(12) 按照专利合作条约所公布的国际申请

(19) 世界知识产权组织
国 际 局

(43) 国际公布日
2018 年 11 月 1 日 (01.11.2018)

WIPO | PCT

(10) 国际公布号
WO 2018/196098 A1

(51) 国际专利分类号:
G06F 17/15 (2006.01)

(21) 国际申请号: PCT/CN2017/086830

(22) 国际申请日: 2017 年 6 月 1 日 (01.06.2017)

(25) 申请语言: 中文

(26) 公布语言: 中文

(30) 优先权:
201710307000.X 2017年4月26日 (26.04.2017) CN

(71) 申请人: 中 南 大 学 (CENTRAL SOUTH UNIVERSITY) [CN/CN]; 中国湖南省长沙市岳麓区麓山南路932号, Hunan 410083 (CN)。

(72) 发明人: 张 国 祥 (ZHANG, Guoxiang); 中国湖南省长沙市岳麓区麓山南路 932 号, Hunan 410083 (CN)。 张 帆 航 (ZHANG, Fanhang); 中国湖南省长沙市岳麓区麓山南路 932 号, Hunan 410083 (CN)。

(74) 代理人: 长 沙 朕 扬 知 识 产 权 代 理 事 务 所 (普 通 合 伙) (CHANGSHA ZONEYOUNG INTELLECTUAL PROPERTY AGENCY (GENERAL PARTNERSHIP)); 中国湖南省长沙市天心区芙蓉中路三段 266 号弘林大厦 1006 室何湘玲, Hunan 410000 (CN)。

(81) 指定国(除另有指明，要求每一种可提供的国家保护): AE, AG, AL, AM, AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BN, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DJ, DK, DM, DO, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT, HN, HR, HU, ID, IL, IN, IR, IS, JP, KE, KG, KH, KN, KP, KR, KW, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LU, LY, MA, MD, ME, MG, MK, MN, MW, MX, MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PA, PE, PG, PH, PL, PT, QA, RO, RS, RU, RW, SA, SC, SD, SE, SG, SK, SL, SM, ST, SV, SY, TH, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US, UZ, VC, VN, ZA, ZM, ZW。

(84) 指定国(除另有指明，要求每一种可提供的地区保护): ARIPO (BW, GH, GM, KE, LR, LS, MW, MZ, NA, RW, SD, SL, ST, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), 欧亚 (AM,

(54) **Title:** FINITE ELEMENT INTERPOLATION FUNCTION CONSTRUCTION METHOD

(54) **发明名称:** 有限元插值函数构造方法

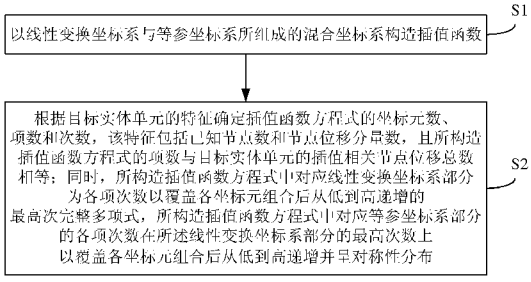


图 1

S1 CONSTRUCT AN INTERPOLATION FUNCTION BY USING A MIXED COORDINATE SYSTEM CONSISTING OF A LINEAR TRANSFORMATION COORDINATE SYSTEM AND AN ISOPARAMETRIC COORDINATE SYSTEM

S2 DETERMINE THE NUMBER OF COORDINATE TUPLES, THE NUMBER OF TERMS, AND A DEGREE OF AN INTERPOLATION FUNCTION EQUATION ACCORDING TO CHARACTERISTICS OF A TARGET ENTITY UNIT, THE CHARACTERISTICS COMPRISING THE NUMBER OF KNOWN NODES AND THE NUMBER OF NODE DISPLACEMENT COMPONENTS, THE NUMBER OF TERMS OF THE CONSTRUCTED INTERPOLATION FUNCTION EQUATION BEING EQUAL TO THE TOTAL NUMBER OF THE INTERPOLATION RELATED NODE DISPLACEMENTS OF THE TARGET ENTITY UNIT, AND MOREOVER, THE CORRESPONDING LINEAR TRANSFORMATION COORDINATE SYSTEM PART IN THE CONSTRUCTED INTERPOLATION FUNCTION EQUATION BEING A HIGHEST-DEGREE COMPLETE POLYNOMIAL THAT IS INCREMENTAL FROM LOW TO HIGH AFTER EACH COORDINATE TUPLE COMBINATION IS COVERED BY THE DEGREES OF THE TERMS, AND THE DEGREES OF THE TERMS OF THE CORRESPONDING ISOPARAMETRIC COORDINATE SYSTEM PART IN THE CONSTRUCTED INTERPOLATION FUNCTION EQUATION BEING INCREMENTAL FROM LOW TO HIGH AND SYMMETRICALLY DISTRIBUTED AFTER EACH COORDINATE TUPLE COMBINATION IS COVERED ON THE HIGHEST DEGREE OF THE LINEAR TRANSFORMATION COORDINATE SYSTEM PART

(57) **Abstract:** A finite element interpolation function construction method, relating to the technical field of analog simulation. The method comprises: constructing an interpolation function by using a mixed coordinate system consisting of a linear transformation coordinate system and an isoparametric coordinate system (S1); and determining the number of coordinate tuples, the number of terms, and a degree of an interpolation function equation according to characteristics of a target entity unit, the characteristics comprising the number of known nodes and the number of node displacement components, the number of terms of the constructed interpolation function equation being equal to the total number of the interpolation related node displacements of the target entity unit, and moreover, the corresponding linear transformation coordinate system part in the constructed interpolation function equation being a highest-degree complete polynomial that is incremental from low to high after each coordinate tuple combination is covered by the degrees of the terms, and the degrees of the terms of the corresponding isoparametric coordinate system part in the constructed interpolation function equation being incremental from low to high and symmetrically distributed after each coordinate tuple combination is covered on the highest degree of the linear transformation coordinate system part (S2). The method improves the performance of an interpolation function.

WO 2018/196098 A1

[见续页]

AZ, BY, KG, KZ, RU, TJ, TM), 欧洲 (AL, AT, BE, BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR, HU, IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, MK, MT, NL, NO, PL, PT, RO, RS, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, KM, ML, MR, NE, SN, TD, TG)。

本国际公布:
— 包括国际检索报告(条约第21条(3))。

(57) 摘要: 一种有限元插值函数构造方法，涉及模拟仿真技术领域，方法包括：以线性变换坐标系与等参坐标系所组成的混合坐标系构造插值函数（S1）；根据目标实体单元的特征确定插值函数方程式的坐标元数、项数和次数，所述特征包括已知节点数和节点位移分量数，且所构造插值函数方程式的项数与目标实体单元的插值相关节点位移总数相等；同时，所构造插值函数方程式中对应线性变换坐标系部分为各项次数以覆盖各坐标元组合后从低到高递增的最高次完整多项式，所构造插值函数方程式中对应等参坐标系部分的各项次数在所述线性变换坐标系部分的最高次数上以覆盖各坐标元组合后从低到高递增并呈对称性分布（S2）。该方法提高了插值函数的性能。

有限元插值函数构造方法

技术领域

本发明涉及模拟仿真技术领域，尤其涉及一种有限元插值函数构造方法。

背景技术

目前有限元是工程分析和设计必不可少的重要组成部分，有限元计算软件现已广泛应用于结构、固体和流体分析工程的各个领域。事实上，有限元几乎在工程分析的每个领域都得到应用。

在工程或物理问题的数学模型(基本变量、基本方程、求解域和边界条件等）确定以后，有限元法作为对其进行分析的数值计算方法可归纳如下三部分：

（1）将一个表示结构或连续体的求解域离散为若干个子域（单元），并通过它们边界上的结点相互联结成为组合体。该部分为有限元软件的前处理部分，即单元划分部分，该部分的技术已很成熟。

（2）用每个单元内所假设的近似函数来分片地表示全求解域内待求的未知场变量。而每个单元内的近似函数由未知场函数及其导数在单元各个结点上的数值和与其对应的插值函数来表达。该部分即为有限元软件中的有限元插值函数形成部分，有限元插值函数构造难度大，有很多问题还不能构造出满足基本收敛要求的有限元插值函数，一直是有限元研究领域的难题。

同一问题的有限元插值函数构造结果不是唯一，有限元插值函数的选用对有限元软件的计算分析精度影响很大，直接关系到有限元软件计算结果的成败。构造高精度有限元插值函数有三个关键性条件：一是有限元插值函数所用多项式的完备（完整）阶数（次数）越高计算精度越高；二是有限元插值函数在相邻单元公共边界上的位移（含位移的导数）协调，即从相邻单元插值同一公共边界的位移要一致，否则，位移冲突引起能量损失，降低计算精度；三是有限元插值函数要适合曲面（曲线）边界。目前还无法构造能同时满足以上条件的有限元插值函数，构造高阶完备协调的有限元插值函数非常困难。

现有的插值函数的构造一般采用等参坐标法，无论是对于平面实体单元、三维实体单元、平面薄板单元或空间壳单元，都存在计算精度低，适用范围有限且不能兼顾协调性和/或不适应曲线边界等问题。例如：

1)、基于等参坐标法已构造出的 4 节点四边形单元。该单元只有 1 次完备协调，只能满

足有限元计算的基本收敛要求，计算精度低。

2)、基于等参坐标法构已造出的 8 节点曲边四边形单元。该单元节点数增加一倍，但还只具有 1 阶完备协调，只能满足有限元计算的基本收敛要求，计算精度低。当该单元为矩形时，单元能 2 次完备协调，但又不适合曲线边界，使用范围非常有限。

3)、基于等参坐标法已构造出的 12 节点曲边四边形单元。该单元插值函数只有 2 次完备协调，计算精度低。当该单元为矩形时，单元插值函数能 3 次完备协调，但不适合曲线边界，使用范围非常有限。

4)、基于等参坐标法构造出的 8 节点任意六面体单元，当该单元为任意六面体单元时，适合于折线形边界，但单元插值函数只有 1 阶完备性，只能满足有限元计算的基本收敛要求，计算精度低。当该单元为长方体时，单元插值函数能 2 次完备协调，但又不适合于折线形边界，使用范围非常有限。

5)、基于等参坐标法构造出的 20 节点曲面六面体单元，不管该单元为任意六面体单元还是长方体，有限单元插值函数都只有 2 次完备协调，计算精度提高有限。

6)、基于等参坐标法构造出的 32 节点曲面六面体单元，不管该单元为任意六面体单元还是长方体，有限单元插值函数都只有 2 次完备协调，计算精度低。

7)、基于等参坐标法只构造出的 4 节点（w 相关的三节点参数 w,θ_x,θ_y 和四节点参数 $w,\theta_x,\theta_y,\theta_{xy}$ ）三次完备矩形薄板单元位移插值函数，尽管单元位移插值函数的完备阶数较高，但单元边界法向转角位移不协调，也不适合任意折线边界，适用范围非常有限。

8)、基于等参坐标法，还不能构造出二次完备的 4 节点任意四边形薄板单元，更无法解决单元协调问题。

9)、基于等参坐标法，目前只能将平面 4 节点非协调矩形和三角形薄板单元位移插值函数，经坐标变换法用于空间薄壳结构，适用范围非常有限，且不协调。

10)、基于等参坐标法构已造出的三维 8 节点协调低阶完备四边形超参数曲面壳单元位移插值函数和三维 8 节点低阶完备协调曲面四边形相对自由度壳单元位移插值函数。这两种单元位移插值函数协调，厚薄壳结构通用，但只具有 1 阶完备性，计算精度低，当壳的厚度趋向薄曲壳时，存在剪切“锁死”和薄膜“锁死”等问题。

综上，目前结构有限元软件都是基于单一的等参坐标法（或面积坐标法）构造单元求解物理量（位移、温度、流体和电磁等）的插值函数，所构造的单元插值函数不能既高阶完备又协调，即使完备也只是低阶完备，计算精度较低。对于结构问题还没有构造出满足有限元基本收敛要求的高阶完备又协调有限单元插值函数。

发明内容

本发明目的在于公开一种有限元插值函数构造方法，以提高插值函数的性能。

为实现上述目的，本发明公开了一种有限元插值函数构造方法，包括：

以线性变换坐标系与等参坐标系所组成的混合坐标系构造插值函数；

根据目标实体单元的特征确定插值函数方程式的坐标元数、项数和次数，所述特征包括已知节点数和节点位移分量数，且所构造插值函数方程式的项数与目标实体单元的插值相关节点位移总数相等；同时，所构造插值函数方程式中对应线性变换坐标系部分为各项次数以覆盖各坐标元组合后从低到高递增的最高次完整多项式，所构造插值函数方程式中对应等参坐标系部分的各项次数在所述线性变换坐标系部分的最高次数上以覆盖各坐标元组合后从低到高递增并呈对称性分布。

