(12) 特許協力条約に基づいて公開された国際出願

(19) 世界知的所有権機関
国際事務局

(43) 国際公開日
2021年7月1日(01.07.2021)

WIPO | PCT

(10) 国際公開番号
WO 2021/130867 A1

(51) 国際特許分類:
G06N 99/00 (2019.01)

(21) 国際出願番号： PCT/JP2019/050675

(22) 国際出願日： 2019年12月24日(24.12.2019)

(25) 国際出願の言語： 日本語

(26) 国際公開の言語： 日本語

(71) 出願人: 日本電信電話株式会社 (**NIPPON TELEGRAPH AND TELEPHONE CORPORATION**) [JP/JP]; 〒1008116 東京都千代田区大手町一丁目５番１号 Tokyo (JP).

(72) 発明者: 中村 健吾 (**NAKAMURA, Kengo**); 〒1808585 東京都武蔵野市緑町３丁目９－１１ ＮＴＴ知的財産センタ内 Tokyo (JP). 坂上 晋作 (**SAKAUE, Shinsaku**); 〒1808585 東京都武蔵野市緑町３丁目９－１１ ＮＴＴ知的財産センタ内 Tokyo (JP). 安田 宜仁(**YASUDA, Norihito**); 〒1808585 東京都武蔵野市緑町３丁目９－１１ ＮＴＴ知的財産センタ内 Tokyo (JP).

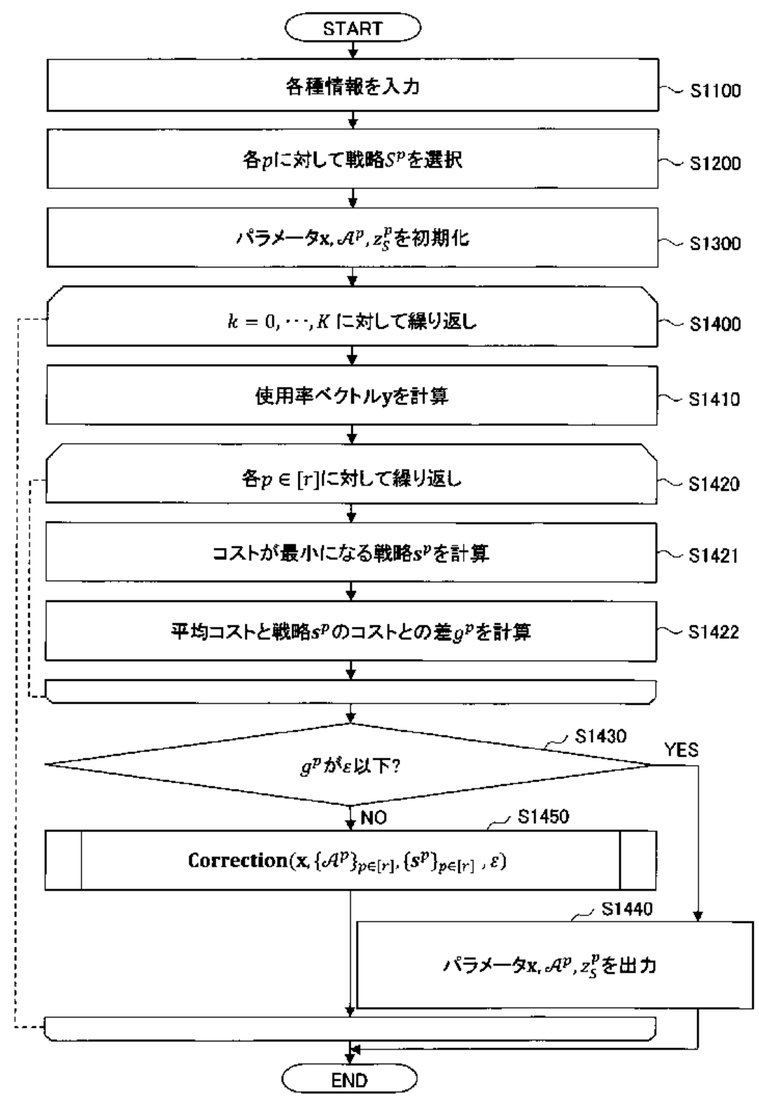
(74) 代理人: 伊東 忠重, 外(**ITOH, Tadashige** et al.); 〒1000005 東京都千代田区丸の内二丁目１番１号 丸の内 ＭＹ ＰＬＡＺＡ (明治安田生命ビル) １６階 Tokyo (JP).

(81) 指定国(表示のない限り、全ての種類の国内保護が可能): AE, AG, AL, AM, AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BN, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DJ, DK, DM, DO, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT,

(54) **Title:** EQUILIBRIUM CALCULATION DEVICE, EQUILIBRIUM CALCULATION METHOD, AND PROGRAM

(54) 発明の名称： 均衡状態計算装置、均衡状態計算方法及びプログラム

[図2]



S1100 Input various information
S1200 Select strategy S^p for each p
S1300 Initialize parameters x, A^p, Zps
S1400 Repeat k=0,⋯, K
S1410 Calculate use-of-rate vector y
S1420 Repeat each p ϵ [r]
S1421 Calculate strategy s^p of minimum cost
S1422 Calculate difference g^p between average cost and cost of strategy s^p
S1430 Is g^p equal to or smaller than ε?
S1440 Output parameters x, A^p, Zps

(57) **Abstract:** An equilibrium calculation device according to one embodiment of the present invention is an equilibrium calculation device for calculating equilibrium state of a congestion game. The equilibrium calculation device is characterized by comprising: an input means for inputting graph information representing, in a zero-suppression-type binary decision diagram, a set of strategies used by players of the congestion game and showing combinations of items; and a calculation means that uses the graph information input by the input means to calculate equilibrium state information including

［続葉有］

WO 2021/130867 A1

HN, HR, HU, ID, IL, IN, IR, IS, JO, JP, KE, KG, KH, KN, KP, KR, KW, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LU, LY, MA, MD, ME, MG, MK, MN, MW, MX, MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PA, PE, PG, PH, PL, PT, QA, RO, RS, RU, RW, SA, SC, SD, SE, SG, SK, SL, SM, ST, SV, SY, TH, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US, UZ, VC, VN, ZA, ZM, ZW.

(84) 指定国(表示のない限り、全ての種類の広域保護が可能): ARIPO (BW, GH, GM, KE, LR, LS, MW, MZ, NA, RW, SD, SL, ST, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), ユーラシア (AM, AZ, BY, KG, KZ, RU, TJ, TM), ヨーロッパ (AL, AT, BE, BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR, HU, IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, MK, MT, NL, NO, PL, PT, RO, RS, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, KM, ML, MR, NE, SN, TD, TG).

添付公開書類:

— 国際調査報告(条約第21条(3))

a proportion of the players having selected the strategies in the equilibrium state using a variant of Frank-Wolfe algorithm.

(57) 要約:一実施形態に係る均衡状態計算装置は、混雑ゲームの均衡状態を計算する均衡状態計算装置であって、前記混雑ゲームのプレイヤーが使用する戦略であって、アイテムの組合せで表される戦略の集合をゼロサプレス型二分決定図で表現したグラフ情報を入力する入力手段と、前記入力手段により入力されたグラフ情報を用いて、Frank-Wolfeアルゴリズムの変種により前記均衡状態において前記戦略を選んだプレイヤーの割合を含む均衡状態情報を計算する計算手段と、ことを特徴とする。

明　細　書

発明の名称 ：

均衡状態計算装置、均衡状態計算方法及びプログラム

技術分野

[0001] 本発明は、均衡状態計算装置、均衡状態計算方法及びプログラムに関する。

背景技術

[0002] ゲーム理論における非協力ゲームの１つとして混雑ゲーム（congestion game）が知られている。混雑ゲームとは、互いに協力しないプレイヤーたちがいくつかの資源を奪い合う状況又は互いに協力しないプレイヤーたちに資源を割り当てる状況をモデル化したものである。混雑ゲームの一種であるSelfish Routingでは、例えば通信量が多いほど遅延が増大する通信路からなる通信ネットワークにおいて多くの人（プレイヤー）が各々少ない遅延で２点間通信を行おうとする状況や、交通量が多いほど時間が掛かる道からなる道路ネットワークにおいてプレイヤーが各々短い時間で２点間を移動しようとする状況をモデル化できる。混雑ゲームはSelfish Routingをより一般化して、広範な戦略集合を扱えるようにしたもので、例えば、多くの人が各々少ない遅延で多点間通信を行おうとする状況や、２点間の通信でも通信路の遅延とは別に課金額が定められ、予算以下の課金額の通信ルートに制限して通信を行う状況も扱えるようになる。

[0003] ここで、混雑ゲームでは、アイテム集合［ｎ］：＝｛１，・・・，ｎ｝に対して、各プレイヤーはアイテムの組合せＳ⊆［ｎ］を選ぶことになる。ただし、どのようなアイテムの組合せを選べるかは予め決められていて、そのような組合せの集合が戦略集合であり、戦略集合の中身の各要素（つまり、アイテムの組合せ）は戦略と呼ばれる。各アイテムは選んだプレイヤーの割合が多いほどコストが高くなるように設定されており、プレイヤーが受けるコストは、選択した戦略中のアイテムのコストの和となる。このとき、各プ

レイヤーは互いに協力せず、各自勝手になるべくコストが小さい戦略を選ぼうとする。

[0004] 例えば、Selfish Routingは、通信ネットワークや道路ネットワーク等を抽象化したグラフ構造が与えられたときに、そのグラフ構造の各辺をアイテム、グラフ構造上の或る頂点から或る頂点までのパスが表すアイテムの組合せの集合を戦略集合とした混雑ゲームとなる。同様に、上述した多点間通信を各々行う状況は、グラフ構造上の或る頂点集合をターミナルとしたシュタイナー木を戦略集合とする混雑ゲームとしてモデル化できるし、一定以下の課金額に制限して通信を行う状況は、グラフ構造上の或る頂点から或る頂点までのパスの中で課金額を満たしたパスが表すアイテムの組合せの集合を戦略集合とする混雑ゲームとしてモデル化できる。

