

(19) 日本国特許庁(JP)

(12) 特許公報(B2)

(11) 特許番号

特許第5843733号
(P5843733)

(45) 発行日 平成28年1月13日(2016.1.13)

(24) 登録日 平成27年11月27日(2015.11.27)

(51) Int.Cl.

HO3M 13/19 (2006.01)

F 1

HO3M 13/19

請求項の数 19 外国語出願 (全 35 頁)

(21) 出願番号 特願2012-198018 (P2012-198018)
 (22) 出願日 平成24年9月10日 (2012.9.10)
 (65) 公開番号 特開2013-81161 (P2013-81161A)
 (43) 公開日 平成25年5月2日 (2013.5.2)
 審査請求日 平成27年6月5日 (2015.6.5)
 (31) 優先権主張番号 13/251,143
 (32) 優先日 平成23年9月30日 (2011.9.30)
 (33) 優先権主張国 米国(US)

早期審査対象出願

(73) 特許権者 000006013
 三菱電機株式会社
 東京都千代田区丸の内二丁目7番3号
 (74) 代理人 100110423
 弁理士 曽我 道治
 (74) 代理人 100094695
 弁理士 鈴木 憲七
 (74) 代理人 100111648
 弁理士 梶並 順
 (74) 代理人 100122437
 弁理士 大宅 一宏
 (74) 代理人 100147566
 弁理士 上田 俊一
 (74) 代理人 100161171
 弁理士 吉田 潤一郎

最終頁に続く

(54) 【発明の名称】準巡回低密度パリティ検査符号を求める方法、および準巡回低密度パリティ検査符号に基づいてデータを符号化するためのシステム

(57) 【特許請求の範囲】

【請求項 1】

連結性行列によって表されるプロトグラフに対応する準巡回(QC)低密度パリティ検査(LDPC)符号を求める方法であって、

少なくとも1つの複製線に沿って前記連結性行列の少なくとも幾つかの要素を複製するステップであって、拡張された連結性行列を生成し、該連結性行列内の前記少なくとも幾つかの要素の値は、所定のガースによって示されるパターンを形成する、複製するステップと、

前記拡張された連結性行列に対応する階層準巡回(HQC)LDPC符号を求めるステップであって、該HQC LDPC符号は、巡回部分行列の行列によって表される、求めるステップと、

前記HQC LDPC符号を表す前記行列の前記少なくとも幾つかの要素を除去するステップであって、該行列が前記複製線に沿ってスカッシングされ、前記QCLDPC符号が生成されるようにする、除去するステップと

を有し、該方法の各ステップは、プロセッサによって実行される、連結性行列によって表されるプロトグラフに対応する準巡回(QC)低密度パリティ検査(LDPC)符号を求める方法。

【請求項 2】

前記所定のガースは、10以上である請求項1に記載の方法。

【請求項 3】

前記プロトグラフは、空間結合符号を表す請求項 1 に記載の方法。

【請求項 4】

前記パターンは、2よりも大きい値を有する少なくとも2つの要素または3よりも大きい値を有する少なくとも1つの要素を有する連結性行列の行または列を含む請求項 1 に記載の方法。

【請求項 5】

前記 HQC LDPC 符号は、制限された2レベル HQC LDPC 符号である請求項 1 に記載の方法。

【請求項 6】

前記求めるステップは、

10

前記拡張された連結性行列を階層準巡回 (HQC) LDPC 符号ファミリーに変換するステップと、

前記 HQC LDPC 符号ファミリーから、前記 HQC LDPC 符号の前記ガースが最適化されるような少なくとも1つの HQC LDPC 符号を選択するステップとをさらに含む請求項 1 に記載の方法。

【請求項 7】

前記選択するステップは、山登り法による手順を用いる請求項 6 に記載の方法。

【請求項 8】

前記山登り法による手順は、

20

前記ファミリー内の前記 HQC LDPC 符号ごとにツリー構造を選択するステップと、

前記ツリー構造ごとにコストを求めるステップと、

前記ツリー構造内の単一のエッジラベルを繰返し変更するステップであって、前記コストの低減を最大にする、繰返し変更するステップと、

前記コストが最小のときに、前記ツリー構造から前記 HQC LDPC 符号の多項式パリティ検査行列を構築するステップと

をさらに含む請求項 7 に記載の方法。

【請求項 9】

前記変換するステップは、前記連結性行列の、制限された2レベル HQC LDPC 符号ファミリーへの直接変換である請求項 6 に記載の方法。

30

【請求項 10】

前記 HQC LDPC 符号は、多項式パリティ検査行列によって表され、該 HQC LDPC 符号の前記行列は、前記符号を表す基本行列であり、前記方法は、

前記多項式パリティ検査行列を基本行列符号にコンバートするステップであって、前記行列を生成する、コンバートするステップ

をさらに含む請求項 1 に記載の方法。

【請求項 11】

前記基本行列符号は、 4×4 の部分行列を用いて構築される請求項 10 に記載の方法。

【請求項 12】

前記変換するステップは、

40

前記拡張された連結性行列を、対応する HQC LDPC 符号ファミリーを記述する多項式パリティ検査行列ファミリーに変換するステップであって、多項式パリティ検査行列の要素は、第1の変数 x および第2の変数 y の多項式を含み、前記複製線の両側の前記第2の変数 y の指数は等しい、変換するステップ

を含む請求項 6 に記載の方法。

【請求項 13】

前記選択するステップは、

前記多項式パリティ検査行列ファミリーにおける自由度を最適化するステップであって、前記 HQC LDPC 符号を得る、最適化するステップと、

前記 HQC LDPC の前記多項式パリティ検査行列を基本行列符号にコンバートす

50

るステップであって、前記 H Q C L D P C 符号の前記行列を生成する、コンバートするステップと

を含む請求項 1 2 に記載の方法。

【請求項 1 4】

前記複製線は、前記連結性行列の行間に延び、前記拡張された連結性行列の前記要素は、前記行列の N 個の要素に対応し、前記除去するステップは、

前記複製線の両側の前記行列から 2 つの要素を除く全てを除去するステップ

をさらに含む請求項 1 に記載の方法。

【請求項 1 5】

前記要素の数は 4 に等しく、前記除去するステップが、前記複製線の両側の前記行列から 2 つの要素を除去するステップを含むようになっている請求項 1 に記載の方法。 10

【請求項 1 6】

前記スカッシング手順は、前記拡張された連結性行列内の各複製された列に対応する 4 つの列の各組から、基本行列内の 2 つの列を除去し、前記拡張された連結性行列内の各複製された行に対応する 4 つの行の各組から、前記基本行列内の 2 つの行をさらに除去する請求項 1 3 に記載の方法。

【請求項 1 7】

前記 H Q C L D P C 符号は、K 個のレベルを含み、K 個の変数の多変量多項式パリティ検査行列によって定義される請求項 1 に記載の方法。 20

【請求項 1 8】

前記行列の各部分行列は、巡回構造を有し、該部分行列の前記要素の値は、遷移線を越えると巡回フローを変化させる請求項 1 に記載の方法。

【請求項 1 9】

前記 H Q C L D P C 符号を用いてデータを符号化するステップであって、符号化データを生成する、符号化するステップと、

前記符号化データをチャネルを介して送信するステップと

をさらに含む請求項 1 に記載の方法。

【発明の詳細な説明】

【技術分野】

【0 0 0 1】

本発明は、包括的には準巡回 (Q C) 低密度パリティ検査 (L D P C) 符号に関し、より詳細には、高ガースを有する Q C L D P C 符号を求めることに関する。 30

【背景技術】

【0 0 0 2】

低密度パリティ検査 (L D P C) 符号の構築のために、大きく分けて 2 つの方法を用いることができる。一方の組は、高度にランダムなグラフ構築に基づく一方、他方は、構造化された代数的構築に基づく。ランダムなグラフ構築は、シャノン容量に近づく L D P C 符号を生成することができる。

【0 0 0 3】

L D P C グラフ構築は、通常「タナーグラフ」を用いる。タナーグラフは、符号語ビットを表す「変数」ノードと、パリティ検査を表す「検査」ノードとを含む 2 部グラフである。ここで、変数ノードは、符号のパリティ検査行列内の対応するエントリーが非ゼロである場合にのみ、エッジによって検査ノードに連結される。タナーグラフは、既知である。

【0 0 0 4】

高度にランダムなタナーグラフ構築に基づく符号は、シャノン限界に密に近づくことができるが、符号のタナーグラフにおける検査ノードと変数ノードとの間の不規則な連結は、高い配線複雑度を意味するので、これらの構築は、ハードウェアにおいて実施するのが容易でない。実際の実施態様では、より構造化された構築が好ましい。なぜなら、これらは、はるかにより実際的な配線、および復号化器におけるより直接的な並列性を提供する

10

20

30

40

50

ためである。

【0005】

準巡回LDPC(QC-LDPC)符号は、パリティ検査行列を用いる構造化されたグラフである。パリティ検査行列は、巡回構造を有する部分行列に分割される。構造化されたグラフは、ハードウェアにおいて実装するのが実際的であるので、QC-LDPC符号は、IEEE802.16e標準規格、DVB-S2標準規格、およびIEEE802.11標準規格に従って実装されるような様々な通信ネットワークにおいて用いられる。

【0006】

ほとんどの用途にとって、信号対雑音比(SNR)が比較的低い「ウォーターフォール」レジームにおける復号化性能を最適化することが重要である。

10

【0007】

しかしながら、用途によっては、ウォーターフォール性能を最適化することは十分でない。より高いSNRレジームにおける多くのLDPC符号に固有の「エラーフロア」も回避しなくてはならない。性能曲線における「エラーフロア」は、SNRが増加するとともに復号化失敗率が急速に減少し続けないことを意味する。エラーフロアを除去するかまたは低くすることは、高密度磁気記録および高速光ファイバー通信システムを含む、極度の信頼性需要を必要とする用途に特に重要である。

【0008】

通常、QC-LDPC符号は、有限幾何学、有限フィールド、および組合せ設計を含む、広範にわたる技法に基づいて構築される。近年、「畳み込み」符号または「空間結合」符号の分野にも多くの関心が集まっている。「畳み込み」符号または「空間結合」符号は、従来のランダム構築よりもはるかに構造化されているが、シャノン容量に密に近づくこと、またはさらには2元消失通信路(BEC)においてシャノン容量を達成することも示されている。ここで、これらの符号は、準巡回構築を用いて実装することができる所以重要であり、このため、他の構造化されたQC-LDPC符号の実用性を保ちながら、非常に良好な性能を達成することができるはずである。

20

【0009】

確率伝搬(BP)復号化器を用いて復号化されたLDPC符号のエラーフロア問題は、一般に、「トラッピングセット」によって引き起こされる。トラッピングセットは、不正確な確信において互いを補強する一組の少数のビットである。ビットのトラッピングセットは、符号のタナーグラフにおいて、クラスタリングされた短いサイクルで常に配列される。トラッピングセットを除去する1つの方法は、短いサイクルのクラスターが存在しないように、タナーグラフを設計することである。代替的な、少なくとも概念的に単純な手法は、より大きなガースを用いて符号を設計することである。符号の「ガース」は、タナーグラフにおける最も短いサイクルの長さとして定義される。短いサイクルを除去することによって、サイクルの危険な可能性がある構成を排除することができ、願わくはエラーフロアを低くすることができます。

30

【0010】

良好なウォーターフォール性能を有する符号は、不可避的に、符号グラフの要素または変数ノードの次数の分布にある不規則性を有する。QC-LDPC符号の場合、これらの不規則な分布は、「プロトグラフ」の観点で最も容易に説明される。プロトグラフは、タナーグラフの変形であり、同じタイプのビットおよび検査が単一の「プロトビット」または「プロト検査」によって表される。プロトグラフは、符号ファミリーを記述する既知の方法である。

40

【0011】

QC-LDPC符号の場合、プロトビットは、例えば、同じ巡回部分行列に属するビットを表すことができる。ウォーターフォール性能のために最適化された符号において生じるプロトグラフは、通常、複数のエッジによって連結されたプロトビットおよびプロト検査の幾つかの対を有する。そのようなプロトグラフに対応するQC-LDPC符号を構築する直接的な方法は、巡回部分行列が1より大きい重みの行および列を有するQC-LD

50

P C 符号を用いる。不都合なことに、これらの Q C L D P C 符号は、不可避的に、該 Q C L D P C 符号のタナーグラフにおいて短いサイクルを有する。

【 0 0 1 2 】

したがって、プロトグラフが複数のエッジによって連結されたプロトビットおよびプロト検査の対を有する場合であってもプロトグラフに対応する Q C L D P C 符号が所定の比較的高いガースを有するように、該 Q C L D P C 符号を求める方法を提供する必要がある。

