的用于分离类别的分离函数。



1. 一种导出用于将货币物品(3)分类成两个或多个类别的分类函数的方法,包括:测量每个类别的已知样本,并从所测量样本导出特征向量,选择一个对应于特征向量空间到第二空间的非线性映射的映射函数,将特征向量映射到图象向量,其中所述映射函数表示在第二空间中关于特征向量空间的两个元素的函数点积,并在第二空间中导出表示 $N-1$ 个轴的系数,其中 N 是类别数,其中通过对每个类别的图像向量组在所述轴上的投影的分离进行优化,获得表示所测量样本的图像向量在所述轴上的投影的值,并采用这些值导出一个用于在 $N-1$ 维空间中分离与分离函数等效的类别的分离函数,从而来导出所述系数。

2. 如权利要求 1 所述的方法,其中,第二空间的维数比第一空间的高。

3. 如权利要求 1 或 2 所述的方法,包括导出一个矩阵 V ,其中 V 是第二空间中的协方差矩阵,导出一个矩阵 B ,其中 B 是第二空间中的类别中心的协方差矩阵,导出对等式 $\lambda Vv = Bv$ 的解,并从解 v 中导出所述系数。

4. 如前述任一权利要求所述的方法,其中,所述映射函数是 $k(x, y)$, 其中, $k(x, y) = (x \cdot y)^d$ 。

5. 如前述任一权利要求所述的方法,其中,所述函数映射是 $k(x, y)$, 其中,

$$k(x, y) = \exp \frac{(-\|x - y\|^2)}{\sigma^2}。$$

6. 如前述任一权利要求所述的方法,其中,所述映射函数是 $k(x, y)$, 其中, $k(x, y) = \tanh((x \cdot y) + \theta)$ 。

7. 如前述任一权利要求所述的方法,其中,所述映射函数是 $k(x, y)$, 其中, $k(x, y) = \left(\frac{1}{1 + e^{-((x \cdot y) + \theta)}} \right)$ 。

8. 一种用于对货币物品(3)分类的方法,包括:测量物品的特征,从测量值产生一个特征向量,并采用根据权利要求 1 至 7 中的任何一个的方法导出的分类函数来对物品分类。

9. 一种用于对货币物品分类的设备,包括:用于测量货币物品

(3) 的特征的测量装置(1), 用于从测量值产生一个特征向量的特征向量产生装置(4), 以及, 分类装置(6), 用于采用代表一个对应于特征向量空间到第二空间的映射的非线性映射函数的数据, 将特征向量映射到图象向量, 来对物品分类, 其中所述映射函数表示在第二空间中关于特征向量空间的两个元素的函数点积, 所述分类装置使用代表 $N-1$ 个轴的系数以及一个用于在 $N-1$ 维空间中分离图像向量的投影的 $N-1$ 维空间中的分离函数的函数, 其中 N 是可以由所述设备分类的类别数。

10. 如权利要求 9 所述的设备, 其中, 所述分类装置(6)包括用于导出表示所测量物品的特征向量的图象在所述轴上或在每个所述轴上的投影的值的装置。

11. 如权利要求 9 或权利要求 10 所述的设备, 其中, 所述分类装置(6)包括神经网络。

12. 如权利要求 9 至 11 中的任何一个所述的设备, 包括硬币入口(2), 并且所述测量装置包括用于感测硬币的传感器装置。

13. 如权利要求 12 所述的设备, 其中, 所述传感器装置用于感测硬币的材料和/或厚度和/或直径。

14. 如权利要求 9 至 11 中的任何一个所述的设备, 包括纸币入口(2), 并且其中, 所述测量装置包括用于感测纸币的传感器装置。

15. 如权利要求 14 所述的设备, 其中所述传感器装置用于感测从纸币反射和/或透射通过纸币的光的强度。

16. 一种包括如权利要求 9 至 13 中的任何一个所述的设备的硬币确认器。

17. 一种包括如权利要求 9 至 11, 14 或 15 中的任何一个所述的设备的纸币确认器。

分类方法和设备

本发明涉及用于对物品分类的方法和设备。本发明尤其与硬币或纸币的分类有关。

插入机械装置、例如自动售货机、兑换机等硬币或纸币，一方面依据面值分类，以及/或者另一方面，在原件和拷贝或其伪造品之间分选。已知执行这种分类的各种各样的方法。如在 GB2238152A 中描述的一个例子，其内容在这里作为参考。例如，从插入的硬币得到表示硬币的不同特征的测量值，例如材料和厚度。然后将这些测量值与存储的相应成对值进行比较，每组成对值相应于各个可承兑的硬币的面额。当每一个测量值落在给定面值的各个范围中时，插入的硬币被分类为属于那个面额。