[0005] 混雑ゲームにおいて重要な状態として、均衡状態と呼ばれる状態がある。均衡状態とは、プレイヤーたちが不満に思わない状態のことであり、互いに協力しないプレイヤーたちが各自でコスト最小の状態に目指した結果として行き着く状態のことである。混雑ゲームにおける均衡状態を計算することができれば、例えば、通信ネットワークや道路ネットワークの設計時に、その設計により各通信路や道路にどの程度の混雑が発生するか、またプレイヤーの実際のコストがどの程度になるかをシミュレーションすることが可能となる。

[0006] これまでに、Selfish Routingにおける均衡状態を近似的に求める手法が提案されている。例えば、グラフ構造上のフローのアルゴリズムを繰り返し用いることで、Selfish Routingにおける均衡状態を理論上多項式時間で求める技術が提案されている（非特許文献１）。また、実用的な均衡状態の計算手法としては、Frank-Wolfeアルゴリズムと呼ばれる最適化アルゴリズムがよく知られている（非特許文献２及び３）。

[0007] また、戦略集合の各要素を全て保持した上でFrank-Wolfeアルゴリズムを用いることで、一般的な混雑ゲームにおける均衡状態を計算できることも知られている。

先行技術文献

非特許文献

[0008] 非特許文献1：Alex Fabrikant, Christos Papadimitriou, and Kunal Talwar. The complexity of pure Nash equilibria. In Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 604-612, 2004.

非特許文献2：Marguerite Frank and Philip Wolfe. An algorithm for quadratic programming. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, pp. 95-110.

非特許文献3：Jose R. Correa and Nicolas Stier-Moses. Wardrop Equilibria. In Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science.

発明の概要

発明が解決しようとする課題

[0009] しかしながら、戦略集合のような組合せの集合の要素数は、もとのアイテムの集合［ｎ］のサイズｎに対して最大で２ⁿとなり、一般にも指数的に大きくなることが多い。したがって、戦略集合の要素を全て保持するのは計算時間・メモリともに多大なコストを要し、例えば、ｎが数十程度でも実用上均衡状態を求めることが不可能になることが多い。

[0010] 本発明の一実施形態は、上記の点に鑑みてなされたもので、混雑ゲームの均衡状態を計算することを目的とする。

課題を解決するための手段

[0011] 上記目的を達成するため、一実施形態に係る均衡状態計算装置は、混雑ゲームの均衡状態を計算する均衡状態計算装置であって、前記混雑ゲームのプレイヤーが使用する戦略であって、アイテムの組合せで表される戦略の集合をゼロサプレス型二分決定図で表現したグラフ情報を入力する入力手段と、前記入力手段により入力されたグラフ情報を用いて、Frank-Wolfeアルゴリズムの変種により前記均衡状態において前記戦略を選んだプレイヤーの割合を

含む均衡状態情報を計算する計算手段と、ことを特徴とする。

発明の効果

[0012] 混雑ゲームの均衡状態を計算することができる。

図面の簡単な説明

[0013] [図1]本実施形態に係る均衡状態計算装置の全体構成の一例を示す図である。

[図2]本実施形態に係る均衡状態計算処理の一例を示すフローチャートである。

[図3]本実施形態に係るCorrection処理の一例を示すフローチャートである。

[図4]本実施形態に係る均衡状態計算装置のハードウェア構成の一例を示す図である。

発明を実施するための形態

[0014] 以下、本発明の一実施形態について説明する。本実施形態では、混雑ゲームの均衡状態を計算することが可能な均衡状態計算装置１０について説明する。

[0015] 本実施形態に係る均衡状態計算装置１０は、ゼロサプレス型二分決定図（Zero-suppressed Binary Decision Diagram，以降、「ＺＤＤ」と表記する。）をFrank-Wolfeアルゴリズムに組み入れることで、戦略集合に依存しない一般的な混雑ゲームの均衡状態を高速に計算可能にする。

[0016] 特に、本実施形態では、Frank-Wolfeアルゴリズムとして、その変種であるFully-corrective Frank-Wolfeアルゴリズム及びAway-step Frank-Wolfeアルゴリズムを用いる。これにより、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０は、その近似精度に保証がある均衡状態を求めることができる。

[0017] なお、ＺＤＤは、戦略集合のような組合せ集合をコンパクトに表現できる構造である。例えば、グラフ構造上の或る頂点から或る頂点までのパスの集合、シュタイナー木の集合、課金額の制約を満たすパスの集合等はいずれもＺＤＤで表現することが可能である。組合せ集合を表現するＺＤＤは、例えば、フロンティア法（Frontier-based method）等で構築することが可能である。また、フロンティア法を用いたライブラリとしてGraphillion等が知られ

ており、このようなライブラリを利用することで効率的にＺＤＤを構築することが可能である。フロンティア法については、例えば、参考文献１「Jun Kawahara, Takeru Inoue, Hiroaki Iwashita, and Shin-ichi Minato. Frontier-based search for enumerating all constrained subgraphs with compressed representation. IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E100-A, pp. 1773-1784, 2017.」等を参照されたい。Graphillionについては、例えば、参考文献２「GitHub - takemaru-graphillion Fast, lightweight graphset operation library, インターネット＜ＵＲＬ：https://github.com/takemaru/graphillion/＞」等を参照されたい。

[0018] また、ＺＤＤについては、例えば、参考文献３「Shin-ichi Minato. Zero-suppressed BDDs for set manipulation in combinatorial problems. In Proceedings of the 30th ACM/IEEE Design Automation Conference, pp. 272-277, 1993.」等を参照されたい。Fully-corrective Frank-Wolfeアルゴリズム及びAway-step Frank-Wolfeアルゴリズムについては、例えば、参考文献４「Simon Lacoste-Julien and Martin Jaggi. On the global linear convergence of Frank-Wolfe optimization variants. In Proceedings of the 28th International Conference on Neural Information Processing Systems, Vol. 1, pp. 496-504, 2015.」等を参照されたい。

[0019] ＜混雑ゲーム＞

まず、混雑ゲームについて説明する。混雑ゲームでは、アイテム集合［ｎ］：＝｛１，・・・，ｎ｝の各アイテムに対して、その使用率y_iに関して単調非減少なコスト関数$c_i(y_i)$が与えられる。また、アイテム集合［ｎ］に対して、各プレイヤーはアイテムの組合せＳ⊆［ｎ］を選ぶことになる。ただし、どのようなアイテムの組合せを選べるかは予め決められていて、そのような組合せの集合が戦略集合

[0020]

[数1]

$$\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{|\mathcal{S}|}\}$$

である。また、戦略集合の中身の各要素（つまり、アイテムの組合せ）は戦略と呼ばれる。本実施形態で扱う混雑ゲームでは、プレイヤーは無数に多くいて、各戦略Ｓに対してその戦略を選んだプレイヤーの割合ｚ$_S$を考えることとする。なお、

[0021] [数2]

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} z_S = 1$$

である。

[0022] 各戦略に対してその戦略を選択したプレイヤーの割合が決まると、アイテムｉの使用率ｙ$_i$は、アイテムｉを含む戦略を選んだプレイヤーの割合の和、すなわち、

[0023] [数3]

$$y_i = \sum_{S \in \mathcal{S}: i \in S} z_S$$

で求まる。そして、戦略Ｓのコストをｃ$_S$と表すことにすると、これは戦略Ｓに含まれるアイテムのコストの和、すなわち、

[0024]

[数4]

$$c_S = \sum_{i \in S} c_i(y_i)$$

により求まる。このとき、各プレイヤーは互いに協力せず、各自勝手になるべくコストが小さい戦略を選ぼうとする。すると、もし或るプレイヤーについて、今選んでいる戦略よりもコストが小さい戦略があれば、その戦略を選び直すことでよりコストを小さくすることができるため、当該プレイヤーは戦略を変えることになる。このような戦略の変更が起こらない状態がWardrop均衡状態と呼ばれる均衡状態である。Wardrop均衡状態は、プレイヤーの割合が０より大きい戦略についてはコストが全戦略中で最小になっている状態、すなわち、

[0025] [数5]

$$\text{全ての } S \in \mathcal{S} \text{ に対して，} z_S > 0 \Rightarrow c_S = \min_{S' \in \mathcal{S}} c_{S'}$$

が成立している状態と定義される。

[0026] 上述した混雑ゲームをより一般化して、プレイヤーによって違った戦略集合を使う場合について説明する。この場合、ｒ個のプレイヤー群の集合を［ｒ］と表記すれば、戦略集合は１つではなく、複数種類のｒ個の戦略集合

[0027]

[数6]

$$\mathcal{S}^1, \ldots, \mathcal{S}^r$$

が与えられ、各々の戦略集合を使うプレイヤーの割合ｍ[1]，・・・，ｍ[r]も同時に与えられるものとする。プレイヤー群とは０以上のプレイヤーの集合である。なお、

[0028] [数7]

$$\sum_{p=1}^{r} m^r = 1$$

である。

[0029] この状況では、各プレイヤー群ｐ∈［ｒ］に対して、各戦略

[0030] [数8]

$$S \in \mathcal{S}^p$$

についてその戦略を選んだプレイヤーの割合ｚ$_S$[p]を考えることになる。なお

、

[0031]

[数9]