【発明の概要】

【発明が解決しようとする課題】

【 0 0 1 3 】

10

本発明の目的は、プロトグラフに対応する準巡回（Q C）低密度パリティ検査（L D P C）符号が所定のガースを有するように、該 Q C L D P C 符号を求めるためのシステムおよび方法を提供することである。さらに、別の目的は、10以上のガースを有する Q C L D P C 符号を生成することができる方法を提供することである。

【課題を解決するための手段】

【 0 0 1 4 】

20

本発明の幾つかの実施の形態は、Q C L D P C 符号が階層構造を有する場合、階層準巡回（H Q C）L D P C 符号を表すパリティ検査行列を、符号のタナーグラフ内の短いサイクルが除去されるように変更することができるという認識に基づいている。H Q C L D P C 符号のパリティ検査行列は、複数のレベルを含み、各レベルは、巡回部分行列によって形成される。特に、レベルを形成する巡回部分行列のそれぞれが巡回部分 - 部分行列を含み、複数のレベルについて、以下同様である。

【 0 0 1 5 】

30

本発明の幾つかの実施の形態は、プロトグラフを表す連結性行列の要素の値が所定のパターンを形成する場合、プロトグラフの直接変換によって生成される Q C L D P C 符号は、不可避的に短いサイクルを有するという別の認識に基づいている。所定のパターンは、ガースに固有である。例えば、所定のガースが少なくとも 10 である場合、パターンは、2 よりも大きい値を有する少なくとも 2 つの要素または 3 よりも大きい値を有する少なくとも 1 つの要素を有する連結性行列の行または列を含む。このため、サイクルを除去するために、H Q C L D P C 符号を表す行列は、示されたパターンを形成する連結性行列の要素の値に依拠して変更されなくてはならない。

【 0 0 1 6 】

本発明の幾つかの実施の形態は、所定のガースによって示される連結性行列の幾つかの要素が複製線に沿って複製される場合、拡張された連結性行列に対応する H Q C L D P C 符号を、複製線に沿ってスカッシングし、Q C L D P C 符号を生成することができるというさらに別の認識に基づいている。

【 0 0 1 7 】

40

したがって、本発明の幾つかの実施の形態は、連結性行列によって表されるプロトグラフに対応する準巡回（Q C）低密度パリティ検査（L D P C）符号が所定のガースを有するように、該 Q C L D P C 符号を求める方法を開示する。本方法のステップは、連結性行列の少なくとも幾つかの要素を複製するステップであって、拡張された連結性行列を生成し、該連結性行列内の少なくとも幾つかの要素の値は、所定のガースによって示されるパターンを形成する、複製するステップと、拡張された連結性行列に対応する階層準巡回（H Q C）L D P C 符号を求めるステップと、該 H Q C L D P C 符号を表す行列の少なくとも幾つかの要素を除去するステップであって、該行列が複製線に沿ってスカッシングされ、Q C L D P C 符号が生成されるようにする、除去するステップと、を含み、該方法のステップは、プロセッサによって実行される。

【 0 0 1 8 】

幾つかの実施の形態では、所定のガースは、10以上であり、プロトグラフは、空間結合符号を表すことができ、および / または H Q C L D P C 符号は、制限された 2 レベル

50

HQC-LDPC符号とすることができる。1つの実施の形態では、HQC-LDPC符号を求めるることは、拡張された連結性行列を階層準巡回(HQC)LDPC符号ファミリーに変換することと、HQC-LDPC符号ファミリーから、HQC-LDPC符号のガースが最適化されるような少なくとも1つのHQC-LDPC符号を選択することと、を含む。

【0019】

例えば、選択することは、ガースを最適化するために山登り法による手順を用いることができる。山登り法による手順は、ファミリー内のHQC-LDPC符号ごとにツリー構造を選択するステップと、ツリー構造ごとにコストを求めるステップと、ツリー構造内の単一のエッジラベルを繰返し変更するステップであって、コストの低減を最大にする、繰返し変更するステップと、コストが最小のときに、ツリー構造からHQC-LDPC符号の多項式パリティ検査行列を構築するステップと、を含むことができる。10

【0020】

また、1つの実施の形態では、変換は、連結性行列の、制限された2レベルHQC-LDPC符号ファミリーへの直接変換とすることができます。付加的にまたは代替的に、変換ステップは、拡張された連結性行列を、対応するHQC-LDPC符号ファミリーを記述する多項式パリティ検査行列ファミリーに変換することができ、多項式パリティ検査行列の要素は、第1の変数xおよび第2の変数yの多項式を含み、複製線の両側の第2の変数yの指数は等しい。また、選択することは、多項式パリティ検査行列ファミリーにおける自由度を最適化することであって、HQC-LDPC符号を得る、最適化することと、HQC-LDPCの多項式パリティ検査行列を基本行列符号にコンバートすることであって、HQC-LDPC符号の行列を生成する、コンバートすることとオプションで含むことができる。スカッシング手順は、拡張された連結性行列内の各複製された列に対応する4つの列の各組から、基本行列符号内の2つの列を除去することができ、拡張された連結性行列内の各複製された行に対応する4つの行の各組から、基本行列内の2つの行をさらに除去する。20

【0021】

また、様々な実施の形態において、HQC-LDPC符号は、多項式パリティ検査行列および基本行列によって表される。例えば、基本行列は 4×4 の部分行列を用いて構築することができる。幾つかの実施の形態は、多項式パリティ検査行列を基本行列にコンバートする。30

【0022】

通常、複製線は、連結性行列の行間に延在する。また、連結性行列の要素は、符号を表す行列のN個の行または列にそれぞれ対応することができる行または列である。複製することは、N/2個の複製を作製することを含むことができ、除去することは、複製線の両側の行列から2つの要素を除く全てを除去することをさらに含むことができる。例えば、Nが4に等しい場合、除去することは、複製線の両側の行列の行または列の2つの複製から2つの行または列を除去することを含む。

【0023】

別の実施の形態は、準巡回(QC)低密度パリティ検査(LDPC)符号に基づいてデータを符号化するためのシステムであって、データを提供するためのソースと、パリティ検査行列によって表されるHQC-LDPC符号を格納するメモリであって、行列の各部分行列は、巡回構造を有し、該部分行列の要素の値は、遷移線を越えると巡回フローを変化させる、メモリと、HQC-LDPC符号を用いてデータを符号化して符号化データを生成し、チャネルを介して該符号化データを送信する符号化器と、を備える、準巡回(QC)低密度パリティ検査(LDPC)符号に基づいてデータを符号化するためのシステムを開示する。40

【図面の簡単な説明】

【0024】

【図1】本発明の幾つかの実施の形態による、準巡回(QC)低密度パリティ検査(LDPC)符号を構成する構成要素。50

P C) 符号を求める方法のブロック図である。

【図 2 A】1つの実施の形態による、Q C L D P C 符号を求めるための一例の概略図である。

【図 2 B】1つの実施の形態による、Q C L D P C 符号を求めるための一例の概略図である。

【図 3 A】行列およびグラフ表現におけるサイクルを形成する経路の例を示す図である。

【図 3 B】行列およびグラフ表現におけるサイクルを形成する経路の例を示す図である。

【図 4】H Q C L D P C 符号を表すツリー行列の一例である。

【図 5 A】プロトグラフの例である。

【図 5 B】プロトグラフの例である。

10

【図 6】プロトグラフの例である。

【図 7 A】図 6 のプロトグラフから導出されたタナーグラフの例である。

【図 7 B】図 6 のプロトグラフから導出されたタナーグラフの例である。

【図 8】制限された 2 レベル階層 Q C L D P C 符号を表すツリー行列の要素の一例を示す図である。

【図 9】本発明の 1 つの実施の形態による高ガース Q C L D P C 符号を構築するための方法のブロック図である。

【図 10】1つの実施の形態による、山登り法によるガース最大化のブロック図である。

【図 11】本発明の幾つかの実施の形態を用いる様々なシステムの概略図である。

【発明を実施するための形態】

20

【0 0 2 5】

システムおよび方法の概観

図 1 は、準巡回 (Q C) 低密度パリティ検査 (L D P C) 符号 150 を求めるための方法 100 のブロック図を示している。Q C L D P C 符号は、該 Q C L D P C 符号が所定のガース 117 を有するように、連結性行列 (C) 110 によって表されるプロトグラフに従って求められる。本方法のステップは、プロセッサ 101 によって実行される。Q C L D P C 符号 150 は、メモリ (図示せず) 内に格納することができ、該 Q C L D P C 符号 150 を用いてデータ 160 を符号化して (170)、無線チャネルまたは有線チャネルを介した送信のための符号化データ 180 を生成することができる。このデータもメモリ内に格納することができる。

30

【0 0 2 6】

本発明の幾つかの実施の形態は、所定のガースによって示される連結性行列の幾つかの要素が複製線に沿って複製されて、拡張された連結性行列が形成される場合、該拡張された連結性行列に対応する階層準巡回 (H Q C) L D P C 符号を、複製線に沿ってスカッシングし、Q C L D P C 符号を生成することができるという認識に基づいている。H Q C

L D P C 符号を表す巡回部分行列の行列は、複数のレベルを含み、各レベルは、巡回部分行列によって形成される。特に、レベルを形成する巡回部分行列は、巡回部分 - 部分行列を含み、複数のレベルについて、以下同様である。

【0 0 2 7】

図 2 A および図 2 B は、プロトグラフ 210 等のプロトグラフに従って Q C L D P C 符号を求める非限定的な例を示している。この例は、方法 100 のステップを説明するのに役立ち、本発明の範囲を限定することを意図していない。

40

【0 0 2 8】

「プロトグラフ」は、タナーグラフの分類を導出するのに用いることができるテンプレートである。プロトグラフ内の各ノードは、タナーグラフ内のノードの「タイプ」を表す。ノードは、プロトグラフから導出されたタナーグラフにおいて p 回複製される。例えば、プロトグラフ 210 は、1、2、および 3 でラベル付けされた 3 つのタイプの変数ノードと、A および B でラベル付けされた 2 つのタイプの検査ノードとを含む。このプロトグラフに基づいてタナーグラフを導出するために、タイプ A の各検査ノードは、タイプ 1 の 3 つの変数、タイプ 2 の 2 つの変数、およびタイプ 3 の 1 つの変数に連結される一方、タ

50

イプBの各検査ノードは、タイプ2の2つの変数およびタイプ3の1つの変数に連結されるべきである。

【0029】

全てのプロトグラフは、連結性行列によって等価に表すことができる。連結性行列は、プロトグラフ内の検査タイプ数に等しい行数と、変数タイプ数に等しい列数とを有する。連結性行列内の各要素は、プロトグラフ内で検査ノードのタイプを変数ノードのタイプに連結する複数のエッジに対応する重みである。例示のために、プロトグラフ210は、連結性行列205

【数1】

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10

によって表すことができる。

【0030】

図2Aに示すプロトグラフは、本方法を示す目的で提供されるほんの一例にすぎない。図5Aおよび図5Bは、本方法の入力として用いることができるプロトグラフの他の例を示している。これらのプロトグラフは、「片側空間結合符号 (one-sided spatially coupled codes)」を表す。これらのプロトグラフにおいて、ビットタイプおよび検査タイプを連結する複数のエッジが存在することに留意されたい。

20

【0031】

本発明の幾つかの実施の形態は、連結性行列の要素の値が所定のパターン115を形成する場合、プロトグラフの「直接変換」によって得られるQC LDPC符号は、不可避的に長さ6または8の短いサイクルを有するという別の認識に基づいている。所定のパターンは、ガース固有である。例えば、所望のガースまたは所定のガースが少なくとも10である場合、パターンは、2よりも大きい値を有する少なくとも2つの要素または3よりも大きい値を有する少なくとも1つの要素を有する連結性行列の行または列を含む。例えば、連結性行列205は、10に等しいガースによって示されるパターン115に従う行212および列214を含む。

【0032】

30

このため、不可避的な短いサイクルを有することなくQC LDPC符号を得るために、連結性行列は、複製線127、例えば、線216および225に沿って複製され、拡張された連結性行列125が生成される。複製は、パターン115によって示された行数または列数に対応する複数の中間ステップを有することができる。図2Aに示す例では、複製線は、拡張された連結性行列220を形成する線216および225、並びに最終的に230を含む。本明細書において用いられるとき、複製線とは、パターンを形成する要素がその上で複製される線である。通常、複製線は、行列の行間または列間の線である。複製線は、いずれの行または列が複製されるかに関する情報を保持する。

【0033】

次に、拡張された連結性行列125に対応する階層準巡回(HQC)LDPC符号135が求められる(130)。例えば、拡張された連結性行列230は、階層準巡回(HQC)LDPC符号ファミリー240に変換することができ、HQC LDPC符号のガースが最適化されるように、HQC LDPC符号250が選択される(245)。1つの実施の形態は、以下に示すように、山登り法による手順を用いてガースを最適化する。