在上述讨论的分类类型中，测量值可以被看作特征向量中的元素，并且不同面额的可承兑测量值对应于特征空间中的区域，被称为承兑区域。在上述给出的例子中，特征空间是两维的，承兑区域是矩形的，但是特征空间可以具有任何数量的维数，在承兑区域中具有相应的复杂性。例如，GB2254949A 描述了三维特征空间中的椭球承兑区域，其内容在这里作为参考。

在 EP 0067898A、EP 0472192A、EP 0165734A 中公开了用于对钞票和硬币分类的方法和装置的其他例子。例如，如 EP 0553402A 和 EP 0671040A 中所述的，其他分类方法包括采用神经网络，其内容在这里作为参考。

在硬币分类中的一个重要问题是分离不同面额的困难。所感兴趣的的不同面额的总体分布可能是这样的，它不可能容易地定义正确地分离面额的适当的接受边界。另一个问题是，为了实现正确的分离，需要考虑具有大量元素的特征向量，这使得理解各种分布更加困难，因而使得获得适当的接受边界更加困难。这些问题与数据分析中的一般分类问题相类似已经被研究并且产生了各种不同的技术、包括统计方法。

作为数据分析的统计方法的一个例子，主分量分析（“PCA”）是这样一种方法，通过这种方法，采用线性变换将在一个空间中表达的数

据变换成一个新空间，其中，数据中的大多数变化可以用比第一空间中更少的维数来表示。PCA 方法涉及找到变量的协方差矩阵的本征向量和本征值。本征向量是在新空间中的轴，本征向量具有作为第一“主分量”的最高本征值，按递减大小依此类推。PCA 的细节可以在关于多元分析的教科书中找到，例如 Chatfield 和 Collins 的“多元分析导论”第 4 章。

用于分类目的的数据分析的另一种方法是线性判别式分析 (“LDA”)。LDA 在已知数据落入分开的组中时是有用的。LDA 的目标是将数据变换成一个新空间，以便使每个数据组的中心之间的距离在投影到新空间的轴上时最大，还使每个组沿轴的方差最小。例如，在 Fukunaga 的“统计模式识别导论” (“Fukunaga”) 中描述了这种方法。在一个例子中，通过找到一个使 $C^{-1}V$ 的轨迹值最大的线性变换来执行最大化，其中 V 是类间协方差矩阵， C 是所有样本的协方差矩阵。如 Fukunaga 中所解释的，这实际上是找到 $C^{-1}V$ 的本征向量和本征值。本征向量是新空间的轴。如论文中所述的，当有 N 个类时，新空间具有 $N-1$ 维。

在许多情况下，PCA 或 LDA 都不能对数据组给出正确的分离。数据分析的另一种方法是基于 PCA 的非线性分量分析 (NCA)。在 NCA 中，采用非线性映射将数据投影在一个新空间中，然后在新空间中执行 PCA。在 Neural Computation 10, 1299-1319 (1998) 由 Bernhard Scholkopf, Alexander Smola 和 Klaus-Robert Muller 的 “Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue problem” 文章中给出了 NCA 的细节。(“Scholkopf”.)

NCA 的问题在于，非线性空间的维数可能非常大，因此主分量的数量也非常大。对于一给定问题，不知道对于一个好的分类需要多少主分量。

在总体上，本发明涉及一种导出用于对货币物品分类的分类的方法，该方法包括：测量每个类别的已知样本，并从所测量样本导出特征向量，将特征向量映射到对不同类别有更清楚的分离的第二空间中，并采用第二空间中的分离导出一个分离函数。

更具体地，本发明提供了一种导出用于将货币物品分类成两个或多个类别的分类器的方法，包括：测量每个类别的已知样本，并从所

测量样本导出特征向量，选择一个对应于特征向量空间到第二空间的映射的函数，将特征向量映射到图象向量，并在第二空间中导出表示 $N-1$ 个轴的系数，其中 N 是类别数，获得表示所测量样本的图象向量到 $N-1$ 个轴上的投影的值，并采用这些值来导出一个与第二空间中的分离函数等效的用于分离类别的分离函数。

本发明还提供了一种用于对货币物品分类的方法，包括：测量物品特征，从测量值产生一个特征向量，并采用根据权利要求 1 至 6 中的任何一个的方法导出的分类器来对物品分类。

本发明还提供了一种用于对货币物品分类的设备，包括：用于测量货币物品特征的测量装置，用于从测量值产生一个特征向量的特征向量产生装置，以及，采用根据权利要求 1 至 6 中的任何一个的方法导出的分类器来对物品分类的分类装置。