本发明中，可选的，所构造的插值函数包括以下的任意一项或任意组合：

1)、当所述目标实体单元为二维 8 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2;$$

2)、当所述目标实体单元为二维 12 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3;$$

3)、当所述目标实体单元为三维 20 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}u(v,w)&=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_3+a_5T_1^2+a_6T_2^2+a_7T_3^2+a_8T_1T_2+a_9T_1T_3+a_{10}T_2T_3\\&+a_{11}\xi^2\eta+a_{12}\xi^2\zeta+a_{13}\xi\eta^2+a_{14}\eta^2\zeta+a_{15}\xi\zeta^2+a_{16}\eta\zeta^2+a_{17}\xi\eta\zeta\\&+a_{18}\xi^2\eta\zeta+a_{19}\xi\eta^2\zeta+a_{20}\xi\eta\zeta^2\end{aligned};$$

4)、当所述目标实体单元为三维 32 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}u(v,w)&=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_3+a_5T_1^2+a_6T_2^2+a_7T_3^2+a_8T_1T_2+a_9T_1T_3a+a_{10}T_2T_3\\&a_{11}T_1^3+a_{12}T_2^3+a_{13}T_3^3+a_{14}T_1^2T_2+a_{15}T_1^2T_3+a_{16}T_1T_2^2+a_{17}T_2^2T_3+a_{18}T_1T_3^2+a_{19}T_2T_3^2+a_{20}T_1T_2T_3\\&+a_{21}\xi^3\eta+a_{22}\xi^3\zeta+a_{23}\xi\eta^3+a_{24}\eta^3\zeta+a_{25}\xi\zeta^3+a_{26}\eta\zeta^3\\&+a_{27}\xi^2\eta\zeta+a_{28}\xi\eta^2\zeta+a_{29}\xi\eta\zeta^2+a_{30}\xi^2\eta^2+a_{31}\xi^2\zeta^2+a_{32}\eta^2\zeta^2\end{aligned};$$

5)、当所述目标实体单元为二维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备协调任意四边形薄板单元时，相关位移分量分别为 w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3;$$

6)、当所述目标实体单元为二维 4 节点且各节点有 4 个相关位移分量的高阶完备协调任意四边形薄板单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y、θ_{xy}，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}&w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3\\&+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi^2\eta^2+a_{13}\xi\eta^3+a_{14}\xi^3\eta^2+a_{15}\xi^2\eta^3+a_{16}\xi^3\eta^3\end{aligned};$$

7)、当所述目标实体单元为二维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量（w,θ_x,θ_y相关）的高阶完备协调曲边四边形薄板单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}&w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3\\&+a_{11}T_1^4+a_{12}T_1^3T_2+a_{13}T_1^2T_2^2+a_{14}T_1T_2^3+a_{15}T_2^4\\&+a_{16}T_1^5+a_{17}T_1^4T_2+a_{18}T_1^3T_2^2+a_{19}T_1^2T_2^3+a_{20}T_1T_2^4+a_{21}T_2^5\\&+a_{22}\xi^4\eta^2+a_{23}\xi^3\eta^3+a_{24}\xi^2\eta^4\end{aligned};$$

8)、当所述目标实体单元为三维 4 节点高阶完备协调任意四边形平板薄壳单元（其中w,θ_x,θ_y相关）时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases}u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4\xi\eta\\w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3\end{cases};$$

9)、当所述目标实体单元为三维 8 节点高阶完备协调曲线四边形平板薄壳单元（其中w,θ_x,θ_y相关）时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases}u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2\\w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3\\+a_{11}T_1^4+a_{12}T_1^3T_2+a_{13}T_1^2T_2^2+a_{14}T_1T_2^3+a_{15}T_2^4\\+a_{16}T_1^5+a_{17}T_1^4T_2+a_{18}T_1^3T_2^2+a_{19}T_1^2T_2^3+a_{20}T_1T_2^4+a_{21}T_2^5\\+a_{22}\xi^4\eta^2+a_{23}\xi^3\eta^3+a_{24}\xi^2\eta^4\end{cases};$$

其中，上述各方程式中，T_1、T_2、T_3分别为单元曲面内线性变换坐标系中坐标轴，ξ、η、ζ分别为等参坐标系中坐标轴；u、v、w分别对应单元曲面内三个局部坐标方向上的位移，θ_x、θ_y分别为w对单元曲面内局部坐标x、y的偏导数，θ_{xy}为w对x、y二阶交叉偏导数。

本发明中，对于工程上普遍采用的空间薄壳，采用合适的正交曲线坐标及相应的几何方程，根据上述单元的原理，像平面问题一样在空间正交曲线坐标系中直接构造高阶完备协调曲面薄壳单元，计算单元刚度矩阵，再进行空间坐标转换；具体包括：

10)、当所述目标实体单元为三维 4 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元（其中w,θ_x,θ_y

相关）时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4\xi\eta \\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3 \end{cases};$$

11）、当所述目标实体单元为三维 8 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元（其中 w,θ_x,θ_y 相关）时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2 \\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3 \\ +a_{11}T_1^4+a_{12}T_1^3T_2+a_{13}T_1^2T_2^2+a_{14}T_1T_2^3+a_{15}T_2^4 \\ +a_{16}T_1^5+a_{17}T_1^4T_2+a_{18}T_1^3T_2^2+a_{19}T_1^2T_2^3+a_{20}T_1T_2^4+a_{21}T_2^5 \\ +a_{22}\xi^4\eta^2+a_{23}\xi^3\eta^3+a_{24}\xi^2\eta^4 \end{cases};$$

其中，上述各方程式中，T_1、T_2、T_3分别为单元曲面内线性变换坐标系中坐标轴，ξ、η、ζ 分别为等参坐标系中坐标轴；u、v、w 分别对应单元曲面内三个局部坐标方向上的位移，θ_x、θ_y 分别为 w 对单元曲面内局部坐标 x、y 的偏导数，θ_{xy} 为 w 对 x、y 二阶交叉偏导数。

优选的，对于曲线坐标系上的壳单元，本发明中还在位移模式中补充完整的刚体位移。

进一步的，当目标实体单元为二维 4 节点高阶完备协调任意四边形薄板单元、二维 8 点高阶完备协调曲边四边形薄板单元、三维 4 点高阶完备协调任意四边形平板薄壳单元、三维 8 点高阶完备协调曲边四边形平板薄壳单元、三维 4 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元或三维 8 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元时，按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\begin{aligned} \Delta w=&-\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)+\frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta) \\ &+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)-\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi) \end{aligned};$$

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$ 为单元四个边界的非协调法向转角位移，且该非协调法向转角位移在节点处为零。

可选的，本发明整体坐标系与线性坐标系变换的变换公式可为：

二维情况下，$\begin{cases} T_1=o_1x+b_1y+c_1 \\ T_2=o_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$；坐标变换关系中有 6 个待定系数 $o_i,b_i,c_i,(i=1,2)$ 由变换 6 个为 0 或 1 的线性变换坐标值的方程组确定。

三维情况下，$\begin{cases} T_1 = o_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ T_2 = o_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ T_3 = o_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases}$：坐标变化关系有12个待定系数$o_i, b_i, c_i, d_i, (i = 1,2,3)$

由变换12个为0或1的线性变换坐标值的方程组确定。

可选的，本发明整体坐标系与等参系变换的变换公式可为：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}。$$

基于上述所构造的插值函数，然后有限元通过和原问题数学模型(基本方程、边界条件）等效的变分原理或加权余量法，建立求解基本未知量（场函数的结点值）的代数方程组或常微分方程组，求解方程组即可得问题解答。该部分即为代数方程组或常微分方程组组装和求解，该部分的技术也很成熟，已有标准定型的求解模块。藉此，本发明具有以下有益效果：

基于线性变换坐标与等参坐标混合坐标法，而不是基于单一坐标系统构造求解物理量的插值函数，可使有限元分析软件的计算精度大幅度提高，提高结构设计的安全可靠性，优化结构设计，更能适应各种曲面（曲线）边界，从而为工程、航空和航天等建设带来巨大的经济效益。

下面将参照附图，对本发明作进一步详细的说明。

附图说明

构成本申请的一部分的附图用来提供对本发明的进一步理解，本发明的示意性实施例及其说明用于解释本发明，并不构成对本发明的不当限定。在附图中：

图1是本发明优选实施例公开的有限元插值函数构造方法流程图；

图2（a）是平面线性变换坐标系统中的整体坐标系示意图；图2（b）是平面线性变换坐标系统中线性变换坐标的示意图；

图3（a）是空间线性变换坐标系统中的整体坐标系示意图；图3（b）是空间线性变换坐标系统中线性变换坐标的示意图；

图4（a）是8节点曲边四边形单元的整体坐标系示意图；图4（b）是8节点曲边四边形单元的等参坐标系示意图；图4（c）是8节点曲边四边形单元的线性变换坐标系示意图；

图5（a）是12节点曲边四边形单元的整体坐标系示意图；图5（b）是12节点曲边四边形单元的等参坐标系示意图；图5（c）是12节点曲边四边形单元的线性变换坐标系示意图；

图6（a）是20节点曲边四边形单元的整体坐标系示意图；图6（b）是20节点曲边四边

形单元的等参坐标系示意图；图 6（c）是 20 节点曲边四边形单元的线性变换坐标系示意图；

图 7（a）是 32 节点曲边四边形单元的整体坐标系示意图；图 7（b）是 32 节点曲边四边形单元的等参坐标系示意图；图 7（c）是 32 节点曲边四边形单元的线性变换坐标系示意图；

图 8（a）是 4 节点曲边四边形薄板单元的整体坐标系示意图；图 8（b）是 4 节点曲边四边形薄板单元的等参坐标系示意图；图 8（c）是 4 节点曲边四边形薄板单元的线性变换坐标系示意图；

图 9（a）是 8 节点曲边四边形薄板单元的整体坐标系示意图；图 9（b）是 8 节点曲边四边形薄板单元的等参坐标系示意图；图 9（c）是 8 节点曲边四边形薄板单元的线性变换坐标系示意图；

图 10（a）是空间 4 节点四边形薄壳单元的整体坐标系示意图；图 10（b）是空间 4 节点四边形薄壳单元的等参坐标系示意图；图 10（c）是空间 4 节点四边形薄壳单元的线性变换坐标系示意图；

图 11（a）是空间 8 节点四边形薄壳单元的整体坐标系示意图；图 11（b）是空间 8 节点四边形薄壳单元的等参坐标系示意图；图 11（c）是空间 8 节点四边形薄壳单元的线性变换坐标系示意图；

图 12（a）是空间 4 节点四边形曲面薄壳单元的整体、局部和曲线坐标系示意图；图 12（b）是空间 4 节点四边形曲面薄壳单元的等参坐标系示意图；图 12（c）是空间 4 节点四边形曲面薄壳单元的线性变换坐标系示意图；

图 13（a）是空间 8 节点四边形曲面薄壳单元的整体、局部和曲线坐标系示意图；图 13（b）是空间 8 节点四边形曲面薄壳单元的等参坐标系示意图；图 13（c）是空间 8 节点四边形曲面薄壳单元的线性变换坐标系示意图。

具体实施方式

以下结合附图对本发明的实施例进行详细说明，但是本发明可以由权利要求限定和覆盖的多种不同方式实施。

实施例 1

如图 1 所示，本实施例公开的有限元插值函数构造方法包括：

步骤 S1、以线性变换坐标系与等参坐标系所组成的混合坐标系构造插值函数。

线性坐标变换系统即两直角坐标系统的变换关系为线性，等参坐标变换系统为非线性坐标变换系统。已有在曲面薄壳单元上的正交曲面坐标变换系统相当于一般结构单元的整体坐标系统，也可以变换为线性变换坐标系统。

线性变换坐标变换系统的贡献：一是能将单元变为有一直角面（线）形状单元，使部分单元节点坐标值变为简单的 0 和 1，从而达到降低有限元插值函数构造难度和提高计算精度目的；二是使多项式的完备阶数经坐标变换不升高，有限元插值函数多项式在变换后的坐标系统是几次完备多项式，在整体坐标系统就有几次完备多项式，从而使得构造高阶完备的有限元插值函数成为可能。

线性变换坐标系统分平面线性变换坐标系统和空间线性变换坐标系统。

（a）、针对平面线性变换坐标系统，设坐标变换关系为：

$$\begin{cases} T_1 = o_1 x + b_1 y + c_1 \\ T_2 = o_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases};$$

单元经过坐标变换后的形状如图 2（a）及图 2（b）所示，四边形单元一个角点位于坐标原点，两个角点位于坐标轴上。坐标变换关系中有 6 个待定系数$o_i, b_i, c_i, (i = 1,2)$，可变换 6 个为 0 或 1 的线性变换坐标值。

（b）、针对空间线性变换坐标系统，设坐标变化关系为：

$$\begin{cases} T_1 = o_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ T_2 = o_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ T_3 = o_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases};$$

单元经过坐标变化后的形状如图 3（a）及图 3（b）所示，六面体单元一个角点位于坐标原点，三个角点位于坐标轴上。坐标变化关系有 12 个待定系数$o_i, b_i, c_i, d_i, (i = 1,2,3)$，可变换 12 个为 0 或 1 的线性变换坐标值。

另一方面，该步骤中，整体坐标系与等参系变换的变换公式为：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}。$$