40

【0034】

図2Bに示す行列260は、HQC LDPC符号を表す行列135の一例である。行列260は、「基本行列」である。幾つかの実施の形態では、HQC LDPC符号は、以下でより詳細に説明するように、多項式パリティ検査行列によって表され、多項式パリティ検査行列は、基本行列にコンバートされ、行列が生成される。本発明の例では、行列260は、4×4の巡回部分行列を含み、重みIのQC LDPC符号を表す。

50

【0035】

行列 135 は、拡張された連結性行列 125C' に対応する。このため、行列 135 の少なくとも幾つかの要素を除去して、元の連結性行列 C110 の QC LDPC 符号を生成する。特に、様々な実施の形態において、行列 135 は、複製線に沿ってスカッキングされる(140)。通常、拡張された連結性行列の行または列は、基本行列の N 個の行または列に対応する。したがって、スカッキングによって複製線の両側において基本行列から行または列が除去される。図 2A および図 2B の例では、N は、4 に等しく、すなわち、拡張された連結性行列 230 の各列が行列 260 内の 4 つの列に対応する。このため、スカッキングは、複製線の両側において行列 260 から 2 つの列を除去することを含む。具体的には、複製線 225 の両側で 2 つの列 265 が除去され、行列 270 が生成される。同様に、複製線 216 の両側で 2 つの行 275 が除去され、行列 280 が生成される。

【0036】

行列 280 は、QC LDPC 符号 150 の一例である。模範行列(exemplar matrix)から見て取ることができるように、本発明の幾つかの実施の形態によって求められた QC LDPC 符号 150 は、特殊な構造を有する。符号は、部分行列を含む。例えば、線 285 によって示すように、符号 280 は、6 つの部分行列を含む。各部分行列 281 は、巡回構造を有するが、部分行列の要素の値は、線 290 および 295 等の遷移線を越えると、巡回フローを変化させる。これは、HQCLDPC 符号を表す行列をスカッキングすることによって、符号 280 が形成されるためである。

【0037】

本方法 100 の上記のステップは、一組の例を用いて以下でより詳細に説明される。これらの例は、本発明の範囲を限定することを意図するものではない。

【0038】

準巡回 LDPC 符号

QC LDPC 符号を全体として検討する前に、「重み I(J, L) 正則」QC LDPC 符号と呼ばれる重要な特殊な事例を定義することが有用である。これらの符号のパリティ検査行列は、それぞれが $p \times p$ の巡回置換行列である J・L の部分行列から構成される。

【0039】

$I_{i,p}$ が、 i 個の位置だけ $p \times p$ の恒等行列を循環的に右シフトすることによって得られる、巡回置換行列または「巡回シフト行列」を表すものとする。ここで、 $I_{0,p}$ は $I_{i,p}$ - 1 である。このため $I_{0,p}$ は、 $p \times p$ の恒等行列である。この開示では、 p に対する依存を抑え、 $I_{i,p}$ の代わりに I_i と書く。例として、 $p = 4$ である場合、

【数 2】

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

である。

【0040】

重み I(J, L) の QC LDPC 符号のパリティ検査行列は、下式(1)である。

【0041】

10

20

30

40

【数3】

$$H = \begin{bmatrix} I_{i_{1,1}} & I_{i_{1,2}} & \cdots & I_{i_{1,L}} \\ I_{i_{2,1}} & I_{i_{2,2}} & \cdots & I_{i_{2,L}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ I_{i_{J,1}} & I_{i_{J,2}} & \cdots & I_{i_{J,L}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

【0042】

10

そのような符号のブロック長は、 $N = p L$ である。

【0043】

$I_k = (I_1)^k$ を用いて、パリティ検査行列を下式(2)のように書き換えることができる。

【0044】

【数4】

$$H = \begin{bmatrix} (I_1)^{i_{1,1}} & (I_1)^{i_{1,2}} & \cdots & (I_1)^{i_{1,L}} \\ (I_1)^{i_{2,1}} & (I_1)^{i_{2,2}} & \cdots & (I_1)^{i_{2,L}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (I_1)^{i_{J,1}} & (I_1)^{i_{J,2}} & \cdots & (I_1)^{i_{J,L}} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

【0045】

20

行列 H は、ダミー変数 x の乗算であるエントリーを有する行列として、下式(3)のように、抽象的に表すこともできる。

【0046】

【数5】

$$H(x) = \begin{bmatrix} x^{i_{1,1}} & x^{i_{1,2}} & \cdots & x^{i_{1,L}} \\ x^{i_{2,1}} & x^{i_{2,2}} & \cdots & x^{i_{2,L}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x^{i_{J,1}} & x^{i_{J,2}} & \cdots & x^{i_{J,L}} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

【0047】

30

行列 $H(x)$ は、エントリーが x の多項式であるパリティ検査行列に一般化することができ、結果として、下式(4)のような標準的な Q C L D P C 符号の多項式パリティ検査行列となる。

【0048】

40

【数6】

$$H(x) = \begin{bmatrix} h_{1,1}(x) & h_{1,2}(x) & \cdots & h_{1,L}(x) \\ h_{2,1}(x) & h_{2,2}(x) & \cdots & h_{2,L}(x) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{J,1}(x) & h_{J,2}(x) & \cdots & h_{J,L}(x) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

【0049】

ここで、 $J = j - 1$ 、 $L = l - 1$ について、下式(5)の関係がある。

【0050】

【数7】

$$h_{j,l}(x) = \sum_{s=0}^{p-1} c_s[j, l] x^s \quad (5)$$

【0051】

バイナリ Q C L D P C 符号の場合、多項式係数 $c_s[j, l]$ は 0 または 1 である。

【0052】

例 1 C を、下式(6)のように、パリティ検査行列によって記述される長さ 9 の Q C L D P C 符号とする。

【0053】

【数8】

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

【0054】

この符号の場合、 $J = 2$ 、 $L = 3$ 、および $p = 3$ であり、行列 H は、下式(7)のよう に書くことができる。

【0055】

【数9】

$$H = \begin{bmatrix} I_0 & I_0 & I_0 \\ 0 & I_0 & I_1 + I_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

【0056】

パリティ検査行列の多項式バージョンは、下式(8)となる。

【0057】

【数10】

$$H(x) = \begin{bmatrix} x^0 & x^0 & x^0 \\ 0 & x^0 & x^1 + x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x^1 + x^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

10

20

30

40

50

【0058】

Q C L D P C 符号は、該 Q C L D P C 符号のパリティ検査行列内の巡回部分行列の中の最大重みに従って、または等価に、該 Q C L D P C 符号のパリティ検査行列内の多項式の最大重みに従って分類することができる。多項式の重みは、その多項式内の非ゼロ項の数である。「重みM」のQ C L D P C 符号は、H(x)内の全ての多項式エントリー $h_{j+1}(x)$ の中の最大重みがMであるQ C L D P C 符号として定義される。

【0059】

例1の符号において $wt(h_{2,3}(x)) = 2$ であり、すなわち、 $h_{2,3}(x) = x^1 + x^2$ は、2項式であるので、かつ全ての $1 \leq j \leq J$ 、 $1 \leq l \leq L$ について $wt(h_{2,3}(x)) = wt(h_{j+1}(x))$ であるので、例1の符号は、重みIIのQ C L D P C 符号である。10

【0060】

この説明において、重みIのQ C L D P C 符号の基本行列を、符号、すなわち、 $\log_x(H(x))$ を定義する冪乗の $J \times L$ の行列（巡回シフト）であると定義し、ここで、エントリーごとに対数が取られ、全ゼロ部分行列を示すために、 $\log_x(0)$ を -1 であると定義する。例えば、パリティ検査行列(3)に対応する基本行列は、下式(9)である。

【0061】

【数11】

$$B = \begin{bmatrix} i_{1,1} & i_{1,2} & \cdots & i_{1,L} \\ i_{2,1} & i_{2,2} & \cdots & i_{2,L} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ i_{J,1} & i_{J,2} & \cdots & i_{J,L} \end{bmatrix}. \quad (9)$$
20

【0062】

Q C L D P C 符号のグラフ表現

L D P C 符号は、該 L D P C 符号のパリティ検査行列 H によって表すこともできるし、等価に該 L D P C 符号のタナーグラフによって表すこともできる。L D P C 符号のタナーグラフは、符号語ビットを表す「変数」ノードと、パリティ検査を表す「検査」ノードとを含む2部グラフである。ここで、変数ノードは、H内の対応するエントリーが非ゼロである場合にのみ、エッジによって検査ノードに連結される。ノードの次数は、該ノードに入るエッジ数として定義される。30

【0063】

「プロトグラフ」は、タナーグラフの分類を導出するテンプレートとして用いることができる。プロトグラフ内の各ノードは、タナーグラフ内のノードの「タイプ」を表す。ノードは、プロトグラフから導出されたタナーグラフにおいて p 回複製される。40

【0064】

図6は、3つのタイプ(1, 2, 3)の変数ノードおよび2つのタイプ(A, B)の検査ノードを有するプロトグラフ例を示している。タイプAの各検査は、3つのタイプのそれぞれの1つの変数に連結され、タイプBの各検査は、タイプ2の1つの変数およびタイプ3の2つの変数に連結される。同様に、タイプ1の各変数は、タイプAの1つの検査に連結され、以下同様である。

【0065】

図7 A および図7 B は、p = 3 である、図6のプロトグラフから導出された2つのタナーグラフを示している。特定のプロトグラフに対応する多くの可能なタナーグラフが存在50

し、これらのタナーグラフは、必ずしも準巡回構造を有する必要がない。図 7 A のタナーグラフは、準巡回構造を有しない。対照的に、図 7 B のタナーグラフは、準巡回構造を有し、実際に、例 1 において与えられた Q C L D P C 符号のパリティ検査行列を有する。

【0066】

プロトグラフは、連結性行列によって等価に記述することができる。連結性行列は、プロトグラフ内の検査タイプ数に等しい数の行、および変数タイプ数に等しい数の列を有する。連結性行列内の各エントリーは、プロトグラフ内に、検査ノードタイプを変数ノードタイプに連結する幾つのエッジが存在するかを記述する。例えば、図 1 に示すプロトグラフの連結性行列 C は、下式(19)である。

【0067】

【数 1 2】

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

【0068】

特定のプロトグラフによって規定されるテンプレートから準巡回パリティ検査行列 H(x) を導出するために、対応する連結性行列内の各エントリーを、該エントリーに等しい重みの多項式と置き換えることができる。この手順は、Q C L D P C 符号へのプロトグラフの「直接変換」と呼ばれる。

【0069】

例えば、式(10)において与えられる連結性行列 C を有するプロトグラフは、下式(11)のパリティ検査行列を有する Q C L D P C 符号に直接変換することができる。

【0070】

【数 1 3】

$$H(x) = \begin{bmatrix} x^a & x^b & x^c \\ 0 & x^d & x^e + x^f \end{bmatrix}, \quad (11)$$

【0071】

ここで、a、b、c、d、e、および f は、0 と p - 1 との間の整数の指数であり、e f である。

【0072】

多項式のためにいずれの指数を選ぶかに依拠して、Q C L D P C 符号へのプロトグラフの多数の可能な直接変換が存在する。例えば、連結性行列(10)は、下式(12)のパリティ検査行列を有する Q C L D P C 符号に直接コンバートすることができる。

【0073】

【数 1 4】

$$H(x) = \begin{bmatrix} x^0 & x^0 & x^0 \\ 0 & x^0 & x^1 + x^2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

【0074】

Q C L D P C 符号におけるサイクル

サイクルは、タナーグラフ内のノードを通る経路であり、検査ノードと変数ノードとの間を交互に行き来し、同じノードで開始および終了する。パリティ検査行列符号の観点で、サイクルは、行列の同じ行で開始および終了する、行列を通る一連の交互の垂直水平運動として特徴づけることができる。(列に沿った) 垂直運動は、サイクルの次のステップを形成する同じ変数ノードに連結された第 2 のエッジに対応する。(行に沿った) 水平運

10

20

30

40

50

動は、経路の一部分を形成する同じ検査ノードに連結された 2 つのエッジに対応する。

【0075】

例えば、パラメータ $J = 4$ 、 $L = 9$ 、および $p = 3$ を有する重み I の Q C L D P C 符号のパリティ検査行列を検討する。この例では、パリティ検査行列は、パリティ検査行列において長方形パターンに配列された 4 つの 3×3 の巡回シフト部分行列を含む。図 3 A および図 3 B は、これらの 4 つの行列のパラメータの 2 つの選択を示している。図 3 A は、それぞれパラメータ $a = 0$ 、 $b = 1$ 、 $c = 2$ 、および $d = 1$ を有する行列 3 1 1 ~ 3 1 4 を示している。パラメータ { a , b , c , d } は、恒等行列からのシフトを示している。図 3 B は、それぞれのパラメータ $a = 0$ 、 $b = c = d = 1$ を有する行列 3 2 1 ~ 3 2 4 を示している。