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} z_S^p = 1$$

である。

[0032] 上記の割合z_S^pが決まれば、

[0033] [数10]

$$x_i^p = \sum_{S \in \mathcal{S}^p : i \in S} z_S^p$$

とおくことで、各アイテムの使用率は

[0034] [数11]

$$y_i = \sum_{p=1}^{r} m^p x_i^p$$

と計算することができる。したがって、戦略Ｓのコストは、

[0035] [数12]

$$c_S = \sum_{i \in S} c_i(y_i)$$

と計算することができる。このときのWardrop均衡状態とは、プレイヤーの割

合が０より大きい戦略についてはコストが該当の戦略集合の戦略中で最小になっている状態、すなわち、

[0036] [数13]

$$\text{全ての}\ p=1,\ldots,r\ \text{と全ての}\ S\in\mathcal{S}^p\ \text{に対して，}\ z_S^p>0\Rightarrow c_S=\min_{S'\in\mathcal{S}^p}c_{S'}$$

が成立している状態と定義される。

[0037] 本実施形態では、プレイヤーによって違った戦略集合を使う混雑ゲームを想定して、その均衡状態としてε-近似Wardrop均衡状態を求めるものとする。ε-近似Wardrop均衡状態とは、プレイヤーの割合が０より大きい戦略についてはコストが、該当の戦略集合の戦略中で最小のコストよりも許容誤差ε以上大きいことはない状態、すなわち、

[0038] [数14]

$$\text{全ての}\ p=1,\ldots,r\ \text{と全ての}\ S\in\mathcal{S}^p\ \text{に対して，}\ z_S^p>0\Rightarrow c_S\leq\min_{S'\in\mathcal{S}^p}c_{S'}+\varepsilon$$

が成立している状態と定義される。これは、Wardrop均衡状態に対してその近似誤差がε以内であることを保証していることを意味する。

[0039] また、$1_S\in\{0,1\}^n$をアイテムｉ∈［ｎ］が戦略Ｓに含まれていれば（つまり、ｉ∈Ｓであれば）ｉ番目の要素が１、そうでなければｉ番目の要素が０であるｎ次元ベクトルとする。このｎ次元ベクトル1_Sを用いれば、上記のx_i^pをｉ番目の要素するｎ次元ベクトルx^pは、

[0040]

[数15]

$$\boldsymbol{x}^p = \sum_{S \in \mathcal{S}^p} z_S^p \mathbf{1}_S \in [0,1]^n$$

と表すことができる。また、このｎ次元ベクトルｘ^{p}を用いれば、上記の使用率ｙ$_{i}$をｉ番目の要素とするｎ次元ベクトルｙは、

[0041] [数16]

$$\boldsymbol{y} = \sum_{p \in [r]} m^p \boldsymbol{x}^p$$

と表すことができる。したがって、戦略Ｓのコストｃ$_{S}$をベクトルｙの関数と見做した場合、

[0042] [数17]

$$c_S(\boldsymbol{y}) = \sum_{i \in S} c_i(y_i)$$

と表すことができる。また、このコスト関数コストｃ$_{S}$（・）を用いれば、

[0043] [数18]

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^r)$$

として、Ｒ^{rn}上のコスト関数Ｃ$_S$を

[0044] [数19]

$$C_S(\boldsymbol{x}) \coloneqq c_S(\sum_{p\in[r]} m^p \boldsymbol{x}^p)$$

と定義することができる。

[0045] また、ポテンシャル関数Φ：Ｒ^n→Ｒを

[0046] [数20]

$$\Phi(\boldsymbol{y}) \coloneqq \sum_{i\in[n]} \int_0^{y_i} c_i(\theta)\mathrm{d}\theta$$

と定義する。本実施形態では、ＺＤＤで表現した戦略集合とFrank-Wolfeアルゴリズムの変種とを用いて、このポテンシャル関数Φに関する最小化問題を解くことで、ε-近似Wardrop均衡状態を求める。なお、

[0047] [数21]

$$c_i(\boldsymbol{y}) = \nabla\Phi(\boldsymbol{y})_i,\ c_S(\boldsymbol{y}) = \nabla\Phi(\boldsymbol{y})^\top \mathbf{1}_S$$

である。ただし、∇Φ（ｙ）$_i$は∇Φ（ｙ）のｉ番目の要素（つまり、Φのｙ$_i$に関する偏微分）を表す。

[0048] ＜全体構成＞

次に、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０の全体構成について、図１

を参照しながら説明する。図１は、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０の全体構成の一例を示す図である。

[0049] 図１に示すように、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０は、入力部１０１と、最適化部１０２と、出力部１０３と、記憶部１０４とを有する。

[0050] 記憶部１０４には、混雑ゲームにおけるε-近似Wardrop均衡状態の計算に必要な各種情報が記憶されている。記憶部１０４に記憶されている情報としては、例えば、アイテム集合［ｎ］、各アイテムのコスト関数ｃ$_{i}$（ｙ$_{i}$）、１以上の戦略集合の各々をＺＤＤで表現した情報、プレイヤー群の集合［ｒ］、各戦略集合を使うプレイヤーの割合ｍ^{1}，・・・，ｍ^{r}、許容誤差ε等がある。以降では、ＺＤＤで表現された戦略集合を

[0051] [数22]

$$Z_{S^1}, \ldots, Z_{S^r}$$

と表す。なお、上記の情報以外にも、記憶部１０４には、ε-近似Wardrop均衡状態の計算過程等の情報が記憶されてもよい。

[0052] ここで、戦略集合を表すＺＤＤは、ノード集合とノード間を接続する有向エッジのエッジ集合とで構成される有向非巡回グラフ（ＤＡＧ：Directed Acyclic Graph））である。ノード集合の中には、アイテムを表すノードｖの他に、終端ノード⊥と終端ノード

[0053] [数23]

$$\top$$

とが含まれる。また、各ノードｖからは「０－枝」及び「１－枝」と呼ばれる２つのエッジが出る。本実施形態では、ノードｖから出る１－枝が指す先のノードを１－子ノードと呼び、v_1で表す。同様に、ノードｖから出る０－枝が指す先のノードを０－子ノードと呼び、v_0で表す。また、各ノードｖのうちの根ノードをノードｒとも表す。

[0054] 更に、各ノードｖには、ラベルと呼ばれる整数値$l_v \in \{1, \cdots, n\}$が付与されており、このラベルによってアイテムとノードとが対応付けられている。なお、終端ノードについては、例えば、ラベルの値をｎ＋１等としておけばよい。

[0055] このとき、ＺＤＤは、各ノードの０－枝と１－枝が、必ずラベルが小さい方のノードから大きい方のノードに向かうようにする。すなわち、任意のノードｖに対して、（ノードｖのラベル）＜（ノードv_0のラベル）かつ（ノードｖのラベル）＜（ノードv_1のラベル）が成立するようにする。これにより、ＺＤＤはラベルの値で階層化され、例えば、第１層目に含まれるノード（つまり、ノードｒ）はアイテム１に対応し、第２層目に含まれるノードｖはアイテム２に対応する。このように、ＺＤＤの第ｉ層目に含まれるノードｖは、アイテムｉに対応することになる。

[0056] したがって、根ノードｒから終端ノードへの各パス（経路）でアイテムの組合せ（つまり、戦略）を表現することができる。すなわち、ノードｖからノードv_1へのエッジがパスに含まれる場合は当該ノードｖのラベルに対応するアイテムが戦略に含まれ、ノードｖからノードv_0へのエッジがパスに含まれる場合は当該ノードｖのラベルに対応するアイテムは戦略に含まれないとすることで、パスで組合せ（戦略）を表現することができる。

[0057] 入力部１０１は、アイテム集合［ｎ］、各アイテムのコスト関数$c_i(y_i)$、ＺＤＤで表現された１以上の戦略集合、プレイヤー群の集合［ｒ］、各戦略集合を使うプレイヤーの割合$m^1, \cdots, m^r$、許容誤差ε等の各種情報を入力する。

[0058] 最適化部１０２は、Fully-corrective Frank-Wolfeアルゴリズムに基づく

処理によりε-近似Wardrop均衡状態における各種情報を求める。より具体的には、最適化部１０２は、入力部１０１により入力された各種情報を用いてポテンシャル関数Φに関する最小化問題を解くことで、ε-近似Wardrop均衡状態における各種情報を求める。これにより、ε-近似Wardrop均衡状態において各戦略Ｓを選んだプレイヤーの割合z_S^pが得られる。

[0059] 出力部１０３は、最適化部１０２により求めた各種情報（例えば、ε-近似Wardrop均衡状態において各戦略Ｓを選んだプレイヤーの割合z_S^p等）を出力する。なお、出力部１０３の出力先は限定されず、任意の出力先としてよい。例えば、出力部１０３の出力先は、記憶部１０４であってもよいし、ディスプレイ等の表示装置であってもよいし、通信ネットワークを介して接続されるデータベースサーバ等であってもよい。

[0060] ここで、最適化部１０２には、初期設定部１１１と、最短経路計算部１１２と、更新部１１３とが含まれる。

[0061] 初期設定部１１１は、Frank-Wolfeアルゴリズムの変種で更新対象となる各種変数（パラメータ）の初期化等を行う。パラメータは、上述したｎ次元ベクトルx^p、各プレイヤーが現在選択している戦略Ｓの集合を表すアクティブ集合、及び各戦略Ｓを選んだプレイヤーの割合z_S^pである。

[0062] 最短経路計算部１１２は、戦略集合を表すＺＤＤ上の最短経路を動的計画法により計算することで、戦略集合の中でコストが最小になる戦略を計算する。

[0063] 更新部１１３は、Away-step Frank-Wolfeアルゴリズムに基づくCorrection処理により、各種パラメータの更新を行う。

[0064] ＜均衡状態計算処理＞

次に、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０によって混雑ゲームのε-近似Wardrop均衡状態を計算する均衡状態処理について、図２を参照しながら説明する。図２は、本実施形態に係る均衡状態計算処理の一例を示すフローチャートである。