步骤 S2、根据目标实体单元的特征确定插值函数方程式的坐标元数、项数和次数，该特征包括已知节点数和节点位移分量数，且所构造插值函数方程式的项数与目标实体单元的插值相关节点位移总数相等；同时，所构造插值函数方程式中对应线性变换坐标系部分为各项次数以覆盖各坐标元组合后从低到高递增的最高次完整多项式，所构造插值函数方程式中对应等参坐标系部分的各项次数在所述线性变换坐标系部分的最高次数上以覆盖各坐标元组合后从低到高递增并呈对称性分布。

特殊情况下，如果对应线性变换坐标系部分的各项总数刚好等于所构造插值函数方程式的总项数，所构造插值函数方程式中将不出现等参坐标系部分。

藉此，本实施例基于线性变换坐标与等参坐标混合坐标系统构造有限元插值函数。在有限单元插值多项式的选择中，有限单元插值多项式的完备项使用线性变换坐标，而多余项使用等参坐标。将线性变换坐标用等参坐标表示，再代入有限单元插值多项式，所得等参坐标表示的多项式次数不高于有限单元插值多项式的完备阶数，从而保证有限元插值函数在单元边界上具有C^0阶协调，否则，如果有限单元插值多项式存在非完备项，且不用等参坐标替换，将不能保证有限元插值函数在单元边界上C^0阶协调，更不可能保证有限元插值函数在单元边界上C^1阶协调。从而，非常巧妙地解决构造高阶完备有限元插值函数而导致不协调的难题。

下面针对各目标实体单元的构造函数分数如下：

1)、如图 4（a)、图 4（b）及图 4（c）所示，当目标实体单元为二维 8 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造单元位移插值函数为：

$u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2$。

下述各方程式中，T_1、T_2、T_3分别为单元曲面内线性变换坐标系中坐标轴，ξ、η、ζ分别为等参坐标系中坐标轴；u、v、w分别对应单元曲面内三个局部坐标方向上的位移，θ_x、θ_y分别为w对单元曲面内局部坐标x、y的偏导数，θ_{xy}为w对x、y二阶交叉偏导数；且下述各情况中，对应$u(v)$、$u(v,w)$的插值相关节点位移总数与已知节点数相等，对应w的插值相关节点位移总数为已知节点数与相关位移分量的乘积，后续不再赘述。

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数a_1~a_8，其具有 2 阶完备性，8 节点四边形单元也只能具有 2 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 1 阶。单元位移插值函数的完备性提高 1 次，其收敛性能和抗畸变性能会有非常大的提高。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该公共边界即协调，与单元其它边界形状无关，因此，在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由外边界没有协调性要求可为曲线，此时的二维 8 节点单元位移插值函数即具有高阶完备协调性，且适合于曲线边界，并没有增加单元划分的难度。此二维 8 节点四边形曲边单元可退化 6 节点三角形曲边单元。

2)、如图 5（a)、图 5（b）及图 5（c）所示，当目标实体单元为二维 12 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造单元位移插值函数为：

$u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3$。

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数a_1~a_{12}，其具有 3 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 2 阶，其收敛性能和抗畸变性能非常好。当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该公共边界即协调，与单元其它边界形状无关，因此，在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由边界没有协调性要求可为曲线，此时的二维 12 节点单元位移插值函数即具有高阶完备协调性，并能适合于任意曲线边界，并没有曾加单元划分的难度。此二维 12 节点四边形曲边单元可退化 9 节点三角形曲边单元。

3)、如图 6（a)、图 6（b）及图 6（c）所示，当目标实体单元为三维 20 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}u(v,w)=&a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_3+a_5T_1^2+a_6T_2^2+a_7T_3^2+a_8T_1T_2+a_9T_1T_3+a_{10}T_2T_3\\&+a_{11}\xi^2\eta+a_{12}\xi^2\zeta+a_{13}\xi\eta^2+a_{14}\eta^2\zeta+a_{15}\xi\zeta^2+a_{16}\eta\zeta^2+a_{17}\xi\eta\zeta\\&+a_{18}\xi^2\eta\zeta+a_{19}\xi\eta^2\zeta+a_{20}\xi\eta\zeta^2\end{aligned}\quad 。$$

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数a_1~a_{20}，其具有 2 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 1 阶。该曲边六面体单元可以自动退化为曲边五面体单元、曲边四面体单元；六个四边形侧曲面可以自动退化为三角形侧曲面。

有关单元位移插值函数在单元边界处的协调问题分为三种情况：

（a）六面体的公共棱角线协调

与平面问题类似，要求单元公共棱角线为直线且中节点均分其公共棱角线，单元位移插值函数在公共棱角线上即协调，与单元其它部位的形状无关。

（b）六面体的四边形侧曲面协调

要求单元公共的四边形侧曲面为平面、四条边均为直线，且边中的节点均分其边界，此时单元位移插值函数在公共四边形侧平面上即协调，与单元其它面的形状无关。

（c）六面体的三角形侧曲面协调

只要求单元公共的三角形侧曲面为平面，三角形的边可为曲线，单元位移插值函数在公共三角形侧平面上即协调，与单元其它面的形状无关。三角形的边可为曲线条件，使得构造适合于任意曲边边界的退化四面体单元成为可能。

在单元划分时，结构内部用平面六面体单元，可用退化后的四面体单元、五面体单元和六面体单元外露曲面模似结构的外部曲面边界，从而就可保证了单元位移插值函数的协调，同时也能很好地模似结构的曲面边界。与常规的单元划分方法一致，并没有增加单元划分的难度。

4)、如图 7（a)、图 7（b）及图 7（c）所示，当所述目标实体单元为三维 32 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$u(v,w)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_3+a_5T_1^2+a_6T_2^2+a_7T_3^2+a_8T_1T_2+a_9T_1T_3a+a_{10}T_2T_3$$
$$a_{11}T_1^3+a_{12}T_2^3+a_{13}T_3^3+a_{14}T_1^2T_2+a_{15}T_1^2T_3+a_{16}T_1T_2^2+a_{17}T_2^2T_3+a_{18}T_1T_3^2+a_{19}T_2T_3^2+a_{20}T_1T_2T_3$$
$$+a_{21}\xi^3\eta+a_{22}\xi^3\zeta+a_{23}\xi\eta^3+a_{24}\eta^3\zeta+a_{25}\xi\zeta^3+a_{26}\eta\zeta^3$$
$$+a_{27}\xi^2\eta\zeta+a_{28}\xi\eta^2\zeta+a_{29}\xi\eta\zeta^2+a_{30}\xi^2\eta^2+a_{31}\xi^2\zeta^2+a_{32}\eta^2\zeta^2$$

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 a_1~a_{32}，其具有 3 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 2 阶。该曲边六面体单元同样可以自动退化为曲边五面体单元、曲边四面体单元；六个四边形侧曲面可以自动退化为三角形侧曲面，以适合曲面结构边界。

有关单元位移插值函数在单元边界处的协调问题分为三种情况：

（a）六面体的公共棱角线协调

与平面问题类似，要求单元公共棱角线为直线且中节点均分其公共棱角线，单元位移插值函数在其公共棱角线上既协调，与单元其它部位的形状无关。

（b）六面体的四边形侧曲面协调

要求单元公共的四边形侧曲面为平面、四条边均为直线，且边中的节点均分其边，此时单元位移插值函数在公共四边形侧平面上既协调，与单元其它面的形状无关。

（c）六面体的三角形侧曲面协调

只要求单元公共的三角形侧曲面为平面，三角形的边可为曲线，单元位移插值函数在公共三角形侧平面上即协调，与单元其它面的形状无关。三角形的边可为曲线的条件，使得构造适合于任意曲边边界的退化四面体单元成为可能。

在单元划分时，结构内部用平面六面体单元，可用退化后的四面体单元、五面体单元和六面体单元外露曲面模似结构的外部曲面边界，从而就可保证了单元位移插值函数的协调，同时也能很好地模似结构的曲面边界。与常规的单元划分方法一致，并没有增加单元划分的难度。

5)、如图 8（a)、图 8（b）及图 8（c）所示，当目标实体单元为二维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量（三节点参数为 w,θ_x,θ_y，w,θ_x,θ_y 相关，该情况下，位移总数为已知节点数和节点位移分量数的乘积）的高阶完备协调任意四边形薄板单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3\ 。$$

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数a_1~a_{12}，其具有 3 阶完备性，完备的阶数较高，该单元位移插值函数在相邻单元的公共边界上挠度和切向转角能协调。而传统的四边形薄板单元只有矩形单元和三角形单元，不适合于任意折线形边界，应用范围非常有限。

该单元位移插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，即C^1阶非协调性问题，该问题一直被认为是不能解决的难题。为此，本实施例在规则的等参坐标系里，用一种非常特殊的修正函数仅对单元一条边界的非协调法向转角进行修正，不影响单元其它边界的位移和转角值，关键是不影响单元其它边界的法向转角值，因此，可只对单元有非协调法向转角公共边界的进行修正，单元自由边界的非协调法向转角不必修正。

优选地，本实施例可按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w=-\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)+\frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)-\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$为单元四个边界的非协调法向转角位移，且该非协调法向转角位移在节点处为零。可选择性修正单元任一边界的非协调法向转角位移。

6)、如图 8（a)、图 8（b）及图 8（c）所示，当目标实体单元为二维 4 节点且各节点有 4 个相关位移分量（四节点参数为$w,\theta_x,\theta_y,\theta_{xy}$，$w,\theta_x,\theta_y,\theta_{xy}$相关，该情况下，位移总数为已知节点数和节点位移分量数的乘积，其中，θ_{xy}为w对x、y二阶交叉偏导数）的高阶完备协调任意四边形薄板单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3$$
$$+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi^2\eta^2+a_{13}\xi\eta^3+a_{14}\xi^3\eta^2+a_{15}\xi^2\eta^3+a_{16}\xi^3\eta^3$$。

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数a_1~a_{16}，其考虑四节点参数$w,\theta_x,\theta_y,\theta_{xy}$，可保证单元位移插值函数的在单元边界上法向转角协调，而不必进行特殊修正；且具有 3 阶完备性，完备的阶数较高，该单元位移插值函数在相邻单元的公共边界上，不仅挠度和切向转角协调，而且法向转角也协调，但要求板单元厚度和材料性质一致，否则，会引起新的不协调问题。

7)、如图 9（a)、图 9（b）及图 9（c）所示，当目标实体单元为二维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备协调曲边四边形薄板单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$w = a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4T_1^2 + a_5T_1T_2 + a_6T_2^2 + a_7T_1^3 + a_8T_1^2T_2 + a_9T_1T_2^2 + a_{10}T_2^3$$
$$+a_{11}T_1^4 + a_{12}T_1^3T_2 + a_{13}T_1^2T_2^2 + a_{14}T_1T_2^3 + a_{15}T_2^4$$
$$+a_{16}T_1^5 + a_{17}T_1^4T_2 + a_{18}T_1^3T_2^2 + a_{19}T_1^2T_2^3 + a_{20}T_1T_2^4 + a_{21}T_2^5$$
$$+a_{22}\xi^4\eta^2 + a_{23}\xi^3\eta^3 + a_{24}\xi^2\eta^4$$

该单元位移插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数$a_1 \sim a_{24}$，其具有 5 阶完备性，完备的阶数较高，适合于任意曲线形边界。在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由外边界没有协调性要求可为曲线，以适合曲线边界，此时，单元位移插值函数在单元公共边界上挠度和切向转角才协调，但法向转角不能协调须修正。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该单元位移插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，即C^1阶非协调性问题，该问题一直被认为是不能解决的难题。为此，本实施例在规则的等参坐标系里，用一种非常特殊的修正函数可仅对单元一条边界的非协调法向转角进行修正，不影响单元其它边界的挠度和切向转角值，关键是不影响单元其它边界的法向转角值，可只对有非协调法向转角单元的公共边界进行修正，单元自由边界的非协调法向转角不必修正，因此，单元外边界可为曲线，以适合曲线边界。优选地，本实施例按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w = -\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta) + \frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi) - \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$为单元边界的非协调法向转角位移，该非协调法向转角位移在节点处为零。可选择性修正单元任一边界的非协调法向转角位移。

8)、当目标实体单元为三维 4 节点高阶完备协调任意四边形平板薄壳单元（其中w,θ_x,θ_y相关）时，即对于 4 节点平面任意四边形薄壳单元，如图 10（a)、图 10（b）及图 10（c）所示，通过坐标变换，可将任意四边形平面薄板单元位移插值函数转换为空间薄壳单元位移插值函数，其中节点位移向量在两坐标系之间转换关系为：

$$a_i' = La; \quad a_i = L^T a_i' \qquad a_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]; \quad a_i' = [u_i' \quad v_i' \quad w_i' \quad \theta_{xi}' \quad \theta_{yi}' \quad \theta_{zi}']$$

$$T = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad ,L = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad ,\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

其中，a_i', a_i为节点位移；T, L, λ为转换矩阵。

单元刚度矩阵和荷载列向量的转换关系为：

$$K'^{e}=TK^{e}T;\qquad Q'^{e}=TQ$$

其它转换关系按常规法进行实施。

关键是任意四边形薄壳单元位移插值函数的构造，基于本发明的线性变换坐标法与等参坐标混合法，可假定单元位移插值函数为：

$$\begin{cases}u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4\xi\eta\\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3\end{cases}$$