10

【0076】

サイクルが存在するための必要十分条件は、基本行列を通る経路が、開始エントリーに戻るとき、該経路が開始した巡回シフト行列の同じ列に戻ることである。例えば、4 つ全ての行列を通る経路を検討する。経路 3 1 0 によって長さ 4 のサイクルが生じる。一方、図 3 B の例では、巡回シフト選択が僅かに異なり、巡回シフト行列の同じ列への戻りは、基本行列の回りをさらに 2 回通過した後に初めて生じ、その結果、長さ 12 のサイクルを有する経路 3 2 0 となる。

【0077】

結果として、1 組の p 個のサイクルを生じる { a , b , c , d } に対する条件は、以下の方法に従って計算することができる。所与の経路に沿った近傍の置換行列と関連付けられたシフトインデックスの交代和を計算する。ここで、全ての奇数のシフトインデックスは、加算されるのではなく減算される。例えば、図 3 A および図 3 B の左側の経路を検討する。和は、 $-a + b - c + d$ である。和における近傍シフトインデックス間の各差は、巡回置換行列のいずれの列、すなわち、いずれの変数ノードを経路が通過するかにおけるシフトに対応する。経路の終わりにおいて差の合計がゼロ (p を法とする) となる場合のみ、経路は、開始置換行列において同じ変数ノードに戻り、それによってサイクルを形成する。図 3 A の例の場合、長さ 4 のサイクルが存在する条件は、下式 (13) である。

20

【0078】

【数 15】

$$(-a + b - c + d) \bmod p = 0, \quad (13)$$

30

【0079】

これは、 $a = 0$ 、 $b = 1$ 、 $c = 2$ 、 $d = 1$ の場合に満たされるが、 $a = 0$ 、 $b = c = d = 1$ では満たされない。

【0080】

下式 (14) のような 2×3 の多項式パリティ検査行列によって定義された重み II の符号により複雑な例を検討する。

【0081】

【数 16】

$$H(x) = \begin{bmatrix} x^0 & x^0 & x^0 \\ 0 & x^0 & x^1 + x^2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

40

【0082】

また、下式 (15) の順序付けされた数列を検討する。

【0083】

【数 17】

$$O = \{(1,2), (2,2), (2,3), (2,3), (2,3), (1,3)\} \quad (15)$$

50

【0084】

ここで、O内の各対(j, l)は、 $1 \leq j \leq J = 2$ および $1 \leq l \leq L = 3$ を満たす。この順序付けされた数列は、H(x)を通る一連の直線的な運動を指定する。ここで、各対内の第1の数は、H(x)の行を指定し、第2の数は、H(x)の列を指定する。ターゲラフを通る候補サイクルを指定するために、幾つかの実施の形態は、係数インデックスsを、

【数18】

$$c_s[j, l] \neq 0$$

10

となるようにO内の各対(j, l)と関連付ける。ここで、式(5)に従って $c_s[j, l]$ が定義される。この係数インデックスの数列をSで表す。数列内の各ステップがターゲラフ内の別個のエッジをトラバースすることに対応することを保証するには、O内の近傍対(j-, l-)および(j+, l+)並びにS内の対応する近傍係数インデックスs-およびs+の次のもの、すなわち、(j-, l-) = (j+, l+)の場合、対応するインデックスs- = s+であることを必要とする。

【0085】

候補サイクルは、pを法とするS内の係数インデックスの交代和がゼロに等しい場合に実際にサイクルである。本発明の例では、係数インデックスのそれぞれの(順序付けされた)集合のために、下式(16)、(17)の2つの選択肢を検討する。

20

【0086】

【数19】

$$S_a = \{0, 0, 2, 1, 2, 0\} \quad (16)$$

$$S_b = \{0, 0, 1, 2, 1, 0\}. \quad (17)$$

【0087】

これらの選択肢のそれぞれが、符号のターゲラフを通る長さ6のサイクルに対応する。3を法とする交代和は、ゼロに等しいことを検証することができる。それぞれ、これらの和は、下式(18)、(19)である。

30

【0088】

【数20】

$$(-0 + 0 - 2 + 1 - 2 + 0) \bmod 3 = (-3) \bmod 3 = 0 \quad (18)$$

$$(-0 + 0 - 1 + 2 - 1 + 0) \bmod 3 = (0) \bmod 3 = 0. \quad (19)$$

【0089】

不都合なことに、より高い重みのQC-LDPC符号は、不可避的に短いサイクルを含む。任意の重みIIのQC-LDPC符号が不可避的に長さ6のサイクルを含む。また、重みIIのQC-LDPC符号のパリティ検査行列H(x)が同じ行または同じ列内に2つの重み2の多項式を含む場合、その符号は、不可避的に8サイクルを有する。

40

【0090】

これらの不可避的な6サイクルおよび8サイクルは、直接変換を用いて、いずれのプロトグラフを、高ガースを有する準巡回符号にコンバートすることができるかに対して、重大な制限を課す。例えば、プロトグラフが、3つのエッジによって検査タイプに連結された変数タイプを有する場合、直接変換によって不可避的に、得られるQC-LDPC符号が6サイクルとなる。この欠点は、方法100を用いる本発明の実施の形態によって克服される。10以上のガースを有するQC-LDPC符号を求めるために、幾つかの実施の形態は、階層QC-LDPC符号を用いる。

50

【0091】

階層 Q C L D P C 符号

階層 Q C L D P C (H Q C L D P C) 符号は、レベルから形成される。各レベルは、準巡回構造を有する部分行列によって形成される。構造は、少なくとも 2 つの等価で相補的な形式で、すなわち、1 つは、H Q C L D P C 符号の多項式パリティ検査行列の観点で、もう 1 つは、これらの H Q C L D P C 符号の「ツリー構造」の観点で指定することができる。

【0092】

例 2 : 例えば、下式 (20) において指定される $p = 8$ の多項式パリティ検査行列を検討する。多項式エントリーのうちの任意のものの最も高い重みが 2 (例えば、 $h_{1,3}(x) = x^1 + x^7$) であり、行列内に 12 個の列が存在するので、これは、長さ 96 の重み I I の Q C L D P C 符号である。10

【0093】

【数 2 1】

$$H(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & x^1+x^7 & 0 & x^7 & 1+x^6 & 0 & 0 & 0 & x^2 & x^5 & 1 \\ x^1+x^7 & x^2 & 0 & 1+x^6 & 0 & x^7 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^2 & x^5 \\ 0 & x^1+x^7 & x^2 & x^7 & 1+x^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^5 & 1 & x^2 \\ 0 & x^7 & 1+x^6 & x^2 & 0 & x^1+x^7 & x^2 & x^5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+x^6 & 0 & x^7 & x^1+x^7 & x^2 & 0 & 1 & x^2 & x^5 & 0 & 0 & 0 \\ x^7 & 1+x^6 & 0 & 0 & x^1+x^7 & x^2 & x^5 & 1 & x^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20) \quad 20$$

【0094】

一方、このパリティ検査行列は、該パリティ検査行列を階層 Q C L D P C 符号にするさらなる構造を有する。特に、この例では、(20) の多項式の各 3×3 の部分行列は、 3×3 の部分行列の 2×2 の部分行列の左側および右側双方の組と同様に巡回構造を有する。

【0095】

標準的な Q C L D P C 符号において基礎をなす巡回部分行列を表すのにダミー変数 x の多項式を用いるのと同様に、式 (20) における変数 x によって表される巡回行列および x の多項式の各 3×3 の部分行列内の巡回配置の双方を表すのに、2 つのダミー変数 x および y の 2 变量多項式を用いることができる。後者の巡回構造は、ダミー変数 y によって表される。さらなるダミー変数 z によって 3×3 の巡回部分行列の 2×2 の巡回構造をさらに表すことができる。30

【0096】

このため、この例の幾つかの実施の形態は、式 (20) の 6×12 の多項式パリティ検査行列 $H(x)$ を、下式 (21) に従って 2×4 の 2 部多項式パリティ検査行列 $H(x, y)$ に変換する。

【0097】

【数 2 2】

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + (x+x^7)y^2 & x^7y + (1+x^6)y^2 & 0 & x^2 + x^5y + y^2 \\ x^7y + (1+x^6)y^2 & x^2 + (x+x^7)y^2 & x^2 + x^5y + y^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (21) \quad 40$$

【0098】

幾つかの実施の形態は、プロセスを繰り返して、 $H(x, y)$ を、下式 (22) に従つて 1×2 の 3 变量多項式パリティ検査行列 $H(x, y, z)$ に変換する。

【0099】

【数23】

$$H(x, y, z) = [x^2 + (x + x^7)y^2 + (x^7y + (1+x^6)y^2)z \mid (x^2 + x^5y + y^2)z] \quad (22)$$

【0100】

多項式パリティ検査行列(20)、(21)、および(22)への、この符号のパリティ検査行列の3つの表現のそれぞれは、この3レベルHQC-LDPC符号の階層における「レベル」に対応する。

【0101】

HQC-LDPC符号を構築するとき、幾つかの実施の形態は、他の方向に進み、すなわち、 $H(x, y, z)$ のような行列を $H(x)$ に拡張し、その後、最終的にエントリーが1およびゼロである全パリティ検査行列に拡張する。多項式行列を拡張するには、全てのレベルにおける巡回行列のサイズが知られなくてはならない。
10

【0102】

より正式には、HQC-LDPC符号は、以下の定義によって説明することができる。

【0103】

定義1：K個のレベルを有するHQC-LDPC符号が、K個の変数の $J_{[K]} \times L_{[K]}$ の多変量多項式パリティ検査行列 $H(\cdot)$ によって定義される。 $H(\cdot)$ のj番目の行およびl番目の列($1 \ j \ J_{[K]}, 1 \ l \ L_{[K]}$)のエントリーは、K個の変数 $x_{[1]}, \dots, x_{[K]}$ にわたるK変量多項式 $h_{j, l}(\cdot, \dots, \cdot)$ である。 $x_{[K]}(1 \ k \ K)$ におけるこれらの多項式のうちの任意のものの最大指数は $p_{[k]} - 1$ である。項
20

【数24】

$$x_{[1]}^{s_1} \cdot x_{[2]}^{s_2} \cdots x_{[K]}^{s_K}$$

(ここで、全てのkについて $0 \leq s_k \leq p_{[k]} - 1$)と関連付けられる係数は、

【数25】

$$c_{s_1, \dots, s_K}[j, l]$$

30

である。これらの定義を用いて、下式(23)の $J_{[K]} \cdot L_{[K]}$ の多項式によって符号を定義した。

【0104】

【数26】

$$h_{j,l}(x_{[1]}, \dots, x_{[K]}) =$$

$$\sum_{s_K=0}^{p_{[K]}-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{p_{[1]}-1} c_{s_1, \dots, s_K}[j, l] \left(\prod_{k=1}^K x_{[k]}^{s_k} \right). \quad (23) \quad 40$$

【0105】

そのような符号のパリティ検査行列は、 $H(x_{[1]}, \dots, x_{[K]})$ の $J_{[K]} \cdot L_{[K]}$ 個のエントリーのそれぞれを、下式(24)の部分行列と置き換えることによって得られる。

【0106】

【数27】

$$\sum_{s_K=0}^{p_{[K]}-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{p_{[1]}-1} c_{s_1 \dots s_K}[j, l] \left(I_{1,p_{[K]}}^{s_K} \otimes \dots \otimes I_{1,p_{[1]}}^{s_1} \right) \quad (24)$$

【0107】

ここで、

【数28】

 \otimes

10

は、クロネッカー積を表す。再帰的関係 $J_{[k-1]} = J_{[k]} \cdot p_{[k]}$ および $L_{[k-1]} = L_{[k]} \cdot p_{[k]}$ (ここで、 $0 \leq k \leq K$) を定義すると、このように構築されたパリティ検査行列は、

【数29】

$$J_{[0]} = J_{[K]} \cdot \prod_{k=1}^K p_{[k]}$$

個の行と、

【数30】

$$L_{[0]} = L_{[K]} \cdot \prod_{k=1}^K p_{[k]} \text{ columns.}$$

20

個の列とを有する。

【0108】

例2(続き)：この例の符号は、3レベルHQC-LDPC符号である。定義1を用いてこの例を説明するために、まずxを $x_{[1]}$ とし、yを $x_{[2]}$ とし、zを $x_{[3]}$ とする。