[0065] ステップＳ１１００では、入力部１０１は、各種情報（アイテム集合［ｎ

］、各アイテムのコスト関数ｃ ｉ（ｙ ｉ）、ＺＤＤで表現された１以上の戦略集合、プレイヤー群の集合［ｒ］、各戦略集合を使うプレイヤーの割合ｍ 1，・・・，ｍ r、許容誤差ε等）を入力する。

[0066] ステップＳ１２００では、最適化部１０２は、初期設定部１１１により、各ｐ∈［ｒ］に対して、戦略

[0067] [数24]

$$S^p \in \mathcal{S}^p$$

を選択する。これらの戦略Ｓ pが、プレイヤー群ｐが最初に選択した戦略となる。

[0068] ステップＳ１３００では、最適化部１０２は、初期設定部１１１により、各種パラメータ（ｎ次元ベクトルｘ 0 p、アクティブ集合、各戦略Ｓを選んだプレイヤーの割合ｚ S p）のそれぞれを以下のように初期化する。

[0069] [数25]

$$\boldsymbol{x}_0^p = \mathbf{1}_{S^p}, \mathcal{A}_0^p = \{S^p\}, z_{S^p}^p = 1$$

また、簡単のため、

[0070] [数26]

$$\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{x}_0^1, \ldots, \boldsymbol{x}_0^r)$$

と表記する。

[0071] ステップＳ１４００では、最適化部１０２は、繰り返し回数を表すインデックスをｋとして、ｋ＝０，１，・・・，Ｋに対してステップＳ１４１０～ステップＳ１４５０を繰り返し実行する。Ｋは予め設定されたハイパーパラメータである。なお、以降のステップＳ１４１０～ステップＳ１４５０では、繰り返し回数がｋ回目である場合について説明し、ｚを除く各種記号の右下の添え字は繰り返し回数を表すものとする。例えば、ｎ次元ベクトルy_kは、繰り返し回数がｋ回目のときのｎ次元ベクトルｙを表す。

[0072] ステップＳ１４１０では、最適化部１０２は、使用率y_iをｉ番目の要素とするｎ次元ベクトルy_kを

[0073] [数27]

$$\boldsymbol{y}_k = \sum_{p\in[r]} m^p \boldsymbol{x}_k^p$$

により計算する。

[0074] ステップＳ１４２０では、最適化部１０２は、各ｐ∈［ｒ］に対して、ステップＳ１４２１～ステップＳ１４２２を繰り返し実行する。なお、以降のステップＳ１４２１～ステップＳ１４２２では、或るｐに関するステップＳ１４２１～ステップＳ１４２２について説明する。

[0075] ステップＳ１４２１では、最適化部１０２は、最短経路計算部１１２により、ＺＤＤ

[0076] [数28]

$$Z_{S^p}$$

上の最短経路を動的計画法により計算することで、ｐに対応する戦略集合の中でコストが最小となる戦略ｓ$_{k}^{p}$を計算する。すなわち、最短経路計算部１１２は、ｐに対応する戦略集合を表現するＺＤＤ上の最短経路を計算することで、

[0077] [数29]

$$s_k^p \in \mathrm{argmin}_{u \in \mathcal{S}^p} \langle \nabla \Phi(y_k), u \rangle$$

を計算する。なお、＜・，・＞は内積を表す。

[0078] 具体的には、最短経路計算部１１２は、次のようにして戦略ｓ$_{k}^{p}$を計算する。

[0079] まず、最短経路計算部１１２は、ＺＤＤの各ノードｖに対して、０－枝の距離を０、１－枝の距離を

[0080] [数30]

$$\nabla \Phi(y_k)_{l_v}$$

とする。つまり、ノードｖの１－枝の距離を、当該ノードｖのラベルに対応するアイテムのコストとする。

[0081] そして、最短経路計算部１１２は、根ノードｒから終端ノードへのパスであって、その距離の合計が最小となるパス（最短経路）を動的計画法により計算する。これにより、ＺＤＤ上で距離が最小となるパスで表されるアイテムの組合せが、ｐに対応する戦略集合の中でコストが最小となる戦略ｓ$_{k}^{p}$として得られる。なお、ＺＤＤ等の有向非巡回グラフ上の最短経路を計算する

方法は広く知られており、例えば、参考文献５「渋谷哲朗，”情報工学 アルゴリズム”，丸善出版，2016年11月」等を参照されたい。

[0082] ステップＳ１４２２では、最適化部１０２は、現在の状態においてｐに対応する戦略集合を使用しているプレイヤーの平均コストと、この戦略集合の中でコスト最小の戦略（つまり、戦略s_k^p）のコストとの差g_k^pを計算する。すなわち、最適化部１０２は、

[0083] [数31]

$$\boldsymbol{d}_k^p = \boldsymbol{s}_k^p - \boldsymbol{x}_k^p$$

として、

[0084] [数32]

$$g_k^p = \langle -\nabla\Phi(\boldsymbol{y}_k), \boldsymbol{d}_k^p \rangle$$

を計算する。

[0085] なお、$<-\nabla\Phi(y_k), d_k^p>=<\nabla\Phi(y_k), x_k^p>-<\nabla\Phi(y_k), s_k^p>$であり、$<\nabla\Phi(y_k), x_k^p>$はｐに対応する戦略集合を使用しているプレイヤーの平均コストを表しており、$<\nabla\Phi(y_k), s_k^p>$は戦略s_k^pのコストを表している。

[0086] ステップＳ１４３０では、最適化部１０２は、全ての$p \in [r]$に対して、平均コストとコスト最小の戦略のコストとの差g_k^pが許容誤差ε以下であるか否かを判定する。すなわち、最適化部１０２は、

[0087]

[数33]

$$\max_{p\in[r]} g_k^p \leq \epsilon$$

を満たすか否かを判定する。

[0088] 全てのｐ∈［ｒ］に対してｇ$_k$^{p}が許容誤差εが以下であると判定された場合（ステップＳ１４３０でＹＥＳ）はステップＳ１４４０が実行され、そうでなければ（ステップＳ１４３０でＮＯ）ステップＳ１４４０は実行されない。

[0089] ステップＳ１４４０では、出力部１０３は、現時点のパラメータ

[0090] [数34]

$$\boldsymbol{x}_k, \{\mathcal{A}_k^p\}_{p\in[r]}, \{\{z_S^p\}_{S\in\mathcal{A}_k^p}\}_{p\in[r]}$$

を出力する。これらのパラメータは、それぞれ、ε-近似Wardrop均衡状態におけるｎ次元ベクトルｘ、アクティブ集合及び各戦略を選んだプレイヤーの割合である。なお、これらのパラメータがε-近似Wardrop均衡状態を満たす理由については後述する。

[0091] ステップＳ１４５０では、最適化部１０２は、更新部１１３によりCorrection処理を実行して各種パラメータの更新を行う。すなわち、最適化部１０２は、サブルーチン

[0092]

[数35]

$$\textbf{Correction}(\boldsymbol{x}_k, \{\mathcal{A}_k^p\}_{p\in[r]}, \{\boldsymbol{s}_k^p\}_{p\in[r]}, \epsilon)$$

を呼び出して、更新後のパラメータ

[0093] [数36]

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{x}_{k+1}^1, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+1}^r), \{\mathcal{A}_{k+1}^p\}_{p\in[r]}, \{\{z_S^p\}_{S\in\mathcal{A}_{k+1}^p}\}_{p\in[r]}$$

を得る。

[0094] ＜Correction処理＞

ここで、上記のステップＳ１４５０のCorrection処理の詳細について、図３を参照しながら説明する。図３は、本実施形態に係るCorrection処理の一例を示すフローチャートである。なお、以降では、簡単のため、図２のステップＳ１４００におけるインデックスｋを省略して、サブルーチン

[0095] [数37]

$$\textbf{Correction}(\boldsymbol{x}, \{\mathcal{A}^p\}_{p\in[r]}, \{\boldsymbol{s}^p\}_{p\in[r]}, \epsilon)$$

が呼び出されたものとして説明をする。なお、$x_0 = x = (x^1, \cdots, x^r)$とする。

[0096] ステップＳ２１００では、更新部１１３は、各ｐ∈［ｒ］に対して、ステ

ップＳ２１１０を繰り返し実行する。なお、以降のステップＳ２１１０では、或るｐに関するステップＳ２１１０について説明する。

[0097] ステップＳ２１１０では、更新部１１３は、

[0098] [数38]

$$\mathcal{A}_0^p = \mathcal{A}^p$$

として、新たな戦略集合

[0099] [数39]

$$\mathcal{B}^p = \mathcal{A}^p \cup \{s^p\}$$

を作成する。

[0100] ステップＳ２２００では、更新部１１３は、繰り返し回数を表すインデックスをｌとして、ｌ＝０，１，・・・，Ｌに対してステップＳ２２１０～ステップＳ２２８０を繰り返し実行する。Ｌは予め設定されたハイパーパラメータである。なお、以降のステップＳ２２１０～ステップＳ２２８０では、繰り返し回数がｌ回目である場合について説明し、ｚを除く各種記号の右下の添え字は繰り返し回数を表すものとする。例えば、ｎ次元ベクトルｙ｜は、繰り返し回数がｌ回目のときのｎ次元ベクトルｙを表す。

[0101] ステップＳ２２１０では、更新部１１３は、使用率ｙ｡をｉ番目の要素とするｎ次元ベクトルｙ｜を

[0102]

[数40]

$$\boldsymbol{y}_l = \sum_{p\in[r]} m^p \boldsymbol{x}_l^p$$

により計算する。

[0103] ステップＳ２２２０では、更新部１１３は、各ｐ∈［ｒ］に対して、ステップＳ２２２１を繰り返し実行する。ただし、ステップＳ２２４０が実行された場合は、Correction処理を終了し、サブルーチンの呼び出し元に戻る。なお、以降のステップＳ２２２１では、或るｐに関するステップＳ２２２１について説明する。