该插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数；具有 3 阶完备性，完备的阶数较高，且该薄壳单元位移插值函数在相邻单元的公共边界上的挠度和切向转角能协调。

该薄壳单元位移插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，即 C^1 阶非协调性问题。为此，本实施例在规则的等参坐标系里，用一种非常特殊的修正函数仅对单元一条边界的非协调法向转角进行修正，不影响单元边界的挠度和切向转角值，关键是不影响单元其它边界的法向转角值，因此，可只对单元公共边界的非协调法向转角进行修正，单元自由边界的非协调法向转角不必修正。

优选地，本实施例按下式修正薄壳单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w=-\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)+\frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)-\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$ 为单元边界的非协调法向转角位移， 该非协调法向转角位移在节点处为零。可选择性修正单元任一边界的非协调法向转角位移。

9)、当目标实体单元为三维 8 节点高阶完备协调曲线四边形平板薄壳单元（其中 w,θ_x,θ_y 相关）时，即对于 8 节点平面任意四边形薄壳单元，如图 11（a）、图 11（b）及图 11（c）所示，通过坐标变换，可将任意四边形平面薄板单元位移插值函数转换为空间薄壳单元位移插值函数。其中节点位移向量在两坐标系之间转换关系为：

$$a_i'=La_i;\qquad a_i=L^Ta_i'$$
$$a_i=[u_i\quad v_i\quad w_i\quad \theta_{xi}\quad \theta_{yi}\quad \theta_{zi}];\qquad a_i'=[u_i'\quad v_i'\quad w_i'\quad \theta_{xi}'\quad \theta_{yi}'\quad \theta_{zi}']$$

$$T=\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad ,L=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad ,\lambda=\begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

其中，a_i', a_i 为节点位移；T, L, λ 为转换矩阵。

单元刚度矩阵和荷载列向量的转换关系为：

$$K'^e = TK^eT; \qquad Q'^e = TQ$$

其它转换关系按常规法进行实施。

关键是任意四边形薄壳单元位移插值函数的构造，基于本发明的线性变换坐标法与等参坐标混合法，可假定单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v) = a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4T_1^2 + a_5T_1T_2 + a_6T_1^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 \\ w = a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4T_1^2 + a_5T_1T_2 + a_6T_1^2 + a_7T_1^3 + a_8T_1^2T_2 + a_9T_1T_2^2 + a_{10}T_2^3 \\ +a_{11}T_1^4 + a_{12}T_1^3T_2 + a_{13}T_1^2T_2^2 + a_{14}T_1T_2^3 + a_{15}T_2^4 \\ +a_{16}T_1^5 + a_{17}T_1^4T_2 + a_{18}T_1^3T_2^2 + a_{19}T_1^2T_2^3 + a_{20}T_1T_2^4 + a_{21}T_2^5 \\ +a_{22}\xi^4\eta^2 + a_{23}\xi^3\eta^3 + a_{24}\xi^2\eta^4 \end{cases}$$

上述插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数；其具有 5 阶完备性，完备的阶数较高，适合于曲线形边界。在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由外边界没有协调性要求可为曲线，以适合曲线边界，此时，单元位移插值函数在单元公共边界上挠度和切向转角才协调，但法向转角不能协调须修正。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该单元位移插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，即 C^1 阶非协调性问题。为此，本实施例在规则的等参坐标系里，用一种非常特殊的修正函数仅对单元一条边界的非协调法向转角进行修正，不影响单元边界的挠度和切向转角值，关键是不影响单元其它边界的法向转角值，因此，可只对单元公共边界的非协调法向转角进行修正，单元自由边界的非协调法向转角不必修正。

优选地，本实施例按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w = -\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta) + \frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi) - \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$

其中 $\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$ 为单元边界的非协调法向转角位移，且该非

协调法向转角位移在节点处为零。可选择性修正单元任一边界的非协调法向转角位移。

10)、当目标实体单元为三维 4 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元（其中w,θ_x,θ_y相关）时，如图 12（a)、图 12（b）及图 12（c）所示，可假定曲面薄壳单元内部任意一点的总体坐标为：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

其中，$N_i(\xi,\eta)$为常规的形函数。

在整体坐标系中节点的刚体位移$\{\delta'_{Ri}\}$由单元微体的刚体运动给出，微体形心的运动包括绕三个坐标轴的转动和沿坐标轴的平动。曲面薄壳单元形心的刚体运动为:

$$\{V'_R\} = \{u'_0 \quad v'_0 \quad w'_0 \quad \theta'_{x0} \quad \theta'_{y0} \quad \theta'_{z0}\}^T$$

在整体坐标系里，按动力学方法得到这个刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\{\delta'_{Ri}\} = \{u'_{Ri} \quad v'_{Ri} \quad w'_{Ri} \quad \theta'_{xRi} \quad \theta'_{yRi} \quad \theta'_{zRi}\}^T = [T_{Ri}]\{V'_R\}$$

$$\{\delta'^{e}_{R}\} = \{\delta'_{R1} \quad \delta'_{R2} \quad \delta'_{R3} \quad \delta'_{R4}\}^T = [T_R]\{V'_R\}$$

其中，转换矩阵T_R的子矩阵：

$$[T_R] = \{T_{R1} \quad T_{R2} \quad T_{R3} \quad T_{R4}\}^T$$

$$[T_{Ri}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_0 & -(y_i - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_0) & 0 & x_i - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_0 & -(x_i - x_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中，x_0, y_0, z_0为单元微体形心整体坐标。

在曲线坐标系里，刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\{\delta_{Ri}\} = \{u_{Ri} \quad v_{Ri} \quad w_{Ri} \quad \theta_{xRi} \quad \theta_{yRi} \quad \theta_{zRi}\}^T = [L_i]^T [T_{Ri}][L_0]^T \{V_R\}$$

$$\{\delta^e_R\} = \{\delta_{R1} \quad \delta_{R2} \quad \delta_{R3} \quad \delta_{R4}\}^T = [T]^T [T_R][L_0]^T \{V_R\}$$

其中，L_i为转换矩阵。

$$[T]=\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & \\ 0 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}$$

$$L_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad ,\lambda_i=\begin{bmatrix} \lambda_{x'\alpha i} & \lambda_{x'\beta i} & \lambda_{x'\delta i} \\ \lambda_{y'\alpha i} & \lambda_{y'\beta i} & \lambda_{y'\delta i} \\ \lambda_{z'\alpha i} & \lambda_{z'\beta i} & \lambda_{z'\delta i} \end{bmatrix} \quad i=0,1,2...,n$$

式中 $\lambda_{x'\alpha i}=\cos(x',\alpha)$ 等是 x、y、z 轴在正交主曲线坐标系 α,β,δ 的各方向余弦。

在曲线坐标系里，曲面薄壳单元形心的刚体运动为：

$$\{V_R\}=\{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_{x0} \quad \theta_{y0} \quad \theta_{z0}\}^T$$

单元节点位移向量在整体坐标和曲线坐标之间转换关系为：

$$\{V_R'\}=[L_0]\{V_R\} \qquad \{\delta_T'^e\}=[T]\{\delta_T^e\}$$

$$\{\delta_D'^e\}=[T]\{\delta_D^e\} \qquad \{\delta_R'^e\}=[T][T_R][L_0]\{V_R\}$$

在曲线坐标系里，补充刚体位移后的单元位移场全量为：

$$\{\delta_T^e\}=\{\delta_D^e\}+\{\delta_R^e\}=[I \quad T_R]\begin{Bmatrix} \delta_D^e \\ V_R \end{Bmatrix}$$

式中 I 是 20×20 的单位矩阵。

刚体位移不产生应变，所以，在正交主曲线坐标系中应变矩阵为：

$$\{\varepsilon^e\}=[B]\{\delta_D^e\}$$

式中，B 是正交主曲线坐标系中单元的应变矩阵。

刚体位移也不产生节点力，作静力凝聚，按虚功原理建立有限元方程：

$$\begin{Bmatrix} P_D^e \\ 0 \end{Bmatrix}=[K_T^e]\begin{Bmatrix} \delta_T^e \\ -V_R \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_T^e \\ -V_R \end{Bmatrix}$$

其中，$[P_D^e]$ 是在正交主曲线坐标系里单元的节点载荷，$[K_T^e]$ 是在正交主曲线坐标系里由单元原有的刚度矩阵 $[K_D^e]$ 经位移扩展后得到的，即

$$[K_T^e]=\begin{Bmatrix} I \\ T_R^T \end{Bmatrix}[K_D^e]\{I \quad T_R\}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

其中，$[K_{11}]_{20\times 20}=[K_D^e]$，$[K_{12}]_{20\times 6}=[K_{21}]^T=[K_D^e][T_R]$，$[K_{22}]_{6\times 6}=[T_R]^T[K_D^e][T_R]$；

$$\{V_R\}=[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{\delta_T^e\}，\ \{P_D^e\}=([K_{11}]-[K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{\delta_T^e\}$$

$$\{\varepsilon^e\}=[B]^*\{\delta_T^e\},\ [B]^*([I]-[T_R][K_{22}]^{-1}[K_{21}])$$

在整体坐标系刚度矩阵和荷载向量的转换关系为：

$$[K'^e]=[T][K_T^e][T]^T,\ [P']^e=[T][P_D'^e]$$

集成总体坐标系的各个单元刚度矩阵和荷载向量，就可以得到整体坐标系的节点位移求解方程。

在正交主曲线坐标系(α,β,δ)里，α,β,δ为曲线坐标的弧长，对于 4 节点任意四边形单元，如图 11 所示，基于独创的线性变换坐标法与等参坐标混合法，与平面薄板问题相似，对曲线弧长坐标进行线性坐标变换与等参坐标变换，可假定单元位移插值函数为：

$$\begin{cases}u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4\xi\eta\\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3\end{cases}。$$

根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数。该单元位移插值函数具有 3 阶完备性，完备的阶数较高，该单元位移插值函数在相邻单元的公共边界上挠度和切向转角能协调。该单元位移插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，即C^1阶非协调性问题。为此，在规则的等参坐标系里，本实施例用一种非常特殊的修正函数仅对单元一条边界的非协调法向转角进行修正，不影响单元其它边界的位移和转角值，关键是不影响单元其它边界的法向转角值，因此，可只对单元有非协调法向转角公共边界的进行修正，单元自由边界的非协调法向转角不必修正。

优选地，本实施例按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w=-\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)+\frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)-\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$为单元四个边界的非协调法向转角位移，且该非协调法向转角位移在节点处为零。可选择性修正单元任一边界的非协调法向转角位移。

11)、当目标实体单元为三维 8 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元（其中w,θ_x,θ_y相关）时，即对于 8 节点曲面薄壳单元，如图 13（a)、图 13（b）及图 13（c）所示，假定曲壳单元内部任意一点的总体坐标为：

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix}$$

其中， $N_i(\xi,\eta)$ 为常规的形函数。

在整体坐标系中节点的刚体位移 $\{\delta'_{Ri}\}$ 由单元微体的刚体运动给出，微体形心的运动包括绕三个坐标轴的转动和沿坐标轴的平动。壳单元形心的刚体运动为：

$$\{V'_R\}=\{u'_0 \quad v'_0 \quad w'_0 \quad \theta'_{x0} \quad \theta'_{y0} \quad \theta'_{z0}\}^T$$

在整体坐标系里，按动力学方法得到这个刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\{\delta'_{Ri}\}=\{u'_{Ri} \quad v'_{Ri} \quad w'_{Ri} \quad \theta'_{xRi} \quad \theta'_{yRi} \quad \theta'_{zRi}\}^T=[T_{Ri}]\{V'_R\}$$

$$\{\delta'^e_R\}=\{\delta'_{R1} \quad \delta'_{R2} \quad \delta'_{R3} \quad \delta'_{R4} \quad \delta'_{R5} \quad \delta'_{R6} \quad \delta'_{R7} \quad \delta'_{R8}\}^T=[T_R]\{V'_R\}$$

其中，转换矩阵 T_R 的子矩阵：

$$[T_R]=\{T_{R1} \quad T_{R2} \quad T_{R3} \quad T_{R4} \quad T_{R5} \quad T_{R6} \quad T_{R7} \quad T_{R8}\}^T$$

$$[T_{Ri}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i-z_0 & -(y_i-y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i-z_0) & 0 & x_i-x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i-y_0 & -(x_i-x_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 x_0,y_0,z_0 为单元微体形心整体坐标。

在曲线坐标系里，刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\{\delta_{Ri}\}=\{u_{Ri} \quad v_{Ri} \quad w_{Ri} \quad \theta_{xRi} \quad \theta_{yRi} \quad \theta_{zRi}\}^T=[L_i]^T[T_{Ri}][L_0]^T\{V_R\}$$

$$\{\delta^e_R\}=\{\delta_{R1} \quad \delta_{R2} \quad \delta_{R3} \quad \delta_{R4} \quad \delta_{R5} \quad \delta_{R6} \quad \delta_{R7} \quad \delta_{R8}\}^T=[T]^T[T_R][L_0]^T\{V_R\}$$