【0109】

この例では、 $p_{[1]} = 8$ 、 $p_{[2]} = 3$ 、 $p_{[3]} = 2$ である。したがって、 $J_{[3]} = 1$ 、 $L_{[3]} = 2$ ； $J_{[2]} = 2$ 、 $L_{[2]} = 4$ ； $J_{[1]} = 6$ 、 $L_{[1]} = 12$ ；および $J_{[0]} = 48$ 、 $L_{[0]} = 96$ である。

30

【0110】

例えば、(22)式の項 $h_{1,1}(x, y, z)$ を、下式(25)のように書き換えることができる。

【0111】

【数31】

$$h_{1,1}(x_{[1]}, x_{[2]}, x_{[3]})$$

$$= x_{[1]}^2 + (x_{[1]} + x_{[1]}^7)x_{[2]}^2 + (x_{[1]}^7 x_{[2]} + (1 + x_{[1]}^6)x_{[2]}^2)x_{[3]} \quad (20)$$

$$= \sum_{s_3=0}^1 \sum_{s_2=0}^2 \sum_{s_1=0}^7 c_{s_1, s_2, s_3} [1, 1] x_{[1]}^{s_1} x_{[2]}^{s_2} x_{[3]}^{s_3}, \quad (25)$$

【0112】

ここで、下式(26)

$$c_{2,0,0}[1, 1] = c_{1,2,0}[1, 1] = c_{7,2,0}[1, 1] = c_{7,1,1}[1, 1] = c_{0,2,1}[1, 1] = c_{6,2,1}[1, 1] = 1 \quad (26)$$

50

(2 6)

の場合を除いて、全ての係数

【数 3 2】

$$c_{s_1, s_2, s_3} [1, 1]$$

がゼロである。

【0 1 1 3】

1つの変数の Q C L D P C 符号の多項式パリティ検査行列 $H (x_{[1]})$ の式(4)において与えられる形式を生成するために、幾つかの実施の形態は、第1のレベルを除く全てについて、下式(27)の構造を用いる。各 $h_{i, 1} (x_{[1]}, \dots, x_{[K]})$ を $x_{[1]}$ の多項式行列と置き換えることができる。
10

【0 1 1 4】

【数 3 3】

$$\sum_{s_K=0}^{p_{[K]}-1} K \sum_{s_1=0}^{p_{[1]}-1} c_{s_1, K, s_K} [j, l] \left(I_{1, p_{[K]}}^{s_K} \otimes L \otimes I_{1, p_{[2]}}^{s_2} \right) x_{[1]}^{s_1}. \quad (27)$$

【0 1 1 5】

20

行列 $H (x_{[1]})$ は、サイズ $J_{[1]} \times L_{[1]}$ である。非ゼロ係数 $c_{0, 2, 1} [1, 1]$ および $c_{6, 2, 1} [1, 1]$ に対応する $h_{1, 1} (x_{[1]}, x_{[2]}, x_{[3]})$ の最終項、すなわち、

【数 3 4】

$$(1 + x_{[1]}^6) x_{[2]}^2 x_{[3]}$$

を検討する。式(27)によれば、 $H (x_{[0]})$ へのこの項の寄与は、

【数 3 5】

$$c_{0, 2, 1} [1, 1] (I_{1, 2} \otimes I_{1, 3}^2) x_{[1]}^0 + c_{6, 2, 1} [1, 1] (I_{1, 2} \otimes I_{1, 3}^2) x_{[1]}^6,$$

30

であり、ここで、

【数 3 6】

$$x_{[1]}^0 = 1$$

$$c_{1, 2, 1} [1, 1] = c_{6, 2, 1} [1, 1] = 1$$

$$I_{1, 2} \otimes I_{1, 3}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

40

である。

【0 1 1 6】

式(27)の形式は、幾つかの H Q C L D P C 符号の構造を明らかにする。行列

50

【数37】

$$I_{1,p[K]}^{s_K} \otimes \cdots \otimes I_{1,p[2]}^{s_2}$$

の各行および各列は、正確に1つの非ゼロ要素を有する。係数

【数38】

$$c_{s_1, s_2, \dots, s_K}[j, l]$$

が非ゼロである場合、置換行列

10

【数39】

$$I_{1,p[1]}^{s_1} \quad (\text{項 } x_{[1]}^{i_1} \text{ に等しい})$$

がこれらの非ゼロ要素のそれぞれのロケーションにおいて追加される。

【0117】

H Q C L D P C 符号のツリー構造

任意の H Q C L D P C 符号のツリー構造は、例えば、以下の定義 2 に基づいて、ラベル付けされたツリーの行列によって表すことができる。以下の定義の動機となる基本的観測は、任意の H Q C L D P C 符号を定義する多項式の非ゼロ項が、ラベル付けされたツリーによって表すことができる階層クラスタリングを有することである。正式に、そのようなラベル付けされたツリーを以下のように定義する。

20

【0118】

定義 2 : K レベル H Q C L D P C 符号を定義する K 個の変数の $J_{[K]} \times L_{[K]}$ の多変量多項式パリティ検査行列 $H(\cdot)$ 内のエントリーに対応するラベル付けされたツリー T が K 個のレベル (1, ..., K) によって定義される。各ツリーのルートノードは、最上位 (K 番目の) レベルにおける単一のノードである。レベル k における各ノード (1, ..., K) は、該ノードを下の次のレベルのノードに連結する複数のエッジを有する。エッジ数は、集合 {1, ..., p[k] - 1} 内の整数である。

【0119】

30

図 4 は、3 レベル階層 Q C L D P C 符号のツリー構造の一例を示している。レベル k におけるノードの下の各エッジが集合 {0, 1, ..., p[k] - 1} 内の整数によってラベル付けされている。エッジが同じ親を共有する場合、すなわち、上位レベルの同じノードに連結されている場合、エッジは、「兄弟」と呼ばれる。兄弟ノードのエッジラベルは、別個であるように制約される。最下位ノードの下のエッジを「リーフ」と呼ぶ。|T[k]| を用いて、レベル k における T のエッジ数、すなわち、レベル k における親ノードを有するエッジの集合を表す。ツリー 410 は、T_{1,1} であり、ツリー 420 は、T_{1,2} である。

【0120】

例 2 で論考した符号は、図 4 に示す 2 つのラベル付けされたツリーの行列によって特徴付けられる。ツリー 410 は多項式 $h_{1,1}(x, y, z)$ を特徴付け、ツリー 420 は、式 (22) に指定するように、 $h_{1,2}(x, y, z)$ を特徴付ける。

40

【0121】

定義 3 : K レベル H Q C L D P C 符号のツリー構造は、ラベル付けされたツリー $T = \{T_{j,1}\}_{j=1}^J (1 \leq j \leq J_{[K]}, 1 \leq l \leq L_{[K]})$ の行列によって指定される。 $T_{j,1}$ の各リーフに、単一の非ゼロ係数

【数40】

$$c_{s_1, \dots, s_K}[j, l]$$

50

を 1 対 1 で関連付ける。リーフからルートノードまでの一意の経路上のエッジラベルが e_1, \dots, e_k である場合、リーフと関連付けられた非ゼロ係数は、

【数 4 1】

$$c_{e_1, \dots, e_K}[j, l] = 1.$$

である。

【0 1 2 2】

ある特定の場合（全ゼロ多項式に対応する）、「ヌル」ツリーを定義することを望む。これは、存在しないツリーである（したがって、全ての係数がゼロとなるようなエッジが存在しない）。特殊なシンボル*を用いてヌルツリーを表す。

10

【0 1 2 3】

ツリー $T_{j, l}$ のレベル K の下のエッジ数は、 $h_{j, l}(x_{[1]}, \dots, x_{[K]})$ において現れる $x_{[K]}$ の別個の幕乗数を示す。レベル $K - 1$ における各ノードは、これらの項のうちの 1 つに対応する。レベル $K - 1$ におけるノードのそれぞれの下のエッジ数は、その項と関連付けられた $x_{[K-1]}$ の別個の幕乗数を示し、ツリーを下って以下同様である。ツリー内のリーフ数は、多項式 $h_{j, l}(x_{[1]}, \dots, x_{[K]})$ 内の項数に等しい。（全ての (j, l) 対にわたる）最下位レベルノードのうちの任意のものの下のリーフの最大数は、符号の重み（重み I、重み II 等）を表す。エッジラベルは、非ゼロ多項式を定義する指標を示す。

20

【0 1 2 4】

レベル k におけるノードのうちの任意のものの下のリーフの最大数によって、階層符号のきめ細かい「レベル k の重み」を定義することもできる。階層符号は、異なるレベルにおいて異なる重みを有することができ、例えば、図 4 に示すツリー構造を有する例 2 からの符号は、レベル 1（最も低いレベル）において重み II であり、レベル 2 において重み III であり、レベル 3 において重み IV である。

【0 1 2 5】

任意の HQC-LDPC 符号を、定義 1 に定義するように該 HQC-LDPC 符号の多項式パリティ検査行列の観点で定義することもできるし、等価に、定義 3 に定義するように該 HQC-LDPC 符号のツリー構造の観点で定義することもできる。

30

【0 1 2 6】

階層 QC-LDPC 符号におけるサイクル

高ガース HQC-LDPC 符号を構築することを可能にするために、該高ガース HQC-LDPC 符号の多項式パリティ検査行列を調べることによって、該高ガース HQC-LDPC 符号がそのタナーグラフにおいて特定の長さを有する否かを識別することができる必要がある。以下は、HQC-LDPC 符号が特定の長さのサイクルを有するための、該符号の多項式パリティ検査行列に対する必要十分条件である。標準的な QC-LDPC 符号におけるサイクルと比較して、HQC-LDPC 符号におけるサイクルは、以下の定義および定理に従って、全ての階層レベルにおいて同時にサイクルである必要がある。

【0 1 2 7】

40

定義 4：HQC-LDPC 符号の K 変量の $J_{[K]} \times L_{[K]}$ の多項式パリティ検査行列 $H(\cdot)$ を通る長さ 2 の経路 P は、2 つの集合 O および S によって指定される。すなわち、 $P = \{O, S\}$ である。

【0 1 2 8】

第 1 の集合 O は、下式 (29) となるような順序付けされた数列である。

【0 1 2 9】

【数4 2】

$$O = \{(j_1, l_1), (j_2, l_2), (j_3, l_3), \dots, (j_{2\Lambda}, l_{2\Lambda})\} \quad (29)$$

ここで

$1 \leq j_t \leq J_{[K]}, \quad 1 \leq l_t \leq L_{[K]}$ 全ての $t, 1 \leq t \leq 2\Lambda$, について

$$j_{2\Lambda} = j_1,$$

10

$$j_t = j_{t+1} \text{ for } t \in \mathbb{Z}_{even} \text{ (偶数),}$$

$$l_t = l_{t+1} \text{ for } t \in \mathbb{Z}_{odd} \text{ (奇数),}$$

【0 1 3 0】

全ての $(j, l) \in O$ について $|C[j, l]| > 0$ であり、ここで、集合 $C[j, l]$ は、下式(30)のように、非ゼロである $H(\cdot)$ の j 番目の行および l 番目の列における多項式内の一組の係数であると定義される。

20

【0 1 3 1】

【数4 3】

$$C[j, l] = \{c_{s_1, \dots, s_K}[j, l] : c_{s_1, \dots, s_K}[j, l] \neq 0\}. \quad (30)$$

【0 1 3 2】

第2の集合 S は、下式(31)のような、係数インデックスの長さ K のベクトルの集合である。

【0 1 3 3】

【数4 4】

$$S = \{s[j_1, l_1], s[j_2, l_2], \dots, s[j_{2\Lambda}, l_{2\Lambda}]\} \quad (31)$$

30

【0 1 3 4】

ここで、表記によって暗に意味されているように、全ての $t (1 \leq t \leq 2\Lambda)$ について $(j_t, l_t) \in O$ であり、 $|S| = |O|$ である。

【0 1 3 5】

さらに、 $s[j, l]$ の k 番目の座標 $s_k[j, l]$ は、全ての $(j, l) \in O$ について $s_k[j, l] = p[k] - 1$ を満たし、全ての $(j, l) \in O$ について $c_{s[j, l]}[j, l] = C[j, l]$ を満たす。ここで、 $c_{s[j, l]}[j, l]$ は、

40

【数4 5】

$$c_{s_1, \dots, s_K}[j, l].$$

の簡略表記である。

【0 1 3 6】

O の連続要素が同一である、すなわち、ある $t (1 \leq t \leq 2\Lambda)$ について $(j_t, l_t) = (j_{t+1}, l_{t+1})$ である場合、 $s[j_t, l_t] = s[j_{t+1}, l_{t+1}]$ である。