本发明还提供了一种用于对货币物品分类的设备，包括：用于测量货币物品特征的测量装置，用于从测量值产生一个特征向量的特征向量产生装置，以及，分类装置，采用一个对应于特征向量空间到第二较高维空间的非线性映射的，从而将特征向量映射到图象向量函数，和代表第二空间中的 $N-1$ 个轴的系数，以及一个等效于第二空间中的分离函数的函数来对物品分类，其中 N 是可以由所述设备分类的类别数。

下面将参考附图说明本发明的实施例，其中：

图 1 是一个分类系统的方框图。

图 2 是显示一个硬币数据分布的图表；以及

图 3 是显示图 2 的数据到新轴上的投影的图表。

下面将参考一个硬币确认器来描述本发明。

在图 1 中，方框 1 代表一个测量系统，该测量系统包括入口 2、以用于展示样本 3 的硬币入口和硬币传送路径（未显示）形式的传送系统以及用于测量样本的物理量的传感器系统（未显示）。测量系统 1 通过数据总线 5 连接到一个处理系统 4。处理系统 4 通过数据总线 7 连接到一个分类器 6。分类器 6 的输出通过数据输出总线 9 连接到一个使用系统 8。使用系统 8 在这个例子中是一个自动售货机，但例如也可以是货币兑换机。

测量系统 1 测量插入的硬币 3 的特征。由处理系统 4 将测量的特

征汇集成一个具有 n 个元素的特征向量，每个元素对应于由系统 4 处理的一个测量特征。在本实例中，传感器系统采用已知技术（例如，参见 GB2 254 949A）测量表示插入的硬币的材料、厚度和直径的值，这些值是相应的特征向量的三个元素。简言之，每个传感器包括自振荡电路中的一个或多个线圈。在直径和厚度传感器的情况下，由所插入硬币的邻近所引起的每个线圈的电感的变化使得振荡器的频率改变，从而可以导出硬币的相应特性的数字表示。在电导传感器的情况下，由所插入硬币的邻近所引起的线圈的 Q 的变化使得通过线圈的电压改变，从而可以导出硬币的导电性的数字表示。虽然将每个线圈的结构、定位和朝向以及加到其上的电压的频率安排为使得线圈提供一个主要取决于导电性、直径和厚度特性中之一的一特定特性的输出，但应该理解，每个测量都可以由其他硬币特性在某种程度上所影响。

当然，许多表示货币物品的不同特征可以被测量并用作特征向量的元素。例如，在纸币的情况下，所测量特征例如可以包括纸币的宽度、纸币的长度以及从整个或部分纸币反射或发射的光的强度。例如，可以将一个测量系统安排为采用光传感器沿 N 条线扫描一个纸币。每个扫描线包含 L 个顺序扫描的单个区域。在每个区域，有 M 个不同特征的测量。更具体地，对于每个区域，对红、绿和红外射线的反射强度作出测量。因此，纸币的测量总数是 $L \times M \times N$ 。这些测量形成了相应样品的特征向量的分量，因此特征向量具有 $L \times M \times N$ 个分量。或者，可以以不同的方式处理测量，以获得一个表示所测量样品的特征向量。例如，可以为每个所测量区域形成由该区域的 M 个测量构成的局部特征向量，因此每个局部特征向量具有 M 个分量。然后可以在整个纸币区域上将局部特征向量相加，以获得表示整个样品的 M 维特征向量。

然后将特征向量输入到分类器 6。分类器 6 采用特征向量和包括一个分离函数的预定分类标准来判定样本是否属于任何一个预定类别。如果将样本识别为属于纸币的一个可接受面额，则接受该纸币，并记入纸币的相应值。如果将样本识别为属于一个已知的伪币组，则拒绝该纸币。

在这个例子中，系统用于对硬币的两种面额和一种已知的伪币进行分类。在图 2 中显示了测量空间中的分布的二维表示。十字叉表示第一种面额的样本，圆点表示第一种面额的伪币，圆圈表示第二种面

额的样本。

下面在总体意义上说明分离函数的推导。然后也在总体意义上说明分类方法，随后解释总体方法在特定例子上的应用。

简言之，依据本发明的一个实施例的用于导出一个分离函数的方法采用一个非线性映射将作为所测量的特征向量的空间的输入空间映射成一个具有线性特性的更高维空间。采用训练数据、采用映射空间中的 LDA 分析的等效物在映射空间中构造分离超平面。

如同下面所讨论的，分析面额的总体分布。

最初，测量每个所感兴趣的面额和每个已知伪币的样本，并形成相应的特征向量。例如，在一个 n 维发散图（其中 n 是所测量特征的数目）上绘制时，来自样本的特征向量粗略地落入通常称为群集（cluster）的各个组中。然后将这些测量样本用于导出一个分离函数，如下所述。在这个例子中，使用每种面额有 50 个样本，伪币有 50 个样本。