其中， L_i 为转换矩阵。

$$[T]=\begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_7 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L_8 \end{bmatrix}$$

$$L_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix},\lambda_i=\begin{bmatrix} \lambda_{x'\alpha i} & \lambda_{x'\beta i} & \lambda_{x'\delta i} \\ \lambda_{y'\alpha i} & \lambda_{y'\beta i} & \lambda_{y'\delta i} \\ \lambda_{z'\alpha i} & \lambda_{z'\beta i} & \lambda_{z'\delta i} \end{bmatrix}$$

式中 $\lambda_{x'\alpha i}=\cos(x',\alpha)$ 等是 x、y、z 轴在正交主曲线坐标系 α,β,δ 的各方向余弦。

在曲线坐标系里，曲面薄壳单元形心的刚体运动为：

$$\{V_R\}=\{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_{x0} \quad \theta_{y0} \quad \theta_{z0}\}^T$$

单元节点位移向量在整体坐标和曲线坐标之间转换关系为：

$$\{V_R'\}=[L_0]\{V_R\} \qquad \{\delta_T'^e\}=[T]\{\delta_T^e\}$$

$$\{\delta_D'^e\}=[T]\{\delta_D^e\} \qquad \{\delta_R'^e\}=[T][T_R][L_0]\{V_R\}$$

在曲线坐标系里，补充刚体位移后的单元位移场全量为：

$$\{\delta_T^e\}=\{\delta_D^e\}+\{\delta_R^e\}=[I \quad T_R]\begin{Bmatrix}\delta_D^e\\ V_R\end{Bmatrix}$$

式中 I 是40×40的单位矩阵。

刚体位移不产生应变，所以，在正交主曲线坐标系中应变矩阵为：

$$\{\varepsilon^e\}=[B]\{\delta_D^e\}$$

式中 B 是正交主曲线坐标系中单元的应变矩阵。

刚体位移也不产生节点力，作静力凝聚，按虚功原理建立有限元方程：

$$\begin{Bmatrix}P_D^e\\ 0\end{Bmatrix}=[K_T^e]\begin{Bmatrix}\delta_T^e\\ -V_R\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_T^e\\ -V_R\end{Bmatrix}$$

其中，$[P_D^e]$是在正交主曲线坐标系里单元的节点载荷，$[K_T^e]$是在正交主曲线坐标系里由单元原有的刚度矩阵$[K_D^e]$经位移扩展后得到的，即

$$[K_T^e]=\begin{Bmatrix}I\\ T_R^T\end{Bmatrix}[K_D^e]\{I \quad T_R\}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}$$

其中，$[K_{11}]_{40\times40}=[K_D^e]$，$[K_{12}]_{40\times6}=[K_{21}]^T=[K_D^e][T_R]$，$[K_{22}]_{6\times6}=[T_R]^T[K_D^e][T_R]$

$$\{V_R\}=[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{\delta_T^e\}，\ \{P_D^e\}=([K_{11}]-[K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{\delta_T^e\}$$

$$\{\varepsilon^e\}=[B]^*\{\delta_T^e\}，\ [B]^*([I]-[T_R][K_{22}]^{-1}[K_{21}])$$

在整体坐标系刚度矩阵和荷载向量的转换关系为：

$$[K'^e]=[T][K_T^e][T]^T，\ [P']^e=[T][P_D'^e]$$

集成总体坐标系的各个单元刚度矩阵和荷载向量，就可以得到整体坐标系的节点位移求解方程。

在正交主曲线坐标系(α,β,δ)里，α,β,δ为曲线坐标的弧长，对于 8 节点任意四边形单

元，基于独创的线性变换坐标法与等参坐标混合法，与平面薄板问题相似，对曲线弧长坐标进行线性坐标变换与等参坐标变换，可假定单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2 \\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3 \\ +a_{11}T_1^4+a_{12}T_1^3T_2+a_{13}T_1^2T_2^2+a_{14}T_1T_2^3+a_{15}T_2^4 \\ +a_{16}T_1^5+a_{17}T_1^4T_2+a_{18}T_1^3T_2^2+a_{19}T_1^2T_2^3+a_{20}T_1T_2^4+a_{21}T_2^5 \\ +a_{22}\xi^4\eta^2+a_{23}\xi^3\eta^3+a_{24}\xi^2\eta^4 \end{cases}。$$

可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数。该单元位移插值函数具有 5 阶完备性，完备的阶数较高，适合于任意曲线形边界。在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由外边界没有协调性要求可为曲线，以适合曲线边界，此时，单元位移插值函数在单元公共边界上挠度和切向转角能协调，但法向转角不能协调须修正。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该单元位移插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，即C^1阶非协调性问题，一个世纪以来，一直被认为是不能解决的难题。为此，在规则的等参坐标系里，首次提出用一种非常特殊的修正函数可仅对单元一条边界的非协调法向转角进行修正，不影响单元其它边界的挠度和切向转角值，关键是不影响单元其它边界的法向转角值，可只对有非协调法向转角单元的公共边界进行修正，单元自由边界的非协调法向转角不必修正，因此，单元外边界可为曲线，以适合曲线边界。

经理论分析首次提出按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w=-\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)+\frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)-\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$为单元边界的非协调法向转角位移，该非协调法向转角位移在节点处为零。可选择性修正单元任一边界的非协调法向转角位移。

综上，本实施例基于线性变换坐标与等参坐标混合坐标法，而不是基于单一坐标系统构造求解物理量的插值函数，可使有限元分析软件的计算精度大幅度提高，提高结构设计的安全可靠性，优化结构设计，更能适应各种曲面（曲线）边界，从而为工程、航空和航天等建设带来巨大的经济效益。

以上所述仅为本发明的优选实施例而已，并不用于限制本发明，对于本领域的技术人员

来说，本发明可以有各种更改和变化。凡在本发明的精神和原则之内，所作的任何修改、等同替换、改进等，均应包含在本发明的保护范围之内。

权 利 要 求 书

1、一种有限元插值函数构造方法，其特征在于，包括：

以线性变换坐标系与等参坐标系所组成的混合坐标系构造插值函数；

根据目标实体单元的特征确定插值函数方程式的坐标元数、项数和次数，所述特征包括已知节点数和节点位移分量数，且所构造插值函数方程式的项数与目标实体单元的插值相关节点位移总数相等；同时，所构造插值函数方程式中对应线性变换坐标系部分为各项次数以覆盖各坐标元组合后从低到高递增的最高次完整多项式，所构造插值函数方程式中对应等参坐标系部分的各项次数在所述线性变换坐标系部分的最高次数上以覆盖各坐标元组合后从低到高递增并呈对称性分布。

2、根据权利要求 1 所述的有限元插值函数构造方法，其特征在于，所构造的插值函数包括以下的任意一项或任意组合：

1)、当所述目标实体单元为二维 8 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2;$$

2)、当所述目标实体单元为二维 12 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3;$$

3)、当所述目标实体单元为三维 20 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}u(v,w)&=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_3+a_5T_1^2+a_6T_2^2+a_7T_3^2+a_8T_1T_2+a_9T_1T_3+a_{10}T_2T_3\\&+a_{11}\xi^2\eta+a_{12}\xi^2\zeta+a_{13}\xi\eta^2+a_{14}\eta^2\zeta+a_{15}\xi\zeta^2+a_{16}\eta\zeta^2+a_{17}\xi\eta\zeta\\&+a_{18}\xi^2\eta\zeta+a_{19}\xi\eta^2\zeta+a_{20}\xi\eta\zeta^2\end{aligned};$$

4)、当所述目标实体单元为三维 32 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned}u(v,w)&=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_3+a_5T_1^2+a_6T_2^2+a_7T_3^2+a_8T_1T_2+a_9T_1T_3a+a_{10}T_2T_3\\&a_{11}T_1^3+a_{12}T_2^3+a_{13}T_3^3+a_{14}T_1^2T_2+a_{15}T_1^2T_3+a_{16}T_1T_2^2+a_{17}T_2^2T_3+a_{18}T_1T_3^2+a_{19}T_2T_3^2+a_{20}T_1T_2T_3\\&+a_{21}\xi^3\eta+a_{22}\xi^3\zeta+a_{23}\xi\eta^3+a_{24}\eta^3\zeta+a_{25}\xi\zeta^3+a_{26}\eta\zeta^3\\&+a_{27}\xi^2\eta\zeta+a_{28}\xi\eta^2\zeta+a_{29}\xi\eta\zeta^2+a_{30}\xi^2\eta^2+a_{31}\xi^2\zeta^2+a_{32}\eta^2\zeta^2\end{aligned};$$

5)、当所述目标实体单元为二维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备协调任意四边形薄板单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_2^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3;$$

6)、当所述目标实体单元为二维 4 节点且各节点有 4 个相关位移分量的高阶完备协调任意四边形薄板单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y、θ_{xy}，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned} w &= a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4T_1^2 + a_5T_1T_2 + a_6T_2^2 + a_7T_1^3 + a_8T_1^2T_2 + a_9T_1T_2^2 + a_{10}T_2^3 \\ &+ a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi^2\eta^2 + a_{13}\xi\eta^3 + a_{14}\xi^3\eta^2 + a_{15}\xi^2\eta^3 + a_{16}\xi^3\eta^3 \end{aligned} ;$$

7)、当所述目标实体单元为二维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备协调曲边四边形薄板单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{aligned} w &= a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4T_1^2 + a_5T_1T_2 + a_6T_2^2 + a_7T_1^3 + a_8T_1^2T_2 + a_9T_1T_2^2 + a_{10}T_2^3 \\ &+ a_{11}T_1^4 + a_{12}T_1^3T_2 + a_{13}T_1^2T_2^2 + a_{14}T_1T_2^3 + a_{15}T_2^4 \\ &+ a_{16}T_1^5 + a_{17}T_1^4T_2 + a_{18}T_1^3T_2^2 + a_{19}T_1^2T_2^3 + a_{20}T_1T_2^4 + a_{21}T_2^5 \\ &+ a_{22}\xi^4\eta^2 + a_{23}\xi^3\eta^3 + a_{24}\xi^2\eta^4 \end{aligned} ;$$

其中，上述各方程式中，T_1、T_2、T_3分别为单元曲面内线性变换坐标系中坐标轴，ξ、η、ζ分别为等参坐标系中坐标轴；u、v、w分别对应单元曲面内三个局部坐标方向上的位移，θ_x、θ_y分别为w对单元曲面内局部坐标x、y的偏导数，θ_{xy}为w对x、y二阶交叉偏导数。

3、根据权利要求 1 所述的有限元插值函数构造方法，其特征在于，对于工程上普遍采用的空间薄壳，采用合适的正交曲线坐标及相应的几何方程，根据上述单元的原理，像平面问题一样在空间正交曲线坐标系中直接构造高阶完备协调曲面薄壳单元，计算单元刚度矩阵，再进行空间坐标转换；具体包括：

1)、当所述目标实体单元为三维 4 节点且各节点 w 位移分量有 3 个相关位移分量的高阶完备协调任意四边形平板薄壳单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v) = a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4\xi\eta \\ w = a_1 + a_2T_1 + a_3T_2 + a_4T_1^2 + a_5T_1T_2 + a_6T_1^2 + a_7T_1^3 + a_8T_1^2T_2 + a_9T_1T_2^2 + a_{10}T_2^3 + a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi\eta^3 \end{cases} ;$$

2)、当所述目标实体单元为三维 8 节点且各节点 w 位移分量有 3 个相关位移分量的高阶完备协调曲线四边形平板薄壳单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2 \\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3 \\ +a_{11}T_1^4+a_{12}T_1^3T_2+a_{13}T_1^2T_2^2+a_{14}T_1T_2^3+a_{15}T_2^4 \\ +a_{16}T_1^5+a_{17}T_1^4T_2+a_{18}T_1^3T_2^2+a_{19}T_1^2T_2^3+a_{20}T_1T_2^4+a_{21}T_2^5 \\ +a_{22}\xi^4\eta^2+a_{23}\xi^3\eta^3+a_{24}\xi^2\eta^4 \end{cases};$$

3)、当所述目标实体单元为三维 4 节点且各节点 w 位移分量有 3 个相关位移分量的高阶完备协调四边形曲面薄壳单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4\xi\eta \\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3 \end{cases};$$

4)、当所述目标实体单元为三维 8 节点且各节点 w 位移分量有 3 个相关位移分量的高阶完备协调四边形曲面薄壳单元时，相关位移分量分别为w、θ_x、θ_y，所构造单元位移插值函数为：

$$\begin{cases} u(v)=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2 \\ w=a_1+a_2T_1+a_3T_2+a_4T_1^2+a_5T_1T_2+a_6T_1^2+a_7T_1^3+a_8T_1^2T_2+a_9T_1T_2^2+a_{10}T_2^3 \\ +a_{11}T_1^4+a_{12}T_1^3T_2+a_{13}T_1^2T_2^2+a_{14}T_1T_2^3+a_{15}T_2^4 \\ +a_{16}T_1^5+a_{17}T_1^4T_2+a_{18}T_1^3T_2^2+a_{19}T_1^2T_2^3+a_{20}T_1T_2^4+a_{21}T_2^5 \\ +a_{22}\xi^4\eta^2+a_{23}\xi^3\eta^3+a_{24}\xi^2\eta^4 \end{cases};$$