【0 1 3 7】

50

定理 1 : K 变量の $J_{[K]} \times L_{[K]}$ の多項式パリティ検査行列 $H(\cdot)$ を通る経路長 2 の経路 $P = \{O, S\}$ は、全ての $k (1 \leq k \leq K)$ について、下式 (32) である場合にのみ、タナーグラフの長さ 2 のサイクルに対応する。

【0138】

【数46】

$$\Sigma[k] \bmod p_{[k]} = 0. \quad (32)$$

【0139】

ここで、各 $k (1 \leq k \leq K)$ について、交代和 $[k]$ は、下式 (33) によって定義される。 10

【0140】

【数47】

$$\Sigma[k] = \sum_{t=1}^{2^K} (-1)^t s_k[j_t, l_t]. \quad (33)$$

【0141】

定理 2 : K レベル階層 Q C L D P C 符号が少なくとも 2 ($\lambda + 1$) のガースを有するための必要十分条件は、以下のとおりである。最大でも 2 の長さ (少なくとも 4、最大 20 でも 2 の経路長) の多項式パリティ検査行列を通る全ての経路について、条件 (32) は、少なくとも 1 つの $k (1 \leq k \leq K)$ について成り立たない。

【0142】

例として、(20) および (21) において、それぞれ指定される多項式パリティ検査行列 $H(x)$ および $H(x, y)$ を再び検討する。まず、 $H(x)$ によって指定される符号の非階層記述を検討する。経路 $P \{O, S\}$ をトラバースする長さ 4 のサイクルが存在する。ここで、

【数48】

$$O = \{(0,0), (1,0), (1,5), (0,5)\}.$$

30

である。これは順に、4 つの多項式

【数49】

$$\begin{aligned} x^2 &= c_2[0,0]x^2, \\ x + x^7 &= c_1[1,0]x + c_7[1,0]x^7, \\ x^7 &= c_7[1,5]x^7, \\ 1 + x^6 &= c_0[0,5]x^0 + c_6[0,5]x^6. \end{aligned}$$

40

に対応する。 $c_2 [0, 0]$ 、 $c_1 [1, 0]$ 、 $c_7 [1, 5]$ 、および $c_0 [0, 5]$ を選択した結果、

【数50】

$$S = \{2, 1, 7, 0\}.$$

となる。和を計算すると、下式 (34) となる。

【0143】

【数51】

$$\Sigma[1] \bmod 8 = (-2 + 1 - 7 + 0) \bmod 8 = 0, \quad (34)$$

50

【0144】

ここで、この符号について、 $p_{[1]} = 8$ である。この例は、一般表記において、非階層 Q C L D P C 符号におけるサイクルの試験を確認する。

【0145】

階層的視点から同じサイクルを検討する。式(21)の2レベル表現 $H(x, y)$ に関する、タナーグラフを通る同じサイクルが順序付けされた数列

【数52】

$$O = \{(0,0), (0,0), (0,1), (0,1)\}.$$

に対応する。ここで、多項式 $x^2 + (x + x^7)y^2$ および $x^7y + (1 + x^6)y^2$ を得る。これらはそれぞれ、

【数53】

$$c_{2,0}[0,0]x^2 + c_{1,2}[0,0]xy^2 + c_{7,2}[0,0]x^7y^2,$$

および

【数54】

$$c_{7,1}[0,1]x^2 + c_{0,2}[0,1]xy^2 + c_{6,2}[0,1]x^7y^2.$$

20

である。同じサイクルは、係数インデックス

【数55】

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

に対応する。

【0146】

各係数の第1の部分インデックスが1レベルビューにおいて選択された係数の部分インデックスに対応することに留意されたい。経路に沿った交代和は、

30

【数56】

$$\Sigma[1] \bmod 8 = (-2 + 1 - 7 + 0) \bmod 8 = 0$$

$$\Sigma[2] \bmod 3 = (-0 + 2 - 1 + 2) \bmod 3 = 0$$

である。ここで、この符号について $p_{[1]} = 8$ および $p_{[2]} = 3$ である。

【0147】

H Q C L D P C 符号は、Q C L D P C 符号の一般化であり、不可避的なサイクルも有する可能性もある。特に、符号を定義するツリー行列におけるいずれかのラベル付けされたツリーが3つのリーフを有する場合、任意のH Q C L D P C 符号について長さ6のサイクルが不可避的に存在することになる。H Q C L D P C 符号を定義するラベル付けされたツリーの行列のいずれかの行またはいずれかの列において、ともに2つのリーフを有するラベル付けされたツリーの対が存在する場合、不可避的に8つのサイクルが存在することになる。

40

【0148】

制限された2レベルH Q C L D P C 符号

本発明の方法の1つの実施の形態は、「制限された2レベル」H Q C L D P C 符号と呼ぶH Q C L D P C 符号を用いる。「制限された2レベル」が暗に意味するように、制限された2レベルH Q C L D P C 符号内の階層は、2つのレベルしか有しない。さらなる「制限」は、第1の(最も低い)レベルの重みが1であることである。これらの符号の

50

ツリー構造記述の観点で、ラベル付けされたツリーは、全て、図 8 に示すような形式を有し、最下レベルにおけるノードは、それぞれ、正確に 1 つのリーフを有する、すなわち、リーフは、兄弟を有しない。第 2 のレベルにおけるノードは、任意の数のエッジを有することができる。

【0149】

制限された 2 レベル符号が 2 つのレベルを有することは、該制限された 2 レベル符号が、2 つのダミー変数 $H(x, y)$ の多項式パリティ検査行列によって記述されることを意味する。重み 1 を有する最も低いレベルへの制約は、行列 $H(x, y)$ 内の任意の重み w の多項式が下式 (35) の形式を有しなくてはならないことを意味する。

【0150】

【数 57】

$$x^{a_1}y^{A_1} + x^{a_2}y^{A_2} + \dots + x^{a_w}y^{A_w} \quad (35)$$

【0151】

ここで、全ての A_i 個の指数は、別個でなくてはならない。通常通り、指数は、 x 指数について 0 と $p_{[1]} - 1$ との間の範囲をとり、 y 指数について 0 と $p_{[2]} - 1$ との間の範囲をとる整数である。

【0152】

上述したように、「直接変換」は、プロトグラフと等価の連結性行列を、多項式エンタリーが連結性行列のエンタリーと等しい重みを有した多項式パリティ検査行列 $H(x)$ と置き換えることによって、プロトグラフを標準的な QC-LDPC 符号にコンバートする。プロトグラフを制限された 2 レベル HQC-LDPC 符号にコンバートする同様の直接変換が存在する。ある直接変換は、連結性行列を、多項式エンタリーがそれぞれ制限された形式の式 (35) を有し、重みが連結性行列内のエンタリーに等しい 2 变量多項式パリティ検査行列 $H(x, y)$ と置き換える。

【0153】

例えば、図 6 に示すプロトグラフ 600 に対応する連結性行列は、下式 (36) である。

【0154】

【数 58】

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

【0155】

この行列は、下式 (37) の多項式パリティ検査行列を有する 2 レベルの制限された HQC-LDPC 符号に直接変換される。

【0156】

【数 59】

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} x^a y^A & x^b y^B & x^c y^C \\ 0 & x^d y^D & x^e y^E + x^f y^F \end{bmatrix}, \quad (37)$$

【0157】

ここで、 a, b, c, d, e 、および f は、0 と $p_{[1]} - 1$ との間の整数の係数であり、 A, B, C, D, E 、および F は、 $E - F$ を満たす 0 と $p_{[2]} - 1$ との間の整数の係数である。

【0158】

符号設計パイプライン

10

20

30

40

50

図9は、本発明の1つの実施の形態による高ガースQC LDPC符号を構築する方法のブロック図を示している。実施の形態は、以下のように説明される。所定のプロトグラフ901および所定のガース902が本方法への入力である。プロトグラフ901は、連結性行列903として表される(910)。連結性行列内のエントリーの重みおよび相対的ロケーションに依拠して、実施の形態は、連結性行列を拡張して(920)拡張された連結性行列904を得る。次に、拡張された連結性行列は、制限された2レベルHQC LDPC符号905の多項式パリティ検査行列ファミリーに直接変換される(930)。この実施の形態では、パラメータ $p_{[2]}$ のために4の値を用いる。次に、ガース最適化手順(以下でより詳細に説明される)を用いて残りの自由度を最適化する(940)ために、実施の形態は、全ての不可避的でない6サイクルおよび8サイクルを排除し、対応するタナーグラフ内に不可避的な短いサイクルのみを有するHQC LDPC符号906を得る。実施の形態は、そのHQC LDPC符号の多項式パリティ検査行列を、等価な基本行列907にコンバートする(950)。最後に、「スカッシング手順」960を用いて不可避的なサイクルを除去し、本発明の所望の高ガースQC LDPC符号909を得る。

【0159】

実施の形態は、符号を、スカッシングに適合する形で拡張し、対象のパラメータに合う有効なパリティ検査行列を生成する。この手順の結果生じるLDPC符号は、QC LDPCとなり、HQC LDPC符号ではないが、最終構造は、HQC LDPC符号の構造と同様である。

【0160】

示すように、手順は、最初にプロトグラフの連結性行列Cを生成する。例示の目的で、プロトグラフ210が図2Aに示されているプロトグラフであると仮定する。「拡張」手順は、以下のように機能する。まず、値2以上の2つ以上の要素、または値3の単一の要素を有する行列の各行を、複製のためにマーキングする。値2以上の2つ以上の要素を有する各列もマーキングする。次に、Cを拡張して新たな連結性行列C'を生成する。連結性行列C'において、複製のためにマーキングされたC内の行のそれぞれが複製される。次に、再び拡張を行い、マーキングされた列のそれぞれを複製することによって、C'からC''を生成する。スカッシングに着手するときに明らかとなるように、行列C'およびC''において、いずれの行および列が互いの複製版であるかを追跡しなくてはならない。

【0161】

本発明の例において、連結性行列205は、下式(38)である。

【0162】

【数60】

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

【0163】

この連結性行列における第1の行212は、値3を有する要素(およびまた、値2以上の2つの要素)を含み、このため、これをマーキングし、第2の列214も、値2以上の2つの列を有するのでマーキングする。第1の行を複製すると、下式(39)が得られる(220)。

【0164】

【数61】

$$C' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

【0165】

10

20

30

40

50

ここで、第2の列を複製すると、拡張された連結性行列 $2\ 3\ 0$ として下式(40)が得られる。

【0 1 6 6】

【数62】

$$C'' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

【0 1 6 7】

10

C'' において、第1の行および第2の行、並びにまた第2の列および第3の列が、互いの複製版として追跡される。これは、複製線216および225によって表記される。

【0 1 6 8】

次に、拡張された連結性行列 $2\ 3\ 0\ C''$ を、 $p_{[2]} = 4$ を有する2レベルの制限されたHQC-LDPC符号ファミリーを表す多項式パリティ検査行列 $2\ 4\ 0\ H''$ (x, y)に直接変換する。この変換を、1つの追加制約の下で行う。制約は、複製された行の対または複製された列の対内の y 指数が、互いに同一でなくてはならないことである。 $p_{[1]}$ の値は、設計パラメータとして残される。

【0 1 6 9】

本発明の例では、拡張された連結性行列 $2\ 3\ 0\ C''$ は、多項式パリティ検査行列 $2\ 4\ 0$ である H'' (x, y)に直接変換され、下式(41)の形式が得られる。

20

【0 1 7 0】

【数63】

$$H''(x, y) = \begin{bmatrix} x^a y^A + x^b y^B + x^c y^C & x^d y^D + x^e y^E & x^f y^D + x^g y^E & x^h y^H \\ x^i y^A + x^j y^B + x^k y^C & x^l y^D + x^m y^E & x^n y^D + x^o y^E & x^p y^H \\ 0 & x^q y^Q + x^r y^R & x^s y^Q + x^t y^R & x^u y^U \end{bmatrix}. \quad (41)$$

【0 1 7 1】

30

この行列の第1の行および第2の行並びに第2の列および第3の列(複製線を横切る行および列)における y 指数は、互いに同一となるように制限されていることに留意されたい。そうでない場合、全ての指数は、任意の x 指数 a_i について $0 \leq a_i \leq p_{[1]} - 1$ を満たし、任意の y 指数 A_i について $0 \leq A_i \leq p_{[2]} - 1 = 3$ を満たす自由なパラメータである。

【0 1 7 2】

次のステップにおいて、ガース最大化手順(以下でより詳細に説明される)を適用して自由度を最適化し(940)、不可避的な短いサイクルを除く短いサイクルが存在しないように一組の x 係数 a_i および y 係数 A_i を生成する。例えば、 $p_{[1]} = 200$ で本発明のガース最大化手順を用いると、 H'' (x, y)における x 係数および y 係数の下式(42)の選択250によって不可避的な短いサイクルを除いて6サイクルまたは8サイクルが生成されないことがわかる。