[0104] ステップＳ２２２１では、更新部１１３は、現時点において、ｐに対応する新たな戦略集合の中でコストが最小になる戦略ｓ｜ｐと、ｐに対応するアクティブ集合の中でコストが最大になる戦略ｖ｜ｐとを計算する。具体的には、更新部１１３は、

[0105] [数41]

$$\boldsymbol{s}_l^p \in \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{B}^p} \langle \nabla\Phi(\boldsymbol{y}_l), \boldsymbol{u}\rangle$$

$$\boldsymbol{v}_l^p \in \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}_l^p} \langle \nabla\Phi(\boldsymbol{y}_l), \boldsymbol{u}\rangle$$

を計算する。また、このとき、更新部１１３は、

[0106]

[数42]

$$\boldsymbol{d}_l^{p,\mathrm{FW}} = \boldsymbol{s}_l^p - \boldsymbol{x}_l^p$$

$$\boldsymbol{d}_l^{p,\mathrm{A}} = \boldsymbol{x}_l^p - \boldsymbol{v}_l^p$$

も計算する。ここで、ｄ｜ｐ，ＦＷはｘｐからコスト最小の戦略ｓ｜ｐに向かう方向を表し、ｄ｜ｐ，Ａはｘｐからコスト最大の戦略ｖ｜ｐに向かう方向と逆方向を表す。

[0107] なお、上記のステップＳ２２２１において、更新部１１３は、各戦略に対するコストを計算することで、戦略ｓ｜ｐと戦略ｖ｜ｐとを計算すればよい。これは、ｐに対応する戦略集合と比較して、ｐに対応する新たな戦略集合やアクティブ集合の大きさは非常に小さい（せいぜいＯ（ｎ）程度）ためである。

[0108] ステップＳ２２３０では、更新部１１３は、全てのｐ∈［ｒ］に対して、戦略ｖ｜ｐのコストと戦略ｓ｜ｐのコストとの差が許容誤差ε以下であるか否かを判定する。すなわち、更新部１１３は、

[0109] [数43]

$$\max_{p\in[r]} \left\langle -\nabla\Phi(\boldsymbol{y}_l), \boldsymbol{d}_l^{p,\mathrm{FW}} + \boldsymbol{d}_l^{p,\mathrm{A}} \right\rangle \leq \epsilon$$

を満たすか否かを判定する。なお、上記の内積部分は＜∇Φ（ｙ｜），ｖ｜ｐ＞－＜∇Φ（ｙ｜），ｓ｜ｐ＞であり、＜∇Φ（ｙ｜），ｖ｜ｐ＞は戦略ｖ｜ｐのコスト、＜∇Φ（ｙ｜），ｓ｜ｐ＞は戦略ｓ｜ｐのコストをそれぞれ表している。

[0110] 全てのｐ∈［ｒ］に対して戦略ｖ｜ｐのコストと戦略ｓ｜ｐのコストとの差が許容誤差ε以下であると判定された場合（ステップＳ２２３０でＹＥＳ）は

ステップＳ２２４０が実行され、そうでなければ（ステップＳ２２３０でＮＯ）ステップＳ２２５０～ステップＳ２２８０が実行される。

[0111] ステップＳ２２４０では、更新部１１３は、パラメータ

[0112] [数44]

$$\boldsymbol{x}_l, \{\mathcal{A}_l^p\}_{p\in[r]}$$

をそれぞれ

[0113] [数45]

$$\boldsymbol{x}_{k+1}, \{\mathcal{A}_{k+1}^p\}_{p\in[r]}$$

として、現時点のパラメータ

[0114] [数46]

$$\boldsymbol{x}_{k+1}, \{\mathcal{A}_{k+1}^p\}_{p\in[r]}, \{\{z_S^p\}_{S\in\mathcal{B}^p}\}_{p\in[r]}$$

を出力（つまり、サブルーチンの呼び出し元に出力）する。そして、更新部１１３は、Correction処理を終了し、サブルーチンの呼び出し元に戻る。

[0115] ステップＳ２２５０では、更新部１１３は、

[0116]

[数47]

$$g_l^{\mathrm{FW}} = \sum_{p\in[r]} m^p \left\langle -\nabla\Phi(\boldsymbol{y}_l), \boldsymbol{d}_l^{p,\mathrm{FW}} \right\rangle$$
$$g_l^{\mathrm{A}} = \sum_{p\in[r]} m^p \left\langle -\nabla\Phi(\boldsymbol{y}_l), \boldsymbol{d}_l^{p,\mathrm{A}} \right\rangle$$

によりg_l^{FW}及びg_l^{A}を計算する。

[0117] ステップＳ２２６０では、更新部１１３は、g_l^{FW}及びg_l^{A}の大小関係に応じて、d_l及びγ_{max}を計算する。すなわち、更新部１１３は、$g_l^{FW} \geqq g_l^{A}$である場合は

[0118] [数48]

$$\boldsymbol{d}_l = (\boldsymbol{d}_l^{1,\mathrm{FW}}, \ldots, \boldsymbol{d}_l^{r,\mathrm{FW}}),\ \gamma_{\max} = 1$$

によりd_l及びγ_{max}を計算し、$g_l^{FW} < g_l^{A}$である場合は

[0119] [数49]

$$\boldsymbol{d}_l = (\boldsymbol{d}_l^{1,\mathrm{A}}, \ldots, \boldsymbol{d}_l^{r,\mathrm{A}}),\ \gamma_{\max} = \min_{p\in[r]} z_{\boldsymbol{v}_l^p}^p / (1 - z_{\boldsymbol{v}_l^p}^p)$$

によりd_l及びγ_{max}を計算する。このことは、x_lを更新する際に、$g_l^{FW} \geqq g_l^{A}$であればx^pを$d_l^{p,FW}$の方向に進めることとし、そうでなければx^pを$d_l^{p,A}$の方向に進めることを意味する。

[0120] ステップＳ２２７０では、更新部１１３は、

[0121] [数50]

$$\gamma_l \in \mathrm{argmin}_{\gamma \in [0, \gamma_{\max}]} F(\boldsymbol{x}_l + \gamma \boldsymbol{d}_l)$$

によりγ_lを計算する。ここで、関数Ｆは、

[0122] [数51]

$$F(x) \coloneqq \Phi\left(\sum_{p \in [r]} m^p x^p\right)$$

である。すなわち、更新部１１３は、x_lからd_lの方向に進んだときに関数Ｆの値が最小になる点γ_lを求める。これは、例えば、ラインサーチにより求めればよい。

[0123] ステップＳ２２８０では、更新部１１３は、パラメータを更新する。ここで、更新部１１３は、以下のようにパラメータを更新する。

[0124] まず、x_lについては、

[0125] [数52]

$$\boldsymbol{x}_{l+1} = \boldsymbol{x}_l + \gamma_l \boldsymbol{d}_l$$

と更新する。これは、現時点で関数Ｆの値が最小となるｘをx_{l+1}とすることを意味する。

[0126] また、各戦略を選んだプレイヤーの割合ｚについては、ｇ｜^{FW}≧ｇ｜^{A}である場合は、各ｐ∈［ｒ］に対して、

[0127] [数53]

$$z^p_{\boldsymbol{s}^p} \leftarrow (1-\gamma) z^p_{\boldsymbol{s}^p} + \gamma$$
$$z^p_S \leftarrow (1-\gamma) z^p_S, \ S \in \mathcal{B}^p \setminus \{\boldsymbol{s}^p\}$$

により更新する。一方で、ｇ｜^{FW}＜ｇ｜^{A}である場合は、各ｐ∈［ｒ］に対して、

[0128] [数54]

$$z^p_{\boldsymbol{v}^p} \leftarrow (1+\gamma) z^p_{\boldsymbol{v}^p} - \gamma$$
$$z^p_S \leftarrow (1+\gamma) z^p_S \ , S \in \mathcal{B}^p \setminus \{\boldsymbol{v}^p\}$$

により更新する。なお、各戦略を選んだプレイヤーの割合ｚの更新方法については、例えば、上記の参考文献４等を参照されたい。

[0129] また、アクティブ集合については、各ｐ∈［ｒ］に対して、

[0130] [数55]

$$\mathcal{A}^p_{l+1} = \{S \in \mathcal{B}^p \mid z^p_S > 0\}$$

により更新する。つまり、ｚ$_{S}$^{p}＞０となる戦略Ｓだけを集めて、新たなアク

ティブ集合としている。

[0131] ＜パラメータがε-近似Wardrop均衡状態を満たす理由＞

次に、均衡状態計算処理で出力されたパラメータがε-近似Wardrop均衡状態を満たす理由について説明する。コスト関数C_sを用いた場合、ε-近似Wardrop均衡状態は、任意のｐ∈［ｒ］を１つ固定したときに、任意の

[0132] [数56]

$$S \in \mathcal{A}^p, S' \in \mathcal{S}^p$$

に対して、均衡状態計算処理で出力されたパラメータｘが

[0133] [数57]

$$C_S(\boldsymbol{x}) - \epsilon \leq C_{S'}(\boldsymbol{x}) + \epsilon$$

を満たすことと言い換えることができる。

[0134] 図２のステップＳ１４３０により、

[0135] [数58]

$$\langle \nabla \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}^p \rangle \leq \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^p} \langle \nabla \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{u} \rangle + \epsilon = \min_{S' \in \mathcal{S}^p} C_{S'}(\boldsymbol{x}) + \epsilon$$

が成り立つことが保証される。一方で、図３のステップＳ２２３０により、

[0136]

[数59]

$$\langle \nabla\Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}^p \rangle \geq \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}^p} \langle \nabla\Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{u} \rangle - \epsilon = \max_{S\in\mathcal{A}^p} C_S(\boldsymbol{x}) - \epsilon$$