在进一步的说明之前，提供对符号的总体说明。

输入空间、即特征向量空间被定义为 X 。

$X = \bigcup_{l=1}^N X_l$ ，其中 N 是群集数。子空间 X_l 的基数由 n_l 表示， X 中的元素数是 M 。因此， $\sum_{l=1}^N n_l = M$ 。 x^t 是向量 x 的转置。

在输入空间中， C 是协方差矩阵，并且，

$$C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M x_j x_j^t \quad (1)$$

本发明的方法采用一个定义映射空间中的点积的核函数 k 。假设 ϕ 是将 X 映射进一个希尔伯特 Hilbert 空间 F 的非线性函数。

$$\begin{aligned} \phi: X &\rightarrow F \\ x &\rightarrow \phi(x) \end{aligned} \quad (2)$$

并且 $k(x, y) = \phi(x) \bullet \phi(y) = \phi^t(x) \phi(y)$

从下面的讨论中可以看出，显然不需要为一给定 k 构造 ϕ ，虽然可以用 Mercer 定理显示出，如果对于任何 k 是一个为正的正整数算子的连续核心，则存在一个 ϕ （参见 Scholkopf 部分 3 和附录 C）。也不需要明确地执行 F 中的点积， F 可以是一个无限维空间。

在 F 中， V 是协方差矩阵，并且

$$V = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(x_j) \phi'(x_j) \quad (3)$$

我们假设集中在 F 中的观察, 即, $\sum_{j=1}^M \phi(x_j) = 0$ 。后面将描述一个集中数据的方法。

B 是群集中心的协方差矩阵, 并且

$$B = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N n_l \overline{\phi_l \phi_l'} \quad (4)$$

其中, $\overline{\phi_l}$ 是分组 1 的平均值, 即

$$\overline{\phi_l} = \frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \quad (5)$$

其中, x_{lj} 是分组 1 的元素 j 。

B 代表 F 中的群集间惯性。

V 也可以用群集表示为

$$V = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \phi'(x_{lk}) \quad (6)$$

V 代表 F 中的总惯性。

使 $k_{ij} = k(x_i, x_j)$

并且 $(k_{ij})_{pq} = (\phi'(x_{pi}) \phi(x_{qj}))$

使 K 为由 $(K_{pq})_{\substack{p=1 \dots N \\ q=1 \dots N}}$ 在群集元素上定义的 (MXM) 矩阵

其中 (K_{pq}) 是群集 p 和群集 q 之间的协方差矩阵,

$$K = (K_{pq})_{\substack{p=1 \dots N \\ q=1 \dots N}}, \text{ 其中 } K_{pq} = (K_{ij})_{\substack{i=1 \dots n_p \\ j=1 \dots n_q}} \quad (8)$$

K_{pq} 是一个 $(n_p \times n_q)$ 矩阵, 并且 K 是对称的, 所以 $K'_{pq} = K_{pq}$ 。

W 是矩阵中心, 并且

$$W = (W_l)_{l=1 \dots N} \quad (9)$$

其中 W_l 是所有项都等于 $\frac{1}{n_l}$ 的 $(n_l \times n_l)$ 矩阵。 W 是 $M \times M$ 块对角矩阵。

该方法实质上执行了映射空间 F 中的线性判别分析, 以使得群集

间惯性最大并且群集内惯性最小。这等效于本征值求解，如 Fukunaga 中所示。然后可以导出一个适当的分离函数。

更具体地，本方法涉及找到满足下式的本征值 λ 和本征向量 v ，

$$\lambda Vv = Bv \quad (10)$$

本征向量是 F 的元素的线性组合，因此存在着系数 α_{pq} ($p=1\dots N$, $q=1\dots n_p$)，使得

$$v = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \phi(x_{pq}) \quad (11)$$

等式 (10) 的本征向量与

$$\lambda \phi'(x_{ij}) Vv = \phi'(x_{ij}) Bv \quad (12)$$

的本征向量相同 (参见 Scholkopf)。

采用 K 和 W 的定义以及等式 (6) 和 (11)，可以将 (12) 的左式表示如下：

$$\begin{aligned} Vv &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \phi'(x_{lk}) \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \phi(x_{pq}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) [\phi'(x_{lk}) \phi(x_{pq})] \\ \lambda \phi'(x_{ij}) Vv &= \frac{\lambda}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \phi'(x_{ij}) \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) [\phi'(x_{lk}) \phi(x_{pq})] \\ &= \frac{\lambda}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} [\phi'(x_{ij}) \phi(x_{lk})] [\phi'(x_{lk}) \phi(x_{pq})] \end{aligned}$$