其中，上述各方程式中，T_1、T_2、T_3分别为单元曲面内线性变换坐标系中坐标轴，ξ、η、ζ分别为等参坐标系中坐标轴；u、v、w分别对应单元曲面内三个局部坐标方向上的位移，θ_x、θ_y分别为w对单元曲面内局部坐标x、y的偏导数，θ_{xy}为w对x、y二阶交叉偏导数。

4、根据权利要求 3 所述的有限元插值函数构造方法，其特征在于，还包括：

对于曲线坐标系上的壳单元，在位移模式中补充完整的刚体位移。

5、根据权利要求 1 至 4 任一所述的有限元插值函数构造方法，其特征在于，还包括：

当所述目标实体单元为二维 4 节点高阶完备协调任意四边形薄板单元、二维 8 点高阶完备协调曲边四边形薄板单元、三维 4 点高阶完备协调任意四边形平板薄壳单元、三维 8 点高阶完备协调曲边四边形平板薄壳单元、三维 4 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元或三维 8 节点高阶完备协调四边形曲面薄壳单元，且单元各节点只有 3 个相关位移分量时，按下式修正单元边界的非协调法向转角位移：

$$\Delta w=-\frac{(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\xi)^2}{4(2+\xi+\eta)(2+\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)+\frac{(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\xi)^2}{4(2-\xi+\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$$
$$+\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\eta)^2}{4(2+\xi+\eta)(2-\xi+\eta)}\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)-\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\eta)^2}{4(2+\xi-\eta)(2-\xi-\eta)}\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$$ ；

其中，$\Delta\theta_{\eta 23}(\eta)$，$\Delta\theta_{\eta 14}(\eta)$，$\Delta\theta_{\xi 34}(\xi)$，$\Delta\theta_{\xi 12}(\xi)$为单元四个边界的非协调法向转角位移，且该非协调法向转角位移在节点处为零。

6、根据权利要求 5 所述的有限元插值函数构造方法，其特征在于，整体坐标系与线性坐标系变换的变换公式为：

二维情况下，$\begin{cases}T_1=o_1x+b_1y+c_1\\T_2=o_2x+b_2y+c_2\end{cases}$；坐标变换关系中有 6 个待定系数$o_i,b_i,c_i,(i=1,2)$由变换 6 个为 0 或 1 的线性变换坐标值的方程组确定；

三维情况下，$\begin{cases}T_1=o_1x+b_1y+c_1z+d_1\\T_2=o_2x+b_2y+c_2z+d_2\\T_3=o_3x+b_3y+c_3z+d_3\end{cases}$；坐标变化关系有12个待定系数$o_i,b_i,c_i,d_i,(i=1,2,3)$由变换 12 个为 0 或 1 的线性变换坐标值的方程组确定。

7、根据权利要求 5 所述的有限元插值函数构造方法，其特征在于，整体坐标系与等参系变换的变换公式为：

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi)\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix}。$$

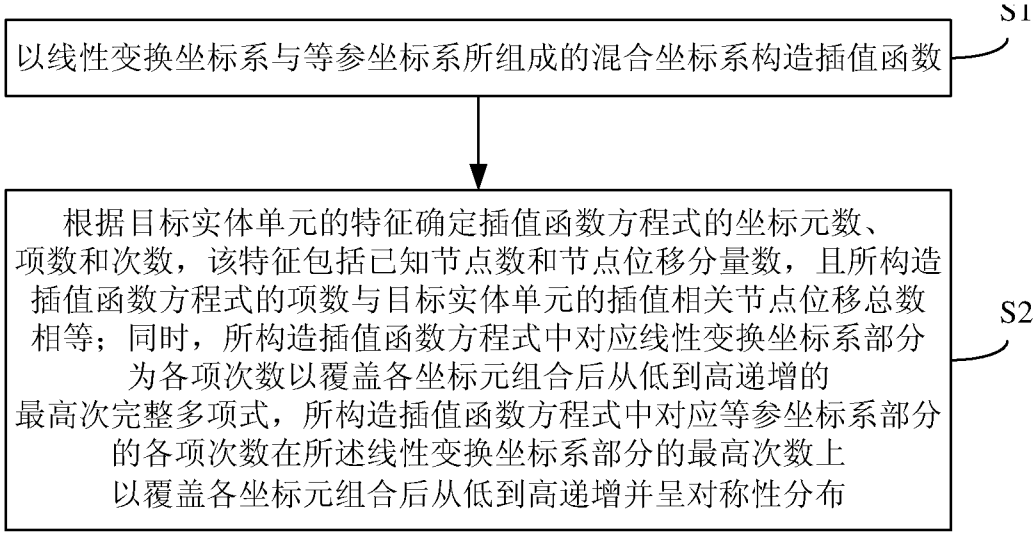

S1
以线性变换坐标系与等参坐标系所组成的混合坐标系构造插值函数
根据目标实体单元的特征确定插值函数方程式的坐标元数、项数和次数，该特征包括已知节点数和节点位移分量数，且所构造插值函数方程式的项数与目标实体单元的插值相关节点位移总数相等；同时，所构造插值函数方程式中对应线性变换坐标系部分为各项次数以覆盖各坐标元组合后从低到高递增的最高次完整多项式，所构造插值函数方程式中对应等参坐标系部分的各项次数在所述线性变换坐标系部分的最高次数上以覆盖各坐标元组合后从低到高递增并呈对称性分布
S2

图 1

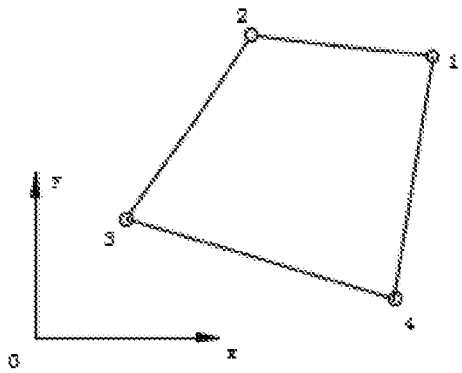


图 2（a）

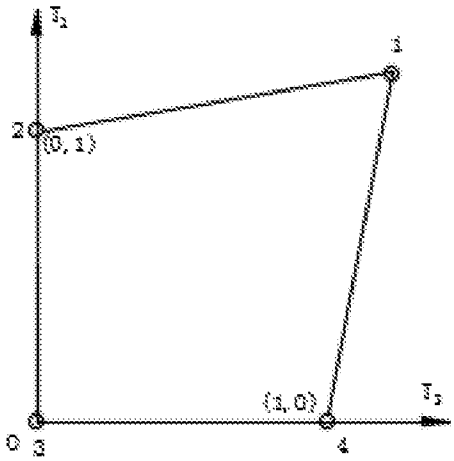


图 2（b）

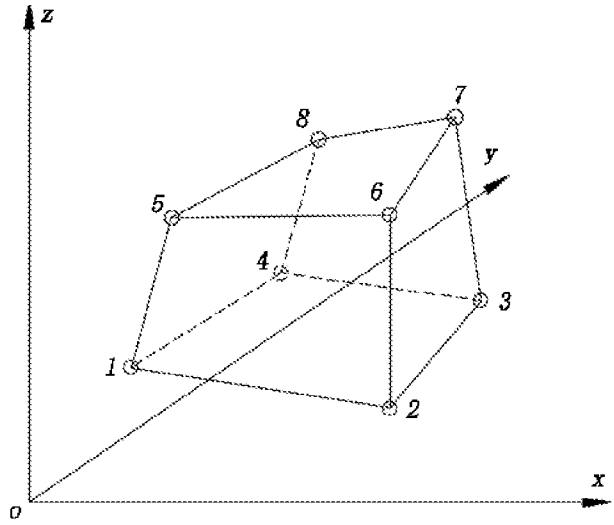


图 3（a）

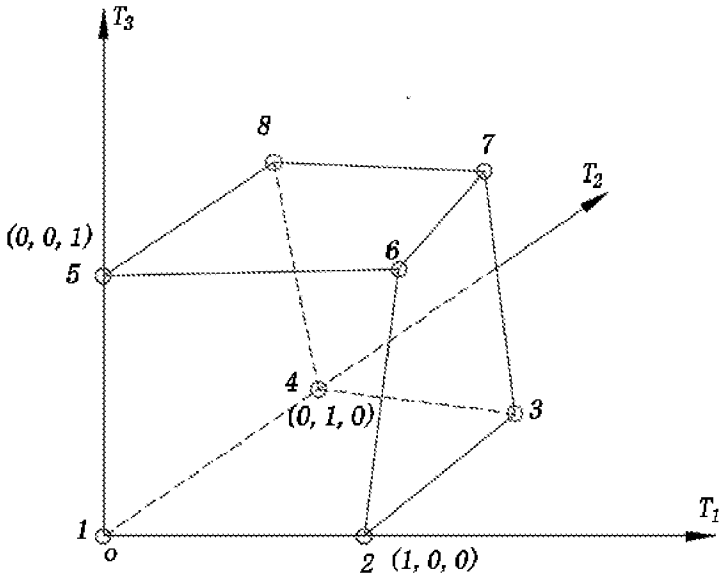


图 3（b）

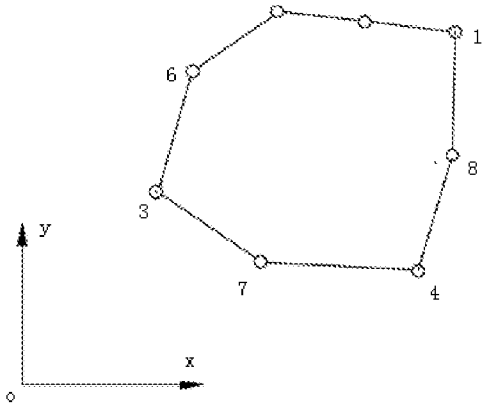


图 4（a）

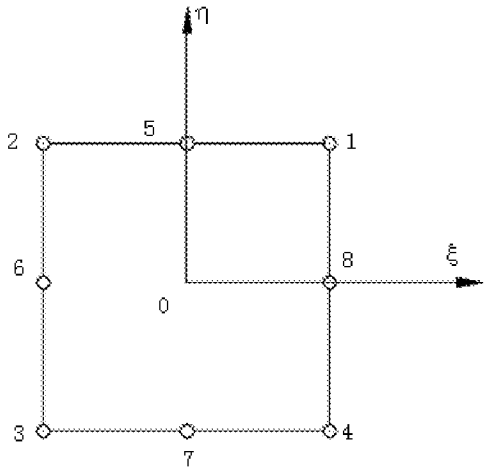
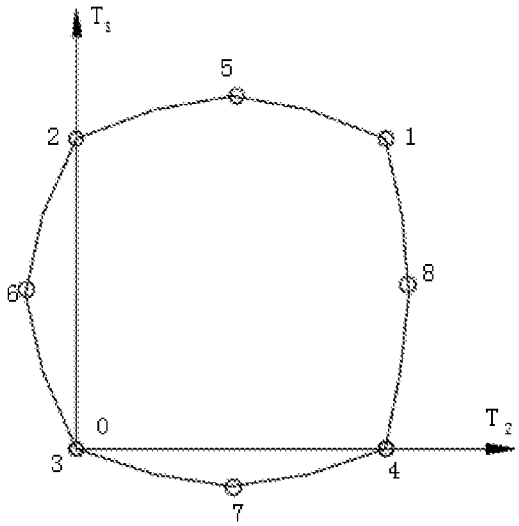


图 4（b）



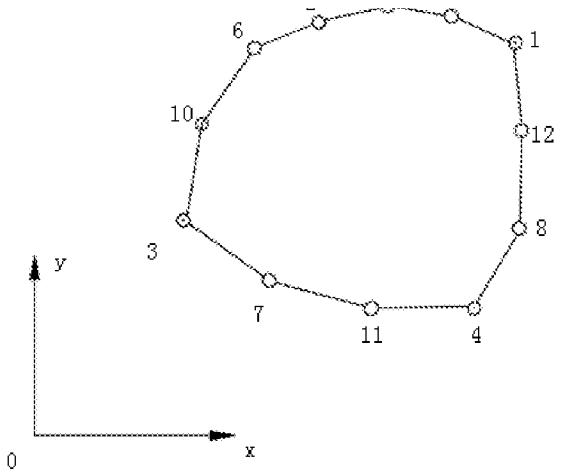

6
1
10
12
8
3
y
7
11
4
0
x

图 5（a）

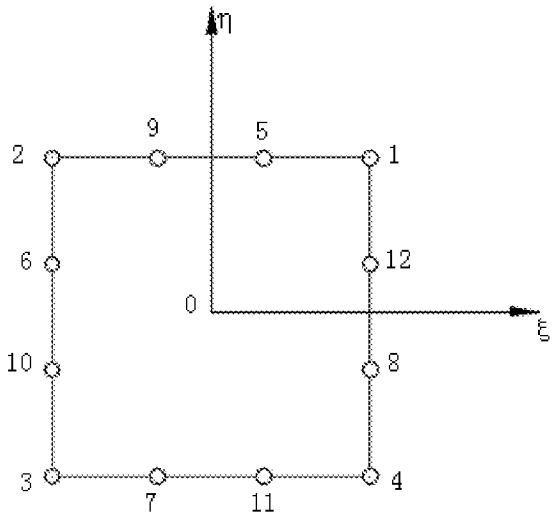
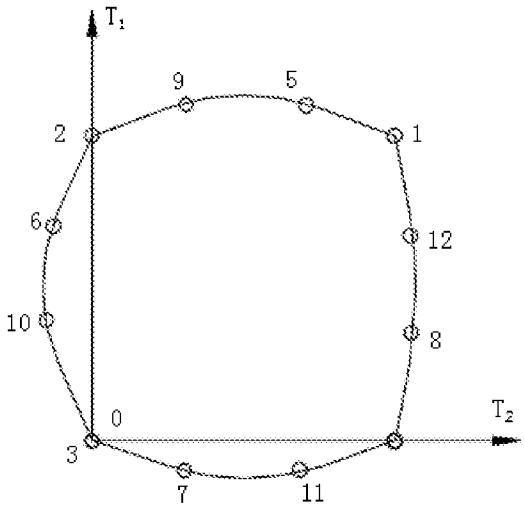