40

【0 1 7 3】

【数64】

$$\begin{bmatrix} x^{128}y^1 + x^{69}y^2 + x^{118}y^3 & x^{11}y^2 + x^{121}y^3 & x^{170}y^2 + x^{109}y^3 & x^{38}y^3 \\ x^{63}y^1 + x^{156}y^2 + x^{38}y^3 & x^{186}y^2 + x^{183}y^3 & x^{52}y^2 + x^{146}y^3 & x^{43}y^3 \\ 0 & x^{100}y^0 + x^{104}y^1 & x^{187}y^0 + x^{50}y^1 & x^{59}y^1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

50

【 0 1 7 4 】

上記の多項式パリティ検査行列を有する符号は、下式(43)によって与えられる基本行列 B' 、 265 を有する重み I の QC-LDPC 符号と等価である。

【 0 1 7 5 】

【数65】

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} -1 & 128 & 69 & 118 & -1 & -1 & 11 & 121 & -1 & -1 & 170 & 109 & -1 & -1 & -1 & 38 \\ 118 & -1 & 128 & 69 & 121 & -1 & -1 & 11 & 109 & -1 & -1 & 170 & 38 & -1 & -1 & -1 \\ 69 & 118 & -1 & 128 & 11 & 121 & -1 & -1 & 170 & 109 & -1 & -1 & -1 & 38 & -1 & -1 \\ 128 & 69 & 118 & -1 & -1 & 11 & 121 & -1 & -1 & 170 & 109 & -1 & -1 & -1 & 38 & -1 \\ -1 & 63 & 156 & 38 & -1 & -1 & 186 & 183 & -1 & -1 & 52 & 146 & -1 & -1 & -1 & 43 \\ 38 & -1 & 63 & 156 & 183 & -1 & -1 & 186 & 146 & -1 & -1 & 52 & 43 & -1 & -1 & -1 \\ 156 & 38 & -1 & 63 & 186 & 183 & -1 & -1 & 52 & 146 & -1 & -1 & -1 & 43 & -1 & -1 \\ 63 & 156 & 38 & -1 & -1 & 186 & 183 & -1 & -1 & 52 & 146 & -1 & -1 & -1 & 43 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 100 & 104 & -1 & -1 & 187 & 50 & -1 & -1 & -1 & 59 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 100 & 104 & -1 & -1 & 187 & 50 & -1 & -1 & 59 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 100 & 104 & -1 & -1 & 187 & 50 & -1 & -1 & -1 & 59 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 104 & -1 & -1 & 100 & 50 & -1 & -1 & 187 & 59 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \cdot (43) \quad 10$$

10

20

【 0 1 7 6 】

基本行列 $B_{\alpha\beta}$ は、 4×4 の巡回部分行列で構成される。

【 0 1 7 7 】

ここで、拡張された連結性行列 C' に対応する基本行列 B' を有する。本発明の手順における次のステップは、 B' から列および行を除去して、本発明の元の連結性行列 C に対応する基本行列を得る。

【 0 1 7 8 】

まず、連結性行列 C' の各列は、基本行列 B' の 4 つの列に対応する。本発明の手順の次のステップにおいて、 C' における複製としてマーキングされた列に焦点を当てる。残りの 2 つの列を保持し、 C' 内の複製された対の左列に対応する 4 つから、 B' 内の右の 2 つの列を除去し、また、 C' 内の複製された対の右列に対応する 4 つから、 B' 内の左の 2 つの列を除去するが、右の 2 つの列を保持する。

30

〔 0 1 7 9 〕

本発明の例において、 $C' \cdot 230$ の第 2 の列および第 3 の列は、複製としてマーキングされるため、 $B' \cdot 260$ から 4 つの列 265 を除去し、間引きされた行列 270B'を得る。

【 0 1 8 0 】

この段階において、連結性行列 C' 内の各行は、基本行列 B' 内の 4 つの行に対応する。ここで、 C' において複製としてマーキングされた行に焦点を当てる。 C' 内の複製された対内の最上行に対応する 4 つから B' 内の最も上の 2 つの行を保持し、 C' 内の複製された対の最下行に対応する 4 つから B' 内の最も下の 2 つの行を保持する。このさらなる間引き手順 B によって得られた基本行列を呼び出す。これは、本発明の元の連結性行列 C に対応する基本行列である。

40

【 0 1 8 1 】

本発明の例では、C' 220 の第1の行および第2の行は、複製としてマーキングされている。これは、行列 270 から最も上の4つの行 275 を除去し、最終基本行列 280 を得るべきであることを意味する。このため、最終的に、下式(44)を得る。

【 0 1 8 2 】

【数66】

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 128 & 69 & 118 & -1 & -1 & 170 & 109 & -1 & -1 & -1 & 38 \\ 118 & -1 & 128 & 69 & 121 & -1 & -1 & 170 & 38 & -1 & -1 & -1 \\ 156 & 38 & -1 & 63 & 186 & 183 & -1 & -1 & -1 & 43 & -1 & -1 \\ 63 & 156 & 38 & -1 & -1 & 186 & 146 & -1 & -1 & -1 & 43 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 100 & 104 & -1 & -1 & -1 & 59 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 100 & 50 & -1 & -1 & -1 & 59 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 187 & 50 & -1 & -1 & -1 & 59 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 104 & -1 & -1 & 187 & 59 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

【0183】

最終基本行列 B によって定義される符号は、階層 Q C L D P C 符号ではない。なぜなら、その基本行列は、巡回しない 4×4 の部分行列から構築されているためである。それでも、この符号は、元のプロトグラフによって定義される分類のメンバーである。本発明の例では、基本行列内の 4 つの行および 4 つの列の各群は、検査タイプまたはビットを定義する。このため、本発明の例では、 B の構造から、各第 1 の検査タイプが第 1 のタイプの 3 つのビットに連結され、第 2 のタイプの 2 つのビットに連結され、プロトグラフによる必要に応じて、以下同様に連結される。

【0184】

さらに、本発明の拡張およびスカッシング手順は、符号から全ての「不可避的な」 6 サイクルおよび 8 サイクルを除去する。なぜなら、全てのそのような不可避的なサイクルは、関連する 4×4 の部分行列内の 3 つの行または 3 つの列を用い、そのような各部分行列から 2 つの行または列を除去してあるためである。このため、ガース最大化手順が全ての他の 6 サイクルおよび 8 サイクルを除去すると仮定すると、得られる Q C L D P C 符号は、少なくとも 10 のガースを有することになる。

【0185】

ガース最大化手順

実施の形態の 1 つの変形形態では、多項式パリティ検査行列ファミリー 905 内の自由度 940 は、山登り法によるガース最大化を用いて最適化され、そのタナーグラフ内の唯一の短いサイクルが「不可避的な」短いサイクル 906 である H Q C L D P C 符号が生成される。

【0186】

図 10 は、1 つの実施の形態による、山登り法によるガース最大化のブロック図を示している。ガース最大化への入力は、H Q C L D P C 符号ファミリーを指定するラベル付けされていないツリー $T_{i,j}$ の行列である。出力は、各ツリーの各エッジの値である。所望のツリー構造を有する符号からランダムに選択された符号を用いて手順を初期化する (1010)。これは、兄弟エッジが別個のラベルを有しなくてはならないという制約を受けるツリー T にラベルをランダムに割り当てる意味である。

【0187】

手順への別の入力は、各サイクルタイプと関連付けられた「コスト関数」 1011 である。用いられるコスト関数は、所望のガース未満の長さを有する現在の符号におけるサイクル数に依拠する。より短いサイクルがより長いサイクルよりもコストが高くなるよう重み付けされるように、重みベクトルが用いられる。例えば、ガース 10 が望ましい場合、4 サイクルごとに 100 のコストを割り当て、6 サイクルごとに 10 のコストを割り当て、8 サイクルごとに 1 のコストを割り当てる。本方法は、コストを最小にするので、まず 4 サイクルを除去し、次に 6 サイクルを除去し、最終的に 8 サイクルを除去する。

【0188】

10

20

30

40

50

ガース最大化法は、一連のエッジラベルを反復的に更新する。各反復において、本方法は、単一のエッジラベルを、コスト関数の最大の低減を達成する値に変更する。例えば、エッジごとに、そのラベルを全ての他の可能なラベルに変更するコストを記述する「コスト行列」が求められる(1030)。コスト行列から、各可能なエッジを各可能なラベルに変更するコストの改善を与える「利得行列」を生成することができる(1040)。

【0189】

本方法は、いかなる単一の係数も、コスト(したがって望ましくないサイクル数)をさらに低減する値に変更するがもはやできないとき終了する。正式には、これは、利得行列における最大利得がもはや正でない(1050)ことを意味する。この時点で、HQC-LDPC符号を表す現在のツリー行列を出力する(1070)。正の利得がある場合、これは、コストを改善することができる意味し、コストを最も改善するエッジラベル変化を用いてツリー行列1060を適切に更新する。次に、コスト行列を再度求め(1030)、反復する。

【0190】

エッジラベルに対する兄弟制約を受けて更新が実行される。これによって符号のツリー構造が保持され、このため、符号のプロトグラフ構造は、更新の下で不变である。単一のエッジラベルにおける変化は、複数の符号係数(そのエッジの子孫のツリー内のリーフ数に等しい)に対し滴下効果を有することができる。

【0191】

本発明の実施の形態によって求められるQC-LDPC符号は、図11に示すシステム1100等による復号化手順および符号化手順の双方において用いることができる。本発明の実施の形態は、メモリ内に格納することができる、高ガースを有する準巡回低密度パリティ検査(QC-LDPC)符号1150を構築する方法100を提供する。次に、符号化器1120によって、そのような符号を用いて、データ、例えば、ソース1110によって生成されるk個のシンボルの情報ブロックu[a]1101を符号化することができる。符号化データは、N個のシンボルを含む符号語x[n]1102として雑音チャネル1130を通じて送信することができる。チャネルは、通信チャネルとすることができる。「チャネル」は、ストレージ媒体とすることもできる。この場合、符号語は、後の検索のために媒体に書き込まれる。

【0192】

チャネルが符号語を破損させて信号y[n]1103にする可能性がある。次に、信号は、復号化器1140に渡される。復号化器1140は、QC-LDPC符号1150を用いて情報ブロックu[a]1101の再構築z[a]1104を出力しようと試みる。

【0193】

本発明の上述した実施の形態は、多数の方法のうちの任意のものにおいて実施することができる。例えば、実施の形態は、ハードウェア、ソフトウェア、またはそれらの組合せを用いて実施することができる。ソフトウェアコードは、ソフトウェアにおいて実施されるとき、単一のコンピューターにおいて提供されているか複数のコンピューター間で分散されているかにかかわらず、任意の適切なプロセッサまたはプロセッサ群において実行することができる。そのようなプロセッサは、集積回路構成要素内の1つまたは複数のプロセッサとともに、集積回路として実装することができる。しかし、プロセッサは、任意の適切なフォーマットの回路部を用いて実装することもできる。

【0194】

また、コンピューターは、ラックマウント型コンピューター、デスクトップコンピューター、ラップトップコンピューター、ミニコンピューター、またはタブレットコンピューター等の複数の形式のうちの任意のもので実施することができることを理解すべきである。そのようなコンピューターは、企業ネットワークまたはインターネット等のローカルエリアネットワークまたはワイドエリアネットワークを含む任意の適切な形態の1つまたは複数のネットワークによって相互接続することができる。そのようなネットワークは、任意の適切な技術に基づくことができ、任意の適切なプロトコルに従って動作することができる。

10

20

30

40

50

き、無線ネットワーク、有線ネットワーク、または光ファイバーネットワークを含むことができる。

【0195】

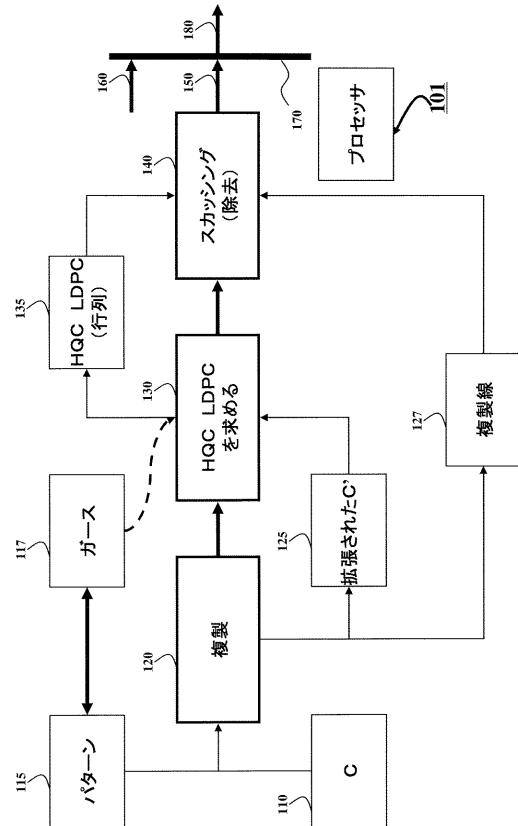
また、本発明の実施の形態は、一例が提供された方法として実施することができる。方法の一部として実行される動作は、任意の適切な方法で順序付けすることができる。したがって、動作が示されたものと異なる順序で実施される実施の形態を構築することができる。異なる順序には、幾つかの動作が例示的な実施の形態において一連の動作として示されている場合であっても、それらの動作を同時に実行することを含むことができる。