采用所有分组 i 和所有元素 j 的这个公式我们获得：

$$\lambda (\phi'(x_{i1}), \dots, \phi'(x_{i n_q}), \dots, \phi'(x_{ij}), \dots, \phi'(x_{i N_1}), \dots, \phi'(x_{i N_{n_N}})) Vv = \frac{\lambda}{M} K K \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \alpha &= (\alpha_{pq})_{\substack{p=1\dots N \\ q=1\dots n_p}} \\ &= (\alpha_{pq})_{p=1\dots N} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \alpha_p = (\alpha_{pq})_{q=1\dots n_p}$$

对于 (14) 的右项，采用等式 (4)、(5) 和 (11)：

$$\begin{aligned}
Bv &= \frac{1}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \phi(x_{pq}) \sum_{p=1}^N n_l \left[\frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \right] \left[\frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \right]' \\
&= \frac{1}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \sum_{l=1}^N \left[\sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \right] \left[\frac{1}{n_l} \right] \left[\sum_{k=1}^{n_l} \phi'(x_{lk}) \phi(x_{pq}) \right] \\
\text{和 } \phi'(x_{ij}) Bv &= \frac{1}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \sum_{l=1}^N \left[\sum_{k=1}^{n_l} \phi'(x_{ij}) \phi(x_{lk}) \right] \left[\frac{1}{n_l} \right] \left[\sum_{k=1}^{n_l} \phi'(x_{lk}) \phi(x_{pq}) \right]
\end{aligned}$$

对于所有群集 i 和所有元素 j 我们获得:

$$(\phi'(x_{11}), \dots, \phi'(x_{1n_1}), \dots, \phi'(x_{ij}), \dots, \phi'(x_{N1}), \dots, \phi'(x_{Nn_N})) Bv = \frac{1}{M} KWK\alpha \quad (14)$$

合并 (13) 和 (14) 我们获得:

$$\begin{aligned}
\lambda KK\alpha &= KWK\alpha \\
\text{因此, } \lambda &= \frac{\alpha' KWK\alpha}{\alpha' KK\alpha} \quad (15)
\end{aligned}$$

K 可以分解为 $K=QR$ (Wilkinson, 1971), 因此 $K\alpha = QR\alpha$.

R 是上三角, Q 是正交的, 即 $Q^t Q = I$.

Q 是 $M \times r$ 矩阵, R 是 $r \times M$ 矩阵, 其中 r 是 K 的秩。已知对于一个普通的矩形矩阵来说, QR 分解总是存在的。

$$\text{然后, 使 } R\alpha = \beta \quad (16)$$

由于 R 的行是线性独立的, 所以对于一给定 β , 存在至少一个 α 解。

因此, $K\alpha = Q\beta$, 并且, $\alpha^t K = \beta^t Q^t$ (K 是对称的)。

替换 (15)

$$\lambda = \frac{\alpha' KWK\alpha}{\alpha' KK\alpha} \quad (17)$$

$$Q \text{ 是正交的, 所以 } \lambda\beta = Q'WQ\beta \quad (18)$$

等式 (18) 是标准本征值等式的形式。由于 K 是奇异的, 所以 QR 分解允许在子空间 $Q\beta$ 上工作, 这简化了求解。

之后系数 α 能据等式 (16) 从 β 导出, 而本征向量从等式 (11) 导出。

通过要求 F 中相应的向量 v 被标准化来将这些系数 α 标准化。即:

$$v'v = 1 \quad (19)$$

或 (从等式 11)

$$\begin{aligned}
 VV &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \sum_{l=1}^N \sum_{h=1}^{n_l} \alpha_{pq} \alpha_{lh} \phi'(x_{pq}) \phi(x_{lh}) = 1 \\
 &= \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^N \alpha'_p K_{pl} \alpha_l = 1 \\
 &= \alpha' W \alpha
 \end{aligned}$$

$$\text{因此, (19) } = \alpha' K \alpha = 1 \quad (20)$$

上面给出的步骤展示了如何找到等式 (10) 的本征值 v 。

从线性判别分析 (例如, 参见 Fukunaga) 可知, 本征向量数 = $N-1$, 其中 N 是群集数。通过本征向量上的投影找到由本征向量跨越的子空间中的群集的图象。这是采用下列等式完成的:

$$\begin{aligned}
 (\phi'(x)v) &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} \phi'(x_{pq}) \phi(x) \\
 &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \alpha_{pq} k(x_{pq}, x)
 \end{aligned} \quad (21)$$