η
9
5
2
1
6
12
0
ξ
10
8
3
7
11
4

图 5（b）


T1
9
5
2
1
6
12
10
8
0
T2
3
7
11

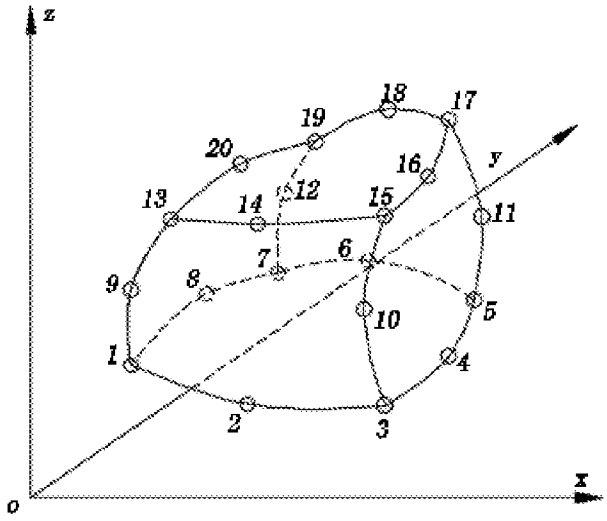

z
y
x
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

图6（a）

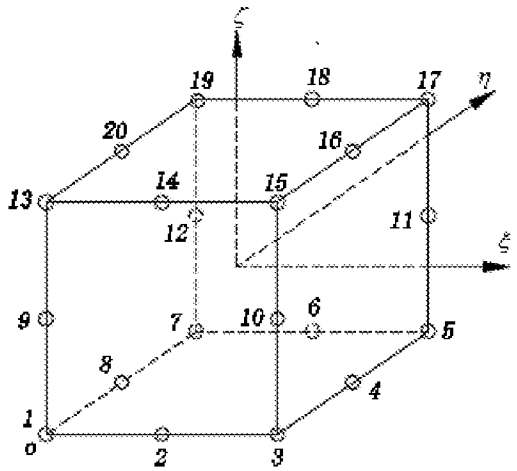

ζ
η
ξ
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

图6（b）

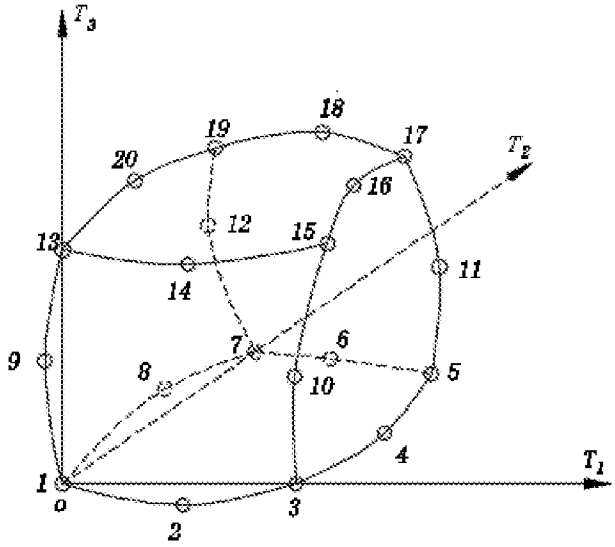

T_3
T_2
T_1
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

图 6（c）

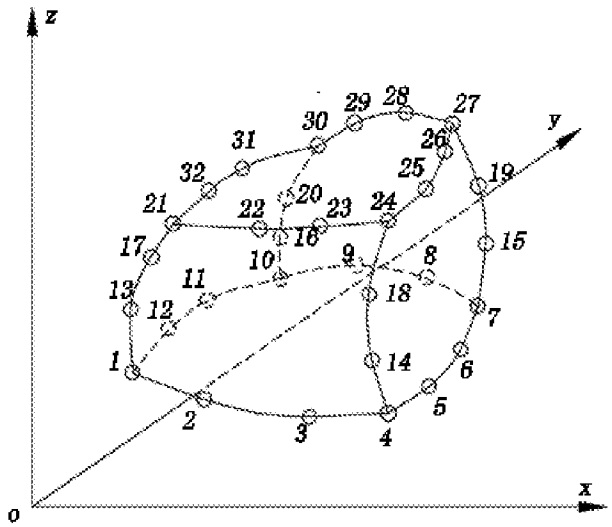

z
y
x
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

图 7 （a）

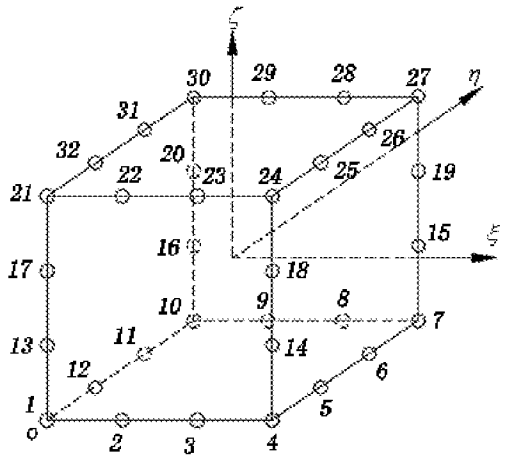

ζ
η
ξ
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

图 7（b）

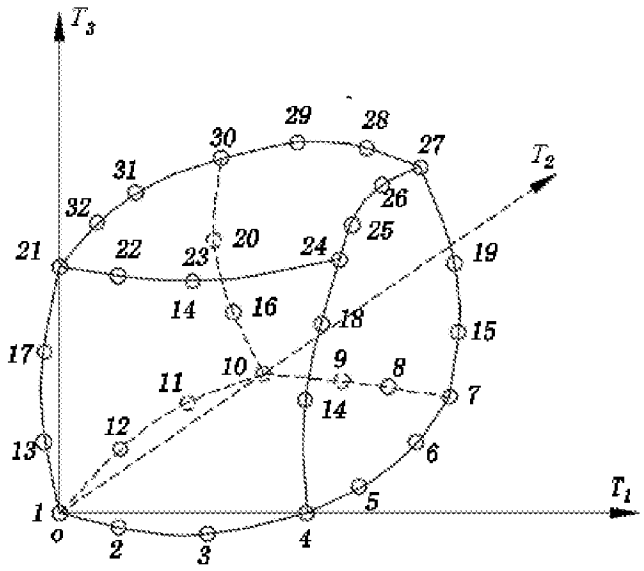

T_3
T_2
T_1
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

图 7（c）

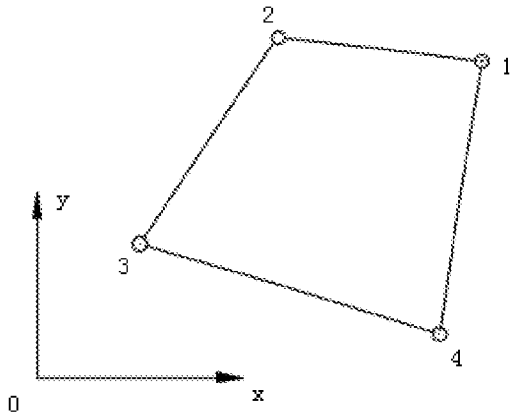


图 8（a）

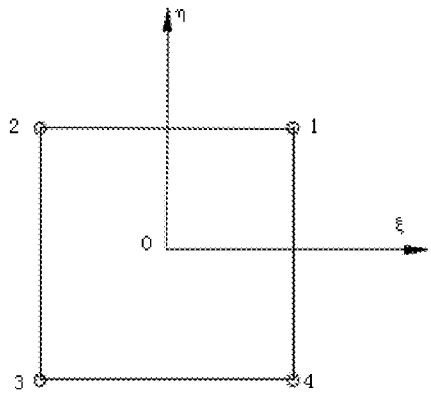
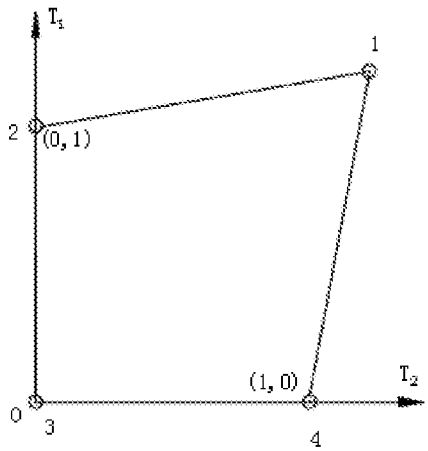


图 8（b）



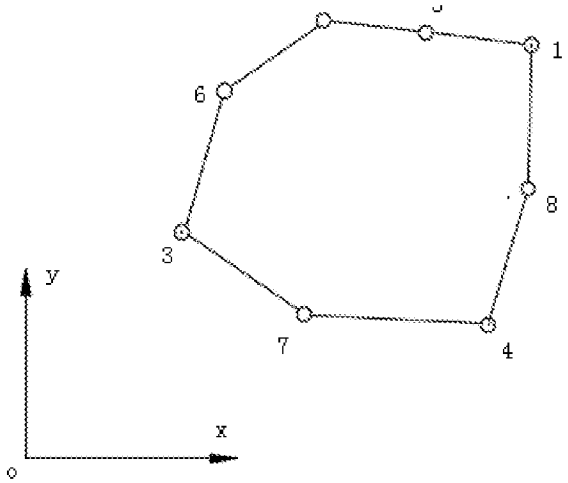


图 9（a）

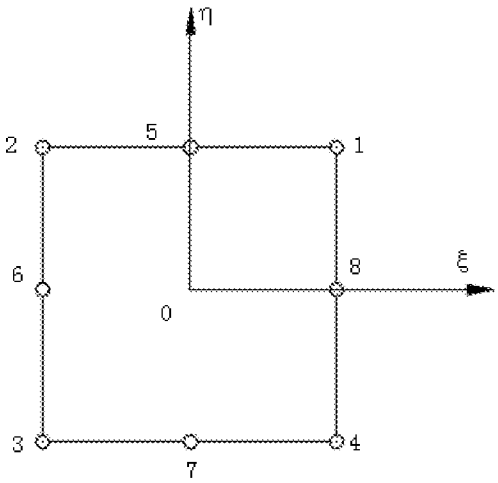
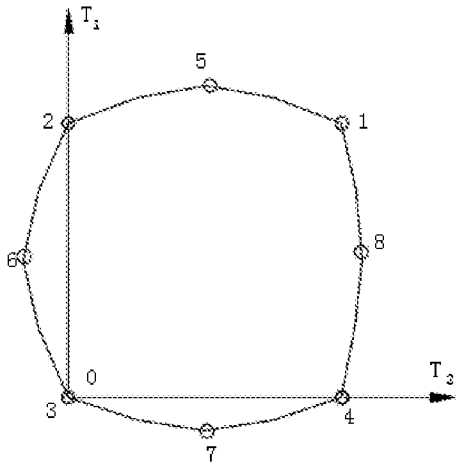


图 9（b）



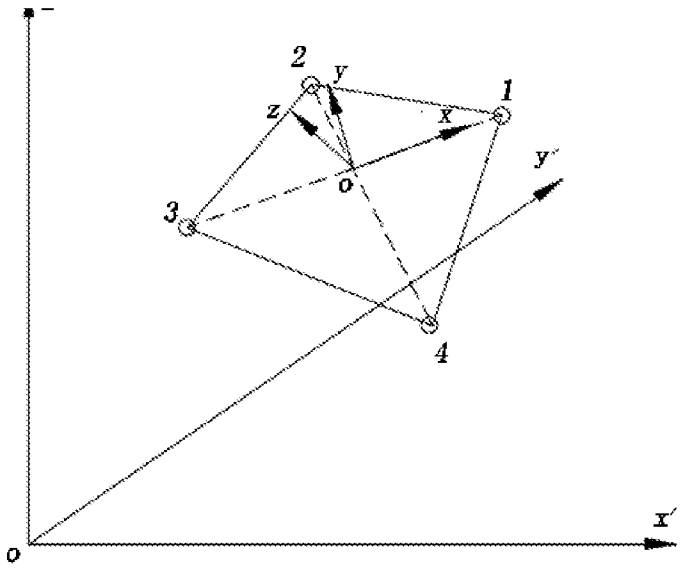


图 10（a）

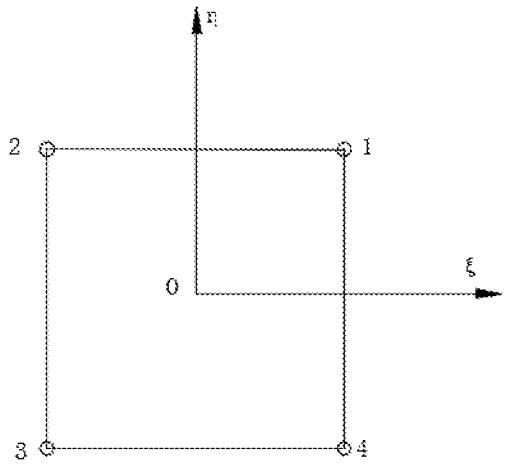
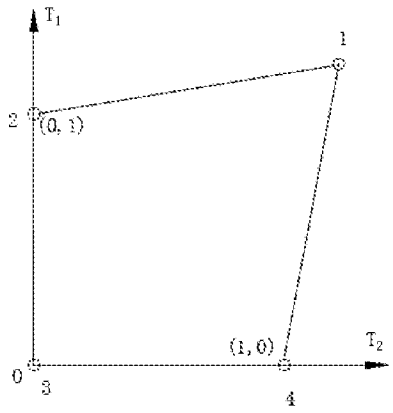