が成り立つことが保証される。

[0137] したがって、上記の２つの不等式により、$C_S(x) - \varepsilon \leqq C_{S'}(x) + \varepsilon$が成り立つ。これにより、均衡状態計算処理で出力されたパラメータはε-近似Wardrop均衡状態を満たす。

[0138] ＜ハードウェア構成＞

次に、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０のハードウェア構成について、図４を参照しながら説明する。図４は、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０のハードウェア構成の一例を示す図である。

[0139] 図４に示すように、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０は一般的なコンピュータ又はコンピュータシステムで実現され、入力装置２０１と、表示装置２０２と、外部Ｉ／Ｆ２０３と、通信Ｉ／Ｆ２０４と、プロセッサ２０５と、メモリ装置２０６とを有する。これら各ハードウェアは、それぞれがバス２０７を介して通信可能に接続されている。

[0140] 入力装置２０１は、例えば、キーボードやマウス、タッチパネル等である。表示装置２０２は、例えば、ディスプレイ等である。なお、均衡状態計算装置１０は、入力装置２０１及び表示装置２０２のうちの少なくとも一方を有していなくてもよい。

[0141] 外部Ｉ／Ｆ２０３は、外部装置とのインタフェースである。外部装置には、例えば、記録媒体２０３ａ等がある。均衡状態計算装置１０は、外部Ｉ／Ｆ２０３を介して、記録媒体２０３ａの読み取りや書き込み等を行うことができる。記録媒体２０３ａには、例えば、均衡状態計算装置１０が有する各機能部（入力部１０１、最適化部１０２及び出力部１０３）を実現する１以

上のプログラムが格納されていてもよい。

[0142] なお、記録媒体２０３ａには、例えば、ＣＤ（Compact Disc）、ＤＶＤ（Digital Versatile Disk）、ＳＤメモリカード（Secure Digital memory card）、ＵＳＢ（Universal Serial Bus）メモリカード等がある。

[0143] 通信Ｉ／Ｆ２０４は、均衡状態計算装置１０を通信ネットワークに接続するためのインタフェースである。なお、均衡状態計算装置１０が有する各機能部を実現する１以上のプログラムは、通信Ｉ／Ｆ２０４を介して、所定のサーバ装置等から取得（ダウンロード）されてもよい。

[0144] プロセッサ２０５は、例えば、ＣＰＵ（Central Processing Unit）やＧＰＵ（Graphics Processing Unit）等の各種演算装置である。均衡状態計算装置１０が有する各機能部は、例えば、メモリ装置２０６等に格納されている１以上のプログラムがプロセッサ２０５に実行させる処理により実現される。

[0145] メモリ装置２０６は、例えば、ＨＤＤ（Hard Disk Drive）やＳＳＤ（Solid State Drive）、ＲＡＭ（Random Access Memory）、ＲＯＭ（Read Only Memory）、フラッシュメモリ等の各種記憶装置である。均衡状態計算装置１０が有する記憶部１０４は、例えば、メモリ装置２０６を用いて実現可能である。なお、例えば、記憶部１０４は、均衡状態計算装置１０と通信ネットワークを介して接続される記憶装置等を用いて実現されていてもよい。

[0146] 本実施形態に係る均衡状態計算装置１０は、図４に示すハードウェア構成を有することにより、上述した均衡状態計算処理を実現することができる。なお、図４に示すハードウェア構成は一例であって、均衡状態計算装置１０は、他のハードウェア構成を有していてもよい。例えば、均衡状態計算装置１０は、複数のプロセッサ２０５を有していてもよいし、複数のメモリ装置２０６を有していてもよい。

[0147] ＜まとめ＞

以上のように、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０は、一般の戦略集合からなる混雑ゲームに対しても、近似の精度に保証がある均衡状態（ε-近

似Wardrop均衡状態）を実用上高速に求めることができる。これにより、例えば、多点間通信や予算制約付きの２点間通信等の複雑な状況をモデル化した混雑ゲームに対しても、実用上高速に均衡状態を計算することができる。

[0148] したがって、例えば、通信ネットワークや高速ネットワークの設計時に、その設計により各通信路や道路にどの程度の混雑が発生するか、またプレイヤーの実際のコストがどの程度になるかをシミュレーションすることが可能となる。このため、例えば、設計に複数の案が存在する場合等に、そのシミュレーションによる性能を比較することが可能になる。

[0149] なお、本件発明者は、本実施形態に係る均衡状態計算装置１０により、戦略集合の中身を全て列挙する場合と比べて均衡状態の計算が１０００倍程度高速になるケースや、戦略集合の中身を全て列挙することがメモリや時間の制約上叶わない場合でも均衡状態の計算が数秒で終わるケースがあることを確認している。

[0150] 本発明は、具体的に開示された上記の実施形態に限定されるものではなく、請求の範囲の記載から逸脱することなく、種々の変形や変更、既知の技術との組み合わせ等が可能である。

符号の説明

[0151]

１０	均衡状態計算装置
１０１	入力部
１０２	最適化部
１０３	出力部
１０４	記憶部
１１１	初期設定部
１１２	最短経路計算部
１１３	更新部

請求の範囲

[請求項1] 混雑ゲームの均衡状態を計算する均衡状態計算装置であって、

前記混雑ゲームのプレイヤーが使用する戦略であって、アイテムの組合せで表される戦略の集合をゼロサプレス型二分決定図で表現したグラフ情報を入力する入力手段と、

前記入力手段により入力されたグラフ情報を用いて、Frank-Wolfeアルゴリズムの変種により前記均衡状態において前記戦略を選んだプレイヤーの割合を含む均衡状態情報を計算する計算手段と、

ことを特徴とする均衡状態計算装置。

[請求項2] 前記計算手段は、

前記グラフ情報が表すゼロサプレス型二分決定図の各ノードに対して、前記ノードの０－枝の距離を０、前記ノードの１－枝の距離を、前記ノードに対応するアイテムのコストとして、前記ゼロサプレス型二分決定図の根ノードから終端ノードまでの最短経路を動的計画法により探索することで、前記コストが最小となる戦略を表す第１のコスト最小戦略を計算し、

前記第１のコスト最小戦略を用いて、前記均衡状態情報を更新する、ことを特徴とする請求項１に記載の均衡状態計算装置。

[請求項3] 前記計算手段は、

前記第１のコスト最小戦略の計算と前記均衡状態情報の更新とを、前記戦略の集合を使用するプレイヤーの平均コストと前記第１のコスト最小戦略のコストとの差が所定の誤差以下となるまで繰り返し実行する、ことを特徴とする請求項２に記載の均衡状態計算装置。

[請求項4] 前記計算手段は、

前記第１のコスト最小戦略を用いて、Away-step Frank-Wolfeアルゴリズムに基づくアルゴリズムにより前記均衡状態情報を更新する、ことを特徴とする請求項２又は３に記載の均衡状態計算装置。

[請求項5] 前記計算手段は、

前記第１のコスト最小戦略と前記プレイヤーが現在選択している戦略の集合を表すアクティブ集合とから作成された新たな戦略集合を用いて、前記新たな戦略集合の中でコストが最小となる戦略を表す第２のコスト最小戦略を計算し、

前記アクティブ集合の中でコストが最大となる戦略を表すコスト最大戦略を計算し、

前記コスト最大戦略と前記第２のコスト最小戦略とを用いて前記均衡状態情報を更新する、ことを特徴とする請求項２乃至４の何れか一項に記載の均衡状態計算装置。

[請求項6] 前記計算手段は、

前記コスト最大戦略と前記第２のコスト最小戦略との差が所定の誤差以下となるまで、前記均衡状態情報の更新を繰り返し実行する、請求項５に記載の均衡状態計算装置。

[請求項7] 混雑ゲームの均衡状態を計算する均衡状態計算装置が、

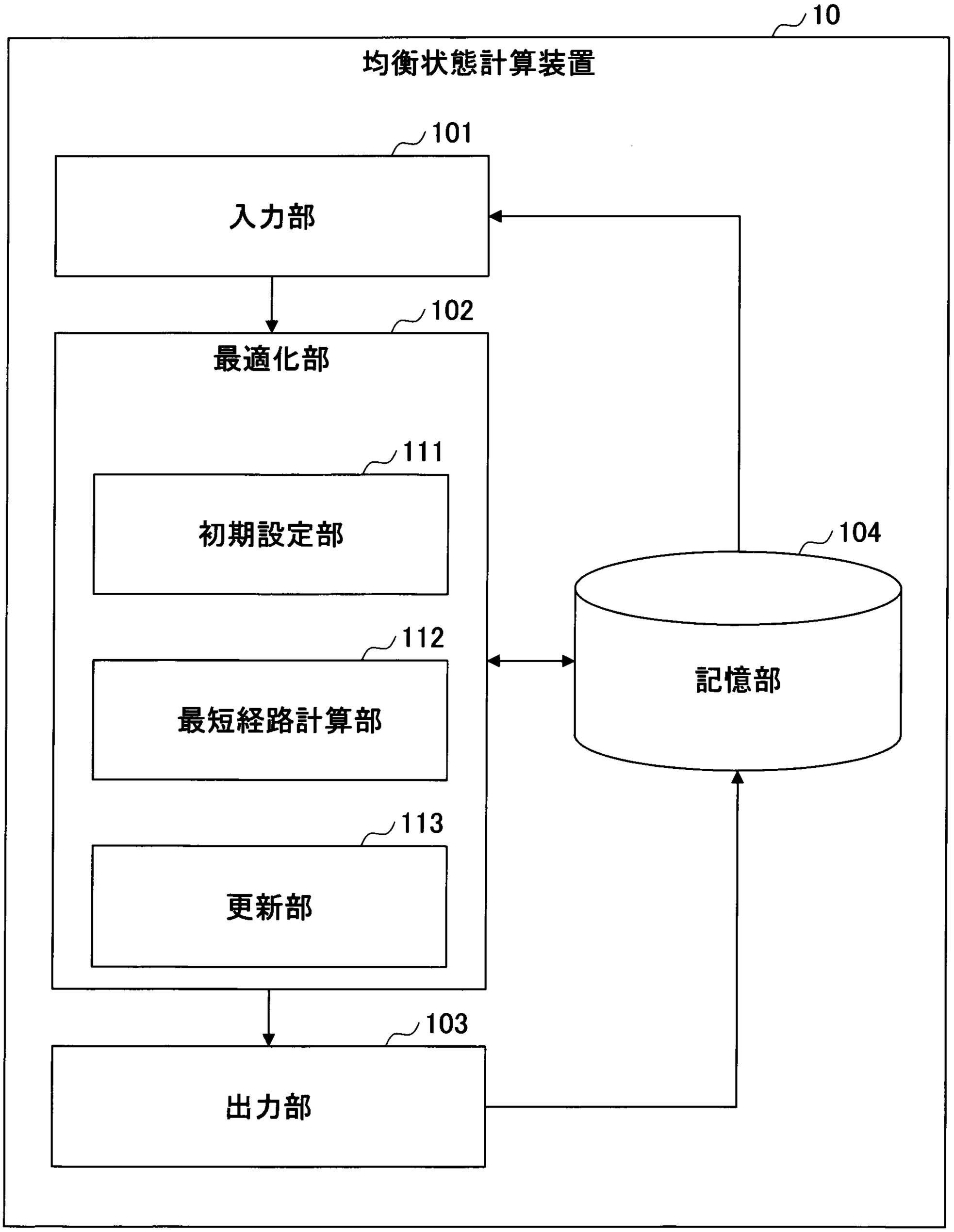
前記混雑ゲームのプレイヤーが使用する戦略であって、アイテムの組合せで表される戦略の集合をゼロサプレス型二分決定図で表現したグラフ情報を入力する入力手順と、