从上面可以看出, 计算不需要关于 ϕ 的知识, 或不需要计算 F 中的点积。

在实验中已经显示出, 通过使用合适的核函数, 将本征向量子空间中的群集的图象很好地分离, 更具体地, 可以是线性可分离的, 即, 它们可以由线、平面或超平面分离。

则可以容易地导出一个合适的分离函数, 采用已知技术、例如检查、平均、Mahalanobis 距离、与 k 个最近的邻近值比较来对测量物品分类。

如上所述, 假设观察在 F 中的中心。下面将更详细地讨论居中。首先, 对于一给定观察 x_{ij} : 群集 i 的元素 j , 根据下式将图象 $\phi(x_{ij})$ 居中:

$$\tilde{\phi}(x_{ij}) = \phi(x_{ij}) - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \quad (22)$$

然后, 我们必须以居中心定义协方差矩阵 K : 对于一给定分组 p 和 q ,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{k}_{ij}) &= (\tilde{\phi}(x_{pi}) \cdot \tilde{\phi}(x_{qj})) \\
 \tilde{k}(x_{ij})_{pq} &= \left[\phi(x_{pi}) - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \phi(x_{lk}) \right] \left[\phi(x_{qj}) - \frac{1}{M} \sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^{n_m} \phi(x_{hm}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}(x_{ij})_{pq} &= k(x_{ij})_{pq} - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} (l_{ik})_{pq} (k_{kj})_{lq} - \frac{1}{M} \sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^{n_m} (k_{im})_{ph} (l_{mj})_{hq} \\ &+ \frac{1}{M^2} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^{n_m} (l_{ik})_{pl} (k_{km})_{lk} (l_{mj})_{hq} \\ \tilde{K}_{pq} &= K_{pq} - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^N l_{pl} K_{lq} - \sum_{h=1}^N K_{ph} l_{hq} + \frac{1}{M^2} \sum_{l=1}^N \sum_{h=1}^N l_{pl} K_{lh} l_{hq} \\ \tilde{K} &= K - \frac{1}{M} l_N K - \frac{1}{M} K l_N + \frac{1}{M^2} l_N K l_N\end{aligned}$$

其中，我们已经引入下列矩阵：

$l_{pl} = (l_{ik})_{i=1, \dots, n_p, k=1, \dots, n_l, (n_p \times n_l)}$ 矩阵，其元素全部等于 1。

$l_N = (l_{pl})_{p=1, \dots, N, l=1, \dots, N, (M \times M)}$ 矩阵，其元素是块矩阵。

因此，对于未居中的点 $\phi(x_{ij})$ ，我们可以从 K 导出 $\tilde{K}$ ，然后求解 $\tilde{K}$ 的本征向量。然后，对于特征向量 x ， x 的居中 ϕ 图象在本征向量 $\tilde{v}$ 上的投影由下式给出：

$$(\tilde{\phi}'(x)v) = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \tilde{\alpha}_{pq} \tilde{\phi}'(x_{pq}) \tilde{\phi}(x)$$

上述讨论在一般意义上展示了总体判决分析的方法。下面将参考硬币确认器的具体例子来说明一般原理。

返回在说明书的开始的硬币确认器的例子，每个特征向量具有三个元素，有三个群集，分别对应于所感兴趣的两个面额和已知伪钞的每一个。

将每个面额的 50 个样本和伪钞的 50 个样本输入到测量系统 1。如上所述，传感器系统测量样本，以获得表示每种情况下的厚度、材料和直径的值。从每个样本的所测量特征形成相应的特征向量。

从每个群集的 50 个样本特征向量，随机地选择 37 个用于产生分离函数。

然后选择一个核函数。在试错法的基础上选择核函数，以便选择给出最佳分离结果的函数。有大量的满足 Mercer 定理的核函数是合适的。核函数的例子是多项核：

$$k(x, y) = (x \cdot y)^d;$$

高斯核：

$$k(x, y) = \exp \frac{\|x - y\|^2}{\sigma^2};$$

hyberbolic 切线核:

$$k(x, y) = \tanh((x, y) + \theta); \text{ 以及}$$

S 形核:

$$k(x, y) = \left(\frac{1}{1 + e^{-(x, y) - \theta}} \right).$$

在这个例子中, 使用了高斯核, 其中 $\sigma^2 = 0.01$.

采用所选择的样本和核函数, 计算出矩阵 K 和 W (等式 (8) 和 (9)).

然后采用 QR 分解来分解 K.

然后, 计算本征向量 β 和相应的本征向量 (等式 (18)).

然后, 计算系数 α 并进行标准化 (等式 (16) 和 (20)).