图 10（b）



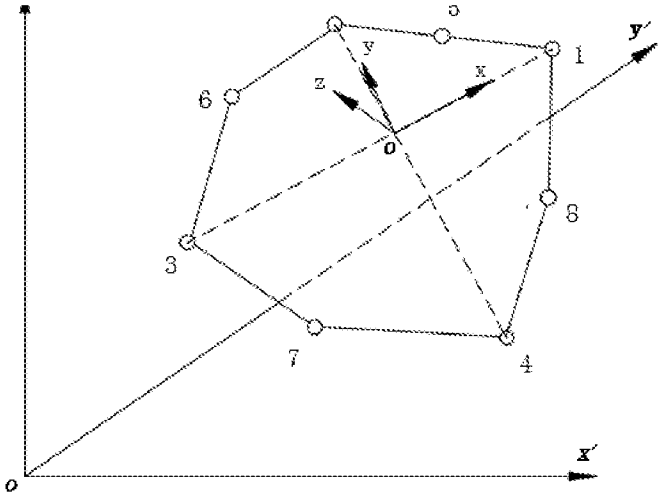


图 11（a）

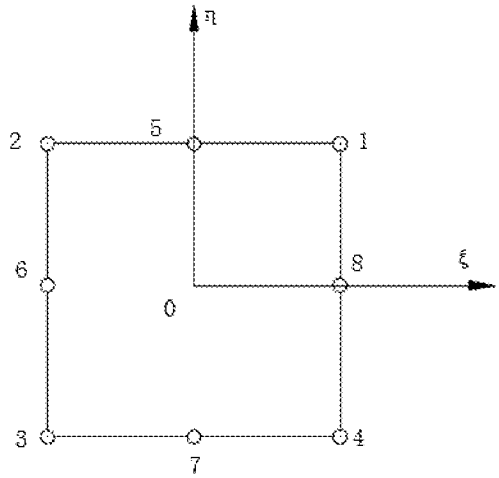
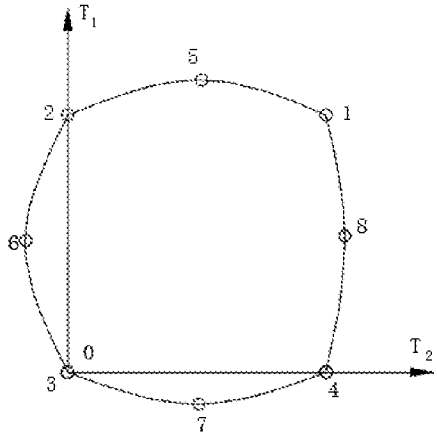


图 11（b）



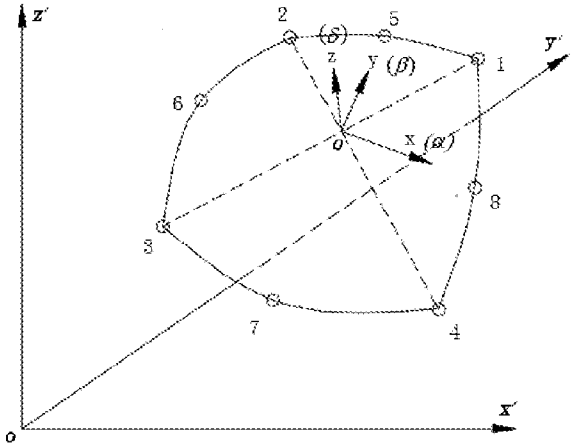


图 12（a）

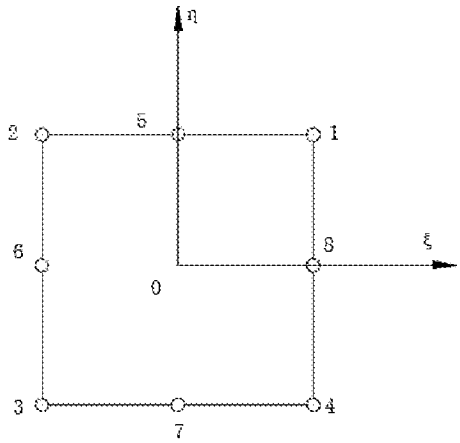


图 12（b）

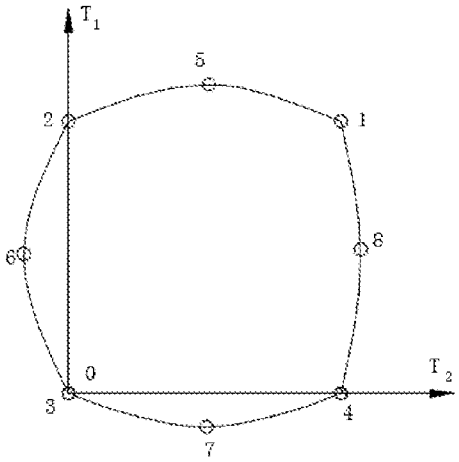


图 12（c）

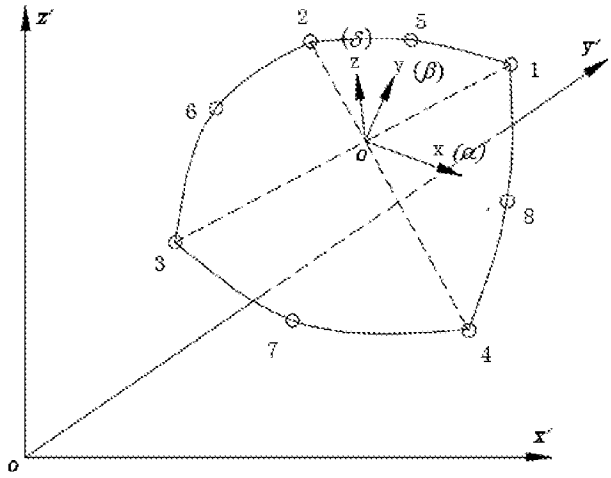


图 13（a）

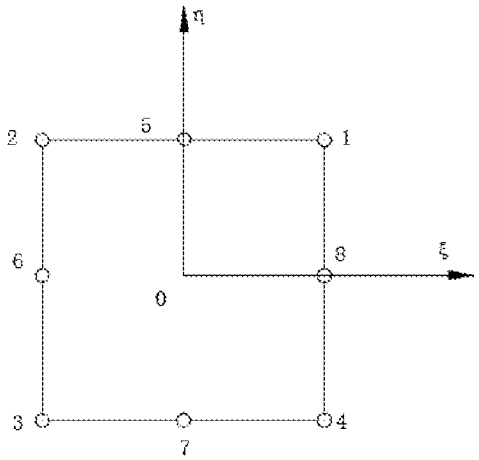
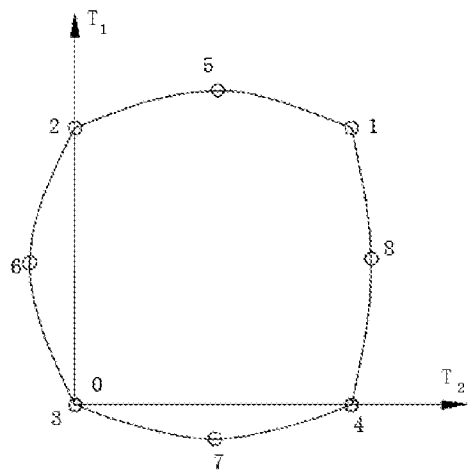


图 13（b）



INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.
PCT/CN2017/086830

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

G06F 17/15 (2006.01) i

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

G06F

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

EPODOC, WPI, CNPAT, IEEE, CNKI: 中南大学, 有限, 元, 位移, 插值, 函数, 场, 多项式, 完备, 等参, 线性, 混合, 坐标, 节点, 构造, 单元, finite element?, interpolation, function?, linear, reference

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	CN 104317985 A (DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY), 28 January 2015 (28.01.2015) abstract, and description, paragraphs [0055]-[0068]	1-7
A	CN 102682152 A (LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION), 19 September 2012 (19.09.2012), entire document	1-7
A	JP 2014153999 A (TOYOTA COMMUNICATION SYSTEM K.K.), 25 August 2014 (25.08.2014), entire document	1-7

☐ Further documents are listed in the continuation of Box C. ☒ See patent family annex.

* Special categories of cited documents:

"A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

"E" earlier application or patent but published on or after the international filing date

"L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

"O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

"P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

"T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

"X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

"Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art

"&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search	Date of mailing of the international search report
14 December 2017	25 January 2018
Name and mailing address of the ISA State Intellectual Property Office of the P. R. China No. 6, Xitucheng Road, Jimenqiao Haidian District, Beijing 100088, China Facsimile No. (86-10) 62019451	Authorized officer LI, Duo Telephone No. (86-10) 62413598

Form PCT/ISA/210 (second sheet) (July 2009)

INTERNATIONAL SEARCH REPORT
Information on patent family members

International application No.
PCT/CN2017/086830

Patent Documents referred in the Report	Publication Date	Patent Family	Publication Date
CN 104317985 A	28 January 2015	CN 104317985 B	24 May 2017
CN 102682152 A	19 September 2012	CN 102682152 B	03 August 2016
		US 2012226482 A1	06 September 2012
		US 8612186 B2	17 December 2013
JP 2014153999 A	25 August 2014	JP 5480413 B1	23 April 2014

国际检索报告

国际申请号
PCT/CN2017/086830

A. 主题的分类

G06F 17/15(2006.01)i

按照国际专利分类(IPC)或者同时按照国家分类和IPC两种分类

B. 检索领域

检索的最低限度文献(标明分类系统和分类号)

G06F

包含在检索领域中的除最低限度文献以外的检索文献

在国际检索时查阅的电子数据库(数据库的名称，和使用的检索词（如使用））

EPODOC，WPI，CNPAT，IEEE，CNKI：中南大学，有限，元，位移，插值，函数，场，多项式，完备，等参，线性，混合，坐标，节点，构造，单元，finite element?，interpolation，function?，linear，reference

C. 相关文件

类 型*	引用文件，必要时，指明相关段落	相关的权利要求
A	CN 104317985 A (大连理工大学) 2015年 1月 28日 (2015-01-28) 说明书摘要，说明书第[0055]-[0068]段	1-7
A	CN 102682152 A (利弗莫尔软件技术公司) 2012年 9月 19日 (2012-09-19) 全文	1-7
A	JP 2014153999 A (TOYOTA COMMUNICATION SYSTEM K.K.) 2014年 8月 25日 (2014-08-25) 全文	1-7

☐ 其余文件在C栏的续页中列出。

☑ 见同族专利附件。

* 引用文件的具体类型：

“A” 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件

“E” 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利

“L” 可能对优先权要求构成怀疑的文件，或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件（如具体说明的）

“O” 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件

“P” 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件

“T” 在申请日或优先权日之后公布，与申请不相抵触，但为了理解发明之理论或原理的在后文件

“X” 特别相关的文件，单独考虑该文件，认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性

“Y” 特别相关的文件，当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时，要求保护的发明不具有创造性

“&” 同族专利的文件

国际检索实际完成的日期	国际检索报告邮寄日期
2017年 12月 14日	2018年 1月 25日
ISA/CN的名称和邮寄地址 中华人民共和国国家知识产权局(ISA/CN) 中国北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 100088 传真号 (86-10)62019451	受权官员 李铎 电话号码 (86-10)62413598

表 PCT/ISA/210 (第2页) (2009年7月)

国际检索报告
关于同族专利的信息

国际申请号
PCT/CN2017/086830

检索报告引用的专利文件			公布日（年/月/日）	同族专利			公布日（年/月/日）
CN	104317985	A	2015年 1月 28日	CN	104317985	B	2017年 5月 24日
CN	102682152	A	2012年 9月 19日	CN	102682152	B	2016年 8月 3日
				US	2012226482	A1	2012年 9月 6日
				US	8612186	B2	2013年 12月 17日
JP	2014153999	A	2014年 8月 25日	JP	5480413	B1	2014年 4月 23日