前記入力手順により入力された情報を用いて、Frank-Wolfeアルゴリズムの変種により前記均衡状態において前記戦略を選んだプレイヤーの割合を含む均衡状態情報を計算する計算手順と、

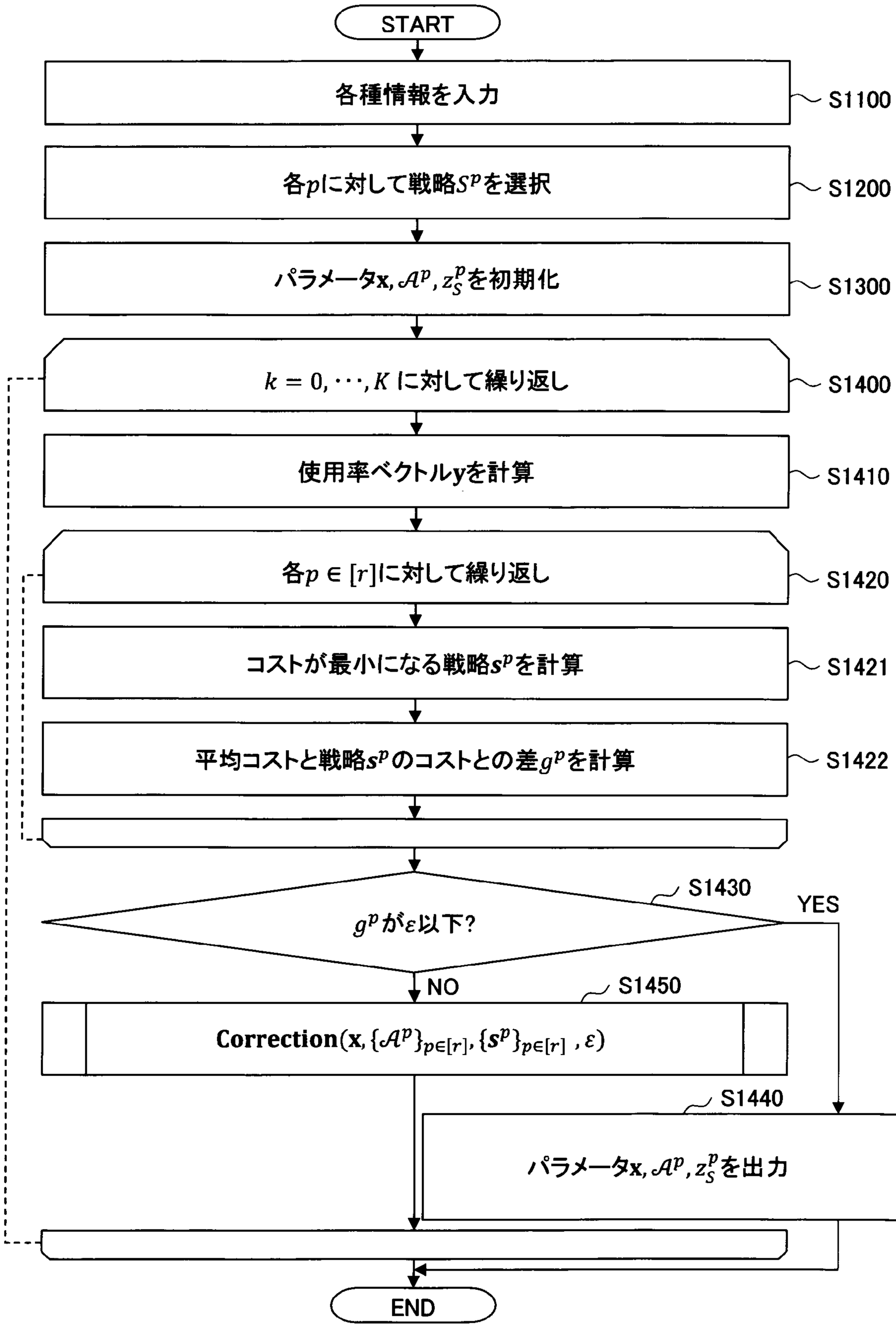
を実行することを特徴とする均衡状態計算方法。

[請求項8] コンピュータを、請求項１乃至６の何れか一項に記載の均衡状態計算装置における各手段として機能させるためのプログラム。

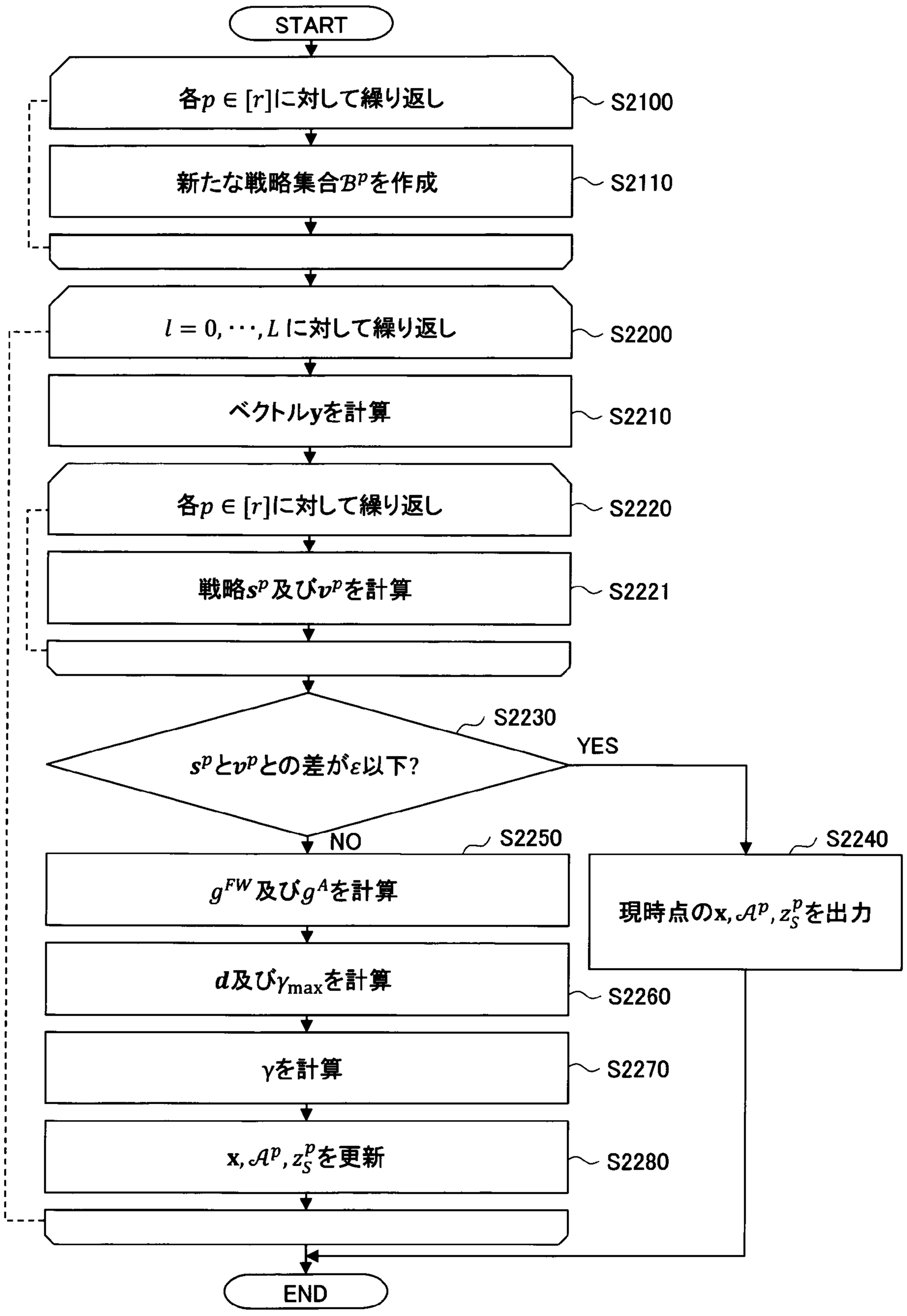
[図1]