然后, 将每个群集的剩余的 13 个样本的特征向量投影到本征向量 v (等式 12), 并将结果绘制在一个图上, 以便容易检查。在这个例子中, 有 3 个群集, 因此有 2 个本征向量, 并且分离在第二空间中。这在图 3 中显示。可以看出, 群集被很好地分离。更具体地, 将每个群集投影到一个作为重心的点上。然后分析带有本征向量的群集的投影的分离, 并用于导出一个分离函数。在这个例子中, 线性分离函数可以通过检查容易地导出。例如, 合适的分离函数是:

对于本征向量 v_1, v_2 , 以及输入向量 x ,

如果 $[(\phi'(x)v_1) > 0 \quad \text{and} \quad (\phi'(x)v_2) > 0]$ 则

x 属于组 1 (即, 它是第一面额);

如果 $[(\phi'(x)v_1) > 0 \quad \text{and} \quad (\phi'(x)v_2) < 0]$

则 x 属于组 2 (即, 它是第二面额); 以及

如果 $[(\phi'(x)v_1) < 0 \quad \text{and} \quad (\phi'(x)v_2) > 0]$

则 x 属于组 3 (即, 它是第一面额的伪钞)。

未知面额的硬币的执行的执行如下。感测插入的硬币, 并获得表示样本的材料、厚度和直径的测量。然后从测量值导出一个特征向量。然后将特征向量投影到计算出的本征向量上 (采用等式 21), 并根据投影值和分离函数对硬币分类, 如上所述。

初始数据分析的样本值的分离和分离函数的导出例如可以采用一

个微处理器来完成。同样，分类器 6 可以是一个微处理器。

或者，分类器 6 可以是一个神经网络，例如概率神经网络或感知器。例如，神经网络可以包括 $N-1$ 个线性输出神经元和 M 个隐藏神经元，其中，每个核计算是一个隐藏神经元。然后，输入加权是值 x_{pq} ，系数 α 是隐藏神经元和输出层之间的加权。

并且，分类器可以是线性分类器或支持向量机。

上述实施例的方法同样可应用于纸币，事实上还可应用于其他物品分类。其他求解 (10) 方法、例如采用本征向量分解来分解 K 也是可以的。

在该实施例中，采用到更高维空间的非线性映射。也可以使用线性映射来代替。并且，映射可以一个较低维空间，或者是与特征向量空间相同维数的空间。

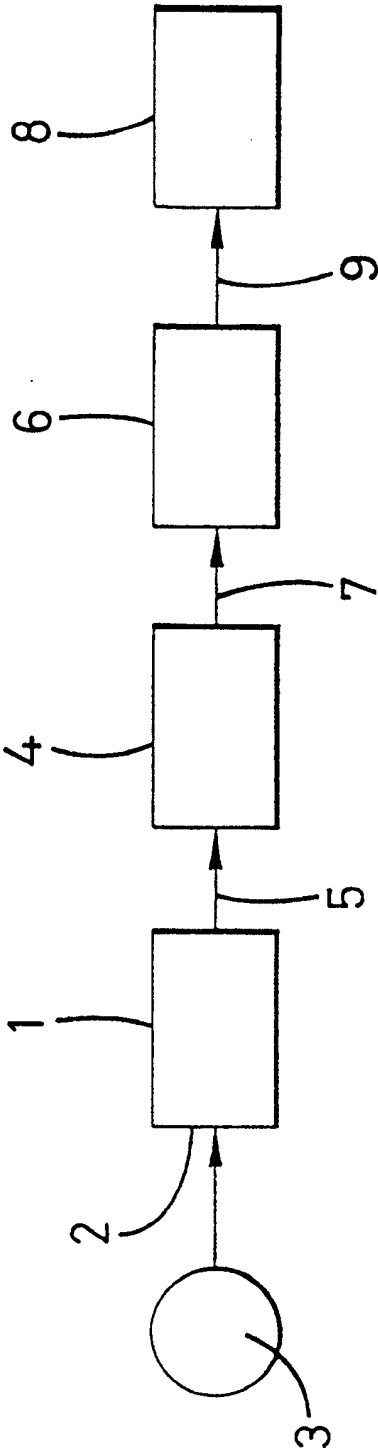


图 1

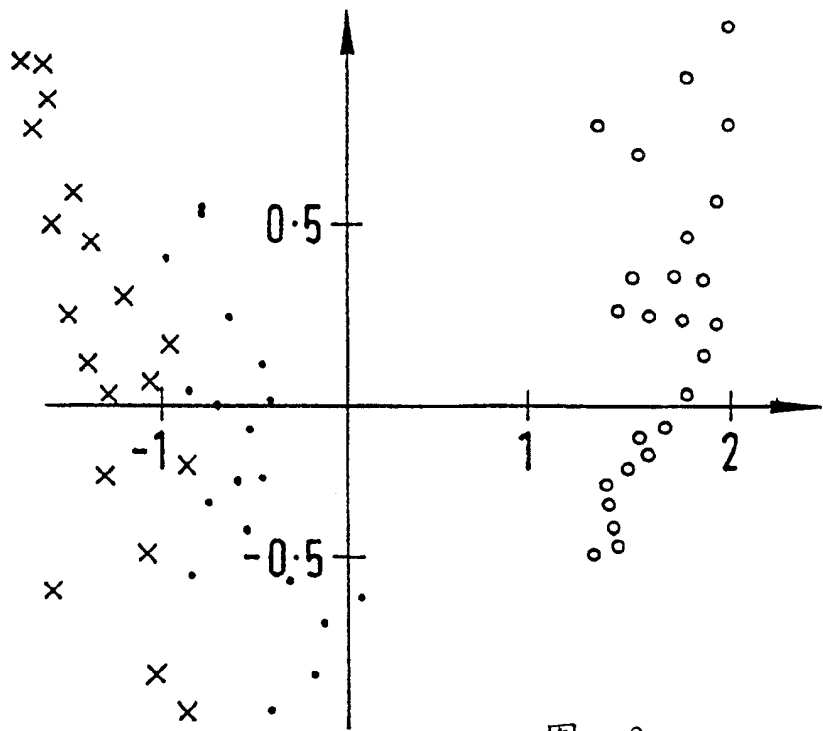


图 2

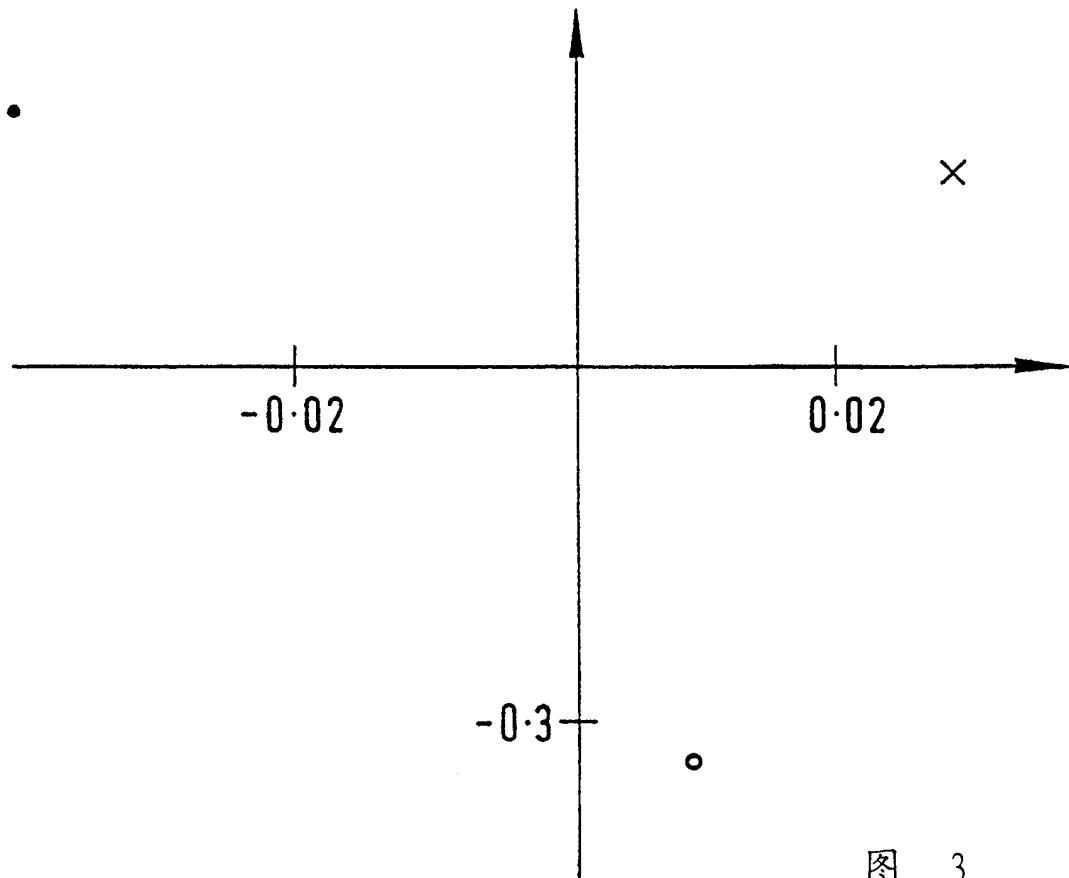


图 3