10
均衡状態計算装置
101
入力部
102
最適化部
111
初期設定部
112
最短経路計算部
113
更新部
103
出力部
104
記憶部

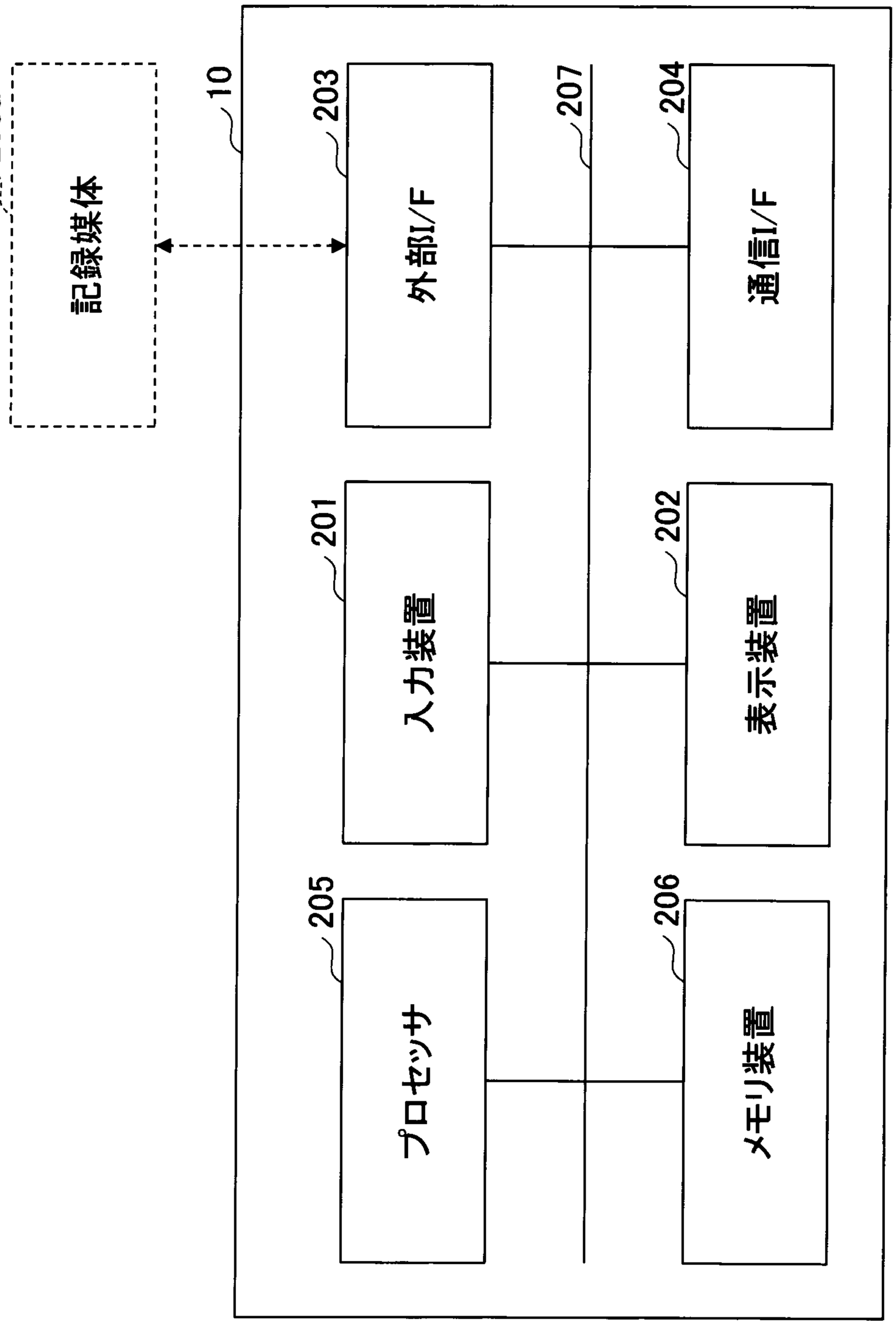
[図2]


START
各種情報を入力
S1100
各pに対して戦略S^pを選択
S1200
パラメータ$\mathbf{x}, \mathcal{A}^p, z_S^p$を初期化
S1300
$k = 0, \cdots, K$ に対して繰り返し
S1400
使用率ベクトルyを計算
S1410
各$p \in [r]$に対して繰り返し
S1420
コストが最小になる戦略s^pを計算
S1421
平均コストと戦略s^pのコストとの差g^pを計算
S1422
g^pがε以下?
S1430
YES
NO
S1450
Correction$(\mathbf{x}, \{\mathcal{A}^p\}_{p\in[r]}, \{s^p\}_{p\in[r]}, \varepsilon)$
S1440
パラメータ$\mathbf{x}, \mathcal{A}^p, z_S^p$を出力
END

[図3]


START
各$p \in [r]$に対して繰り返し
S2100
新たな戦略集合B^pを作成
S2110
$l = 0, \cdots, L$ に対して繰り返し
S2200
ベクトルyを計算
S2210
各$p \in [r]$に対して繰り返し
S2220
戦略s^p及びv^pを計算
S2221
S2230
s^pとv^pとの差がε以下?
YES
NO
S2240
現時点の$\mathbf{x}, \mathcal{A}^p, z_S^p$を出力
S2250
g^{FW}及びg^Aを計算
S2260
d及び$\gamma_{\max}$を計算
S2270
γを計算
S2280
$\mathbf{x}, \mathcal{A}^p, z_S^p$を更新
END

[図4]


10
203a
記録媒体
203
外部I/F
207
204
通信I/F
201
入力装置
202
表示装置
205
プロセッサ
206
メモリ装置

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.
PCT/JP2019/050675

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER
Int. Cl. G06N99/00(2019.01)i
FI: G06N99/00 180

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)
Int. Cl. G06N99/00

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched
Published examined utility model applications of Japan 1922-1996
Published unexamined utility model applications of Japan 1971-2020
Registered utility model specifications of Japan 1996-2020
Published registered utility model applications of Japan 1994-2020

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	FABRIKANT, Alex et al., The complexity of pure Nash equilibria, Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, June 2004, pp. 604-612, Retrieved from the Internet: <URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/1007352.1007445> entire text	1-8
A	CORREA, Jose R. et al., Wardrop Equilibria, Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, John Wiley & Sons, Inc. [online], 13 December 2017, pp. 1-12, Retrieved from the Internet: <URL: https://www.researchgate.net/publication/22755985> entire text	1-8

☐ Further documents are listed in the continuation of Box C.

☐ See patent family annex.

* Special categories of cited documents:
"A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance
"E" earlier application or patent but published on or after the international filing date
"L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)
"O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means
"P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed
"T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention
"X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone
"Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art
"&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search	Date of mailing of the international search report
18.08.2020	25.08.2020
Name and mailing address of the ISA/ Japan Patent Office 3-4-3, Kasumigaseki, Chiyoda-ku, Tokyo 100-8915, Japan	Authorized officer Telephone No.

国際調査報告

国際出願番号
PCT/JP2019/050675

A.　発明の属する分野の分類（国際特許分類（ＩＰＣ））

G06N 99/00(2019.01)i
FI: G06N99/00 180

B.　調査を行った分野

調査を行った最小限資料（国際特許分類（ＩＰＣ））

G06N99/00

最小限資料以外の資料で調査を行った分野に含まれるもの

日本国実用新案公報　１９２２－１９９６年
日本国公開実用新案公報　１９７１－２０２０年
日本国実用新案登録公報　１９９６－２０２０年
日本国登録実用新案公報　１９９４－２０２０年

国際調査で使用した電子データベース（データベースの名称、調査に使用した用語）

C.　関連すると認められる文献

引用文献のカテゴリー*	引用文献名　及び一部の箇所が関連するときは、その関連する箇所の表示	関連する請求項の番号
A	FABRIKANT, Alex et al., The complexity of pure Nash equilibria, Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 2004.06, pp.604-612, Retrieved from the Internet: <URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/1007352.1007445>　全文	１－８
A	CORREA, Jose R. et al., Wardrop Equilibria, Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, John Wiley & Sons, Inc. [online], 2017.12.13, pp.1-12, Retrieved from the Internet: <URL: https://www.researchgate.net/publication/22755985>　全文	１－８

☐ Ｃ欄の続きにも文献が列挙されている。

☐ パテントファミリーに関する別紙を参照。

*　引用文献のカテゴリー
“A”　特に関連のある文献ではなく、一般的技術水準を示すもの
“E”　国際出願日前の出願または特許であるが、国際出願日以後に公表されたもの
“L”　優先権主張に疑義を提起する文献又は他の文献の発行日若しくは他の特別な理由を確立するために引用する文献（理由を付す）
“O”　口頭による開示、使用、展示等に言及する文献
“P”　国際出願日前で、かつ優先権の主張の基礎となる出願の日の後に公表された文献
“T”　国際出願日又は優先日後に公表された文献であって出願と抵触するものではなく、発明の原理又は理論の理解のために引用するもの
“X”　特に関連のある文献であって、当該文献のみで発明の新規性又は進歩性がないと考えられるもの
“Y”　特に関連のある文献であって、当該文献と他の１以上の文献との、当業者にとって自明である組合せによって進歩性がないと考えられるもの
“&”　同一パテントファミリー文献

国際調査を完了した日	国際調査報告の発送日
18.08.2020	25.08.2020

名称及びあて先
日本国特許庁(ISA/JP)
〒100-8915
日本国
東京都千代田区霞が関三丁目４番３号

権限のある職員（特許庁審査官）
今城　朋彬　5B　7888
電話番号　03-3581-1101　内線　3545