【0196】

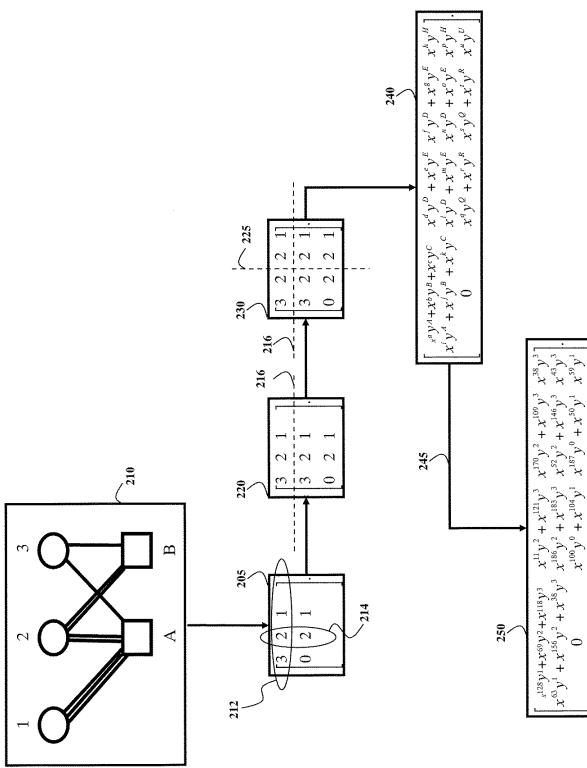
特許請求の範囲における、請求項の構成要素を修飾する「第1の」、「第2の」等の順序を示す語の使用は、1つの請求項構成要素の別の請求項構成要素に対するいかなる優先度、優位性、若しくは順序、または方法の動作が実行される時間的順序もそれ自体が暗示するものではなく、単に、ある特定の名前を有する1つの請求項構成要素を、(順序を示す用語を用いることを除いて)同じ名前を有する別の要素と区別し、請求項構成要素間を区別するためのラベルとしてのみ用いられる。

10

【図1】



【図2A】



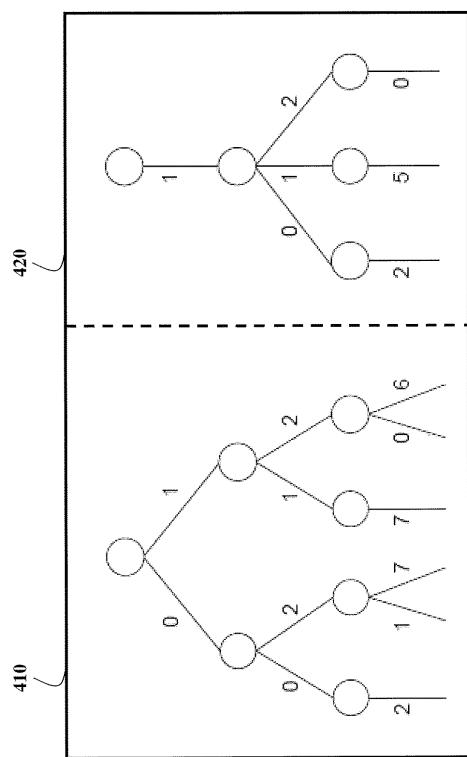
【 図 2 B 】

【図3A】

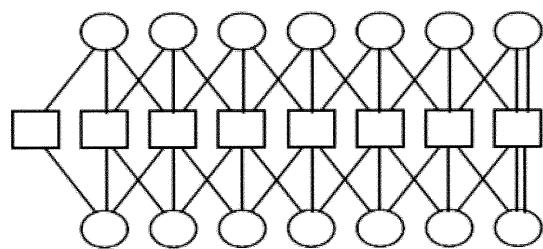
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|cc}
 311 & & & 313 & \\
 & 310 & & & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{array} &
 \xrightarrow{\quad \downarrow \quad} &
 \begin{array}{ccc|cc}
 & & & 312 & \\
 & & & 314 & \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

【図3B】

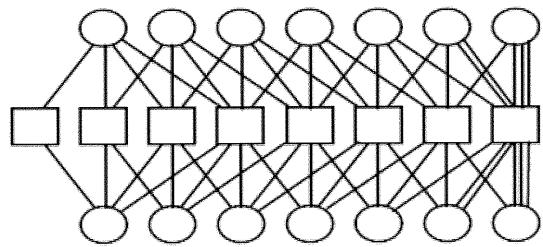
【 四 4 】



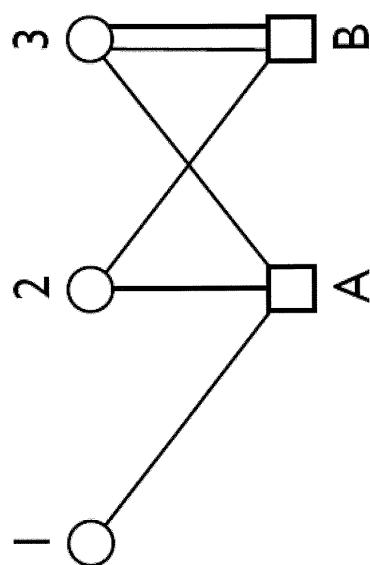
【図5A】



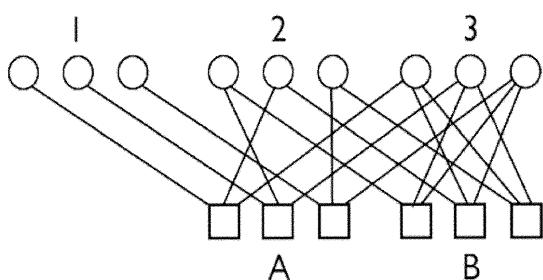
【図5B】



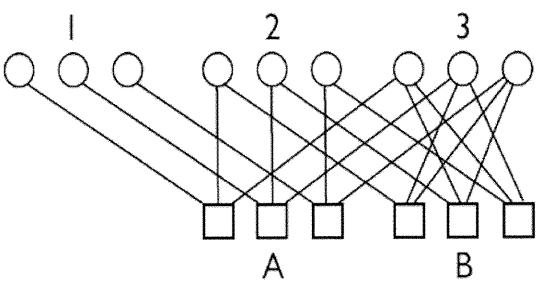
【図6】



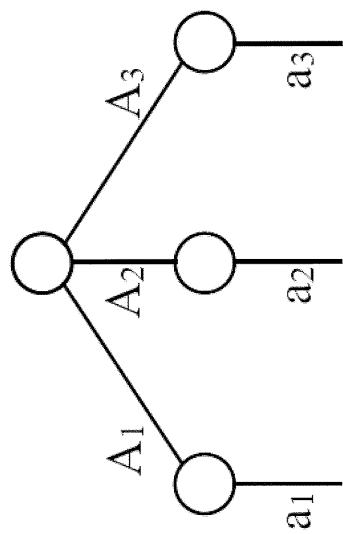
【図7A】



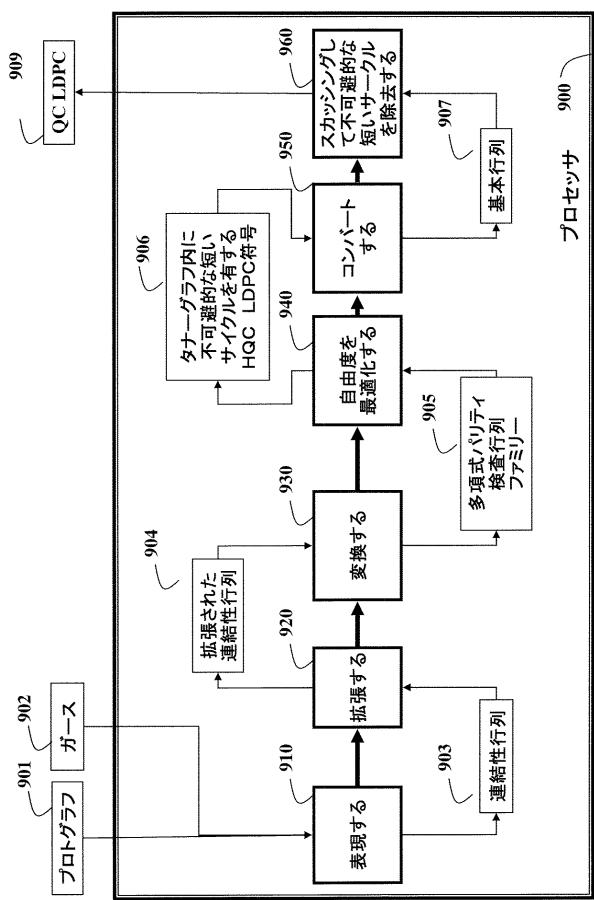
【図7B】



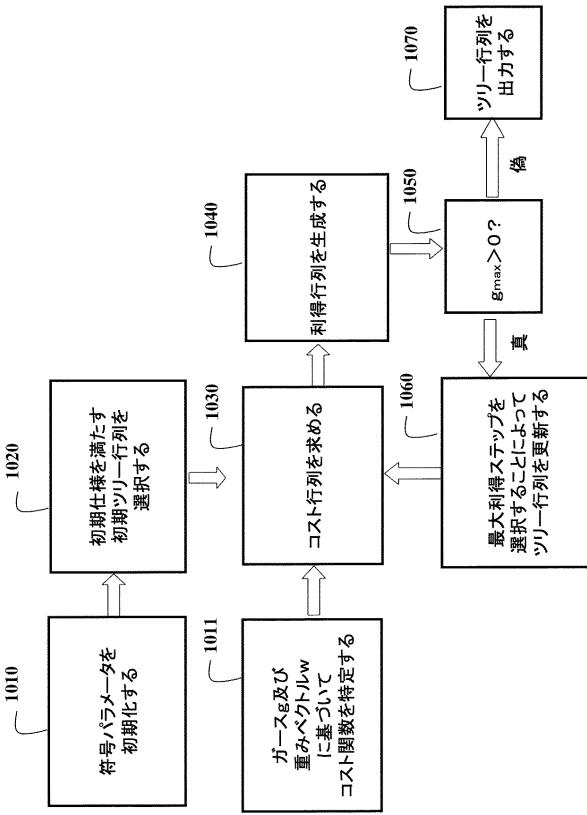
【図8】



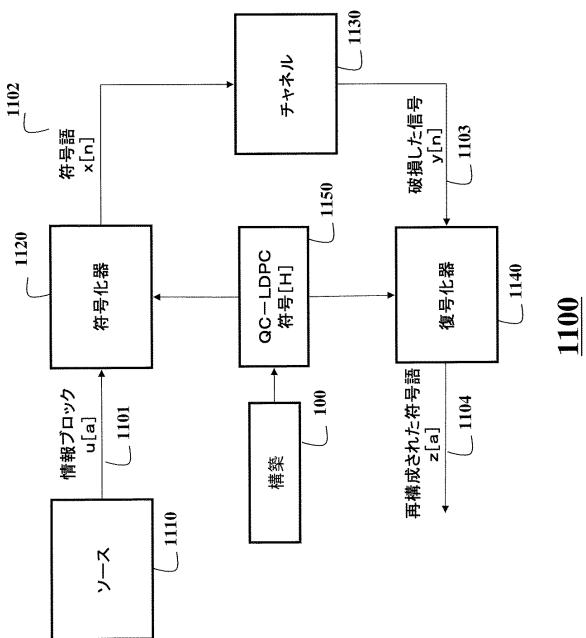
【図 9】



【図 10】



【図 11】



フロントページの続き

(74)代理人 100161115

弁理士 飯野 智史

(72)発明者 ジョナサン・イエディディア

アメリカ合衆国、マサチューセッツ州、ケンブリッジ、ハーバード・ストリート 310

(72)発明者 スターク・ドレーパー

アメリカ合衆国、ウィスコンシン州、マディソン、イートン・リッジ 2330

(72)発明者 イーゲ・ワン

アメリカ合衆国、マサチューセッツ州、シュルーズベリー、コモンズ・ドライブ 70、アパートメント 50

審査官 岡 裕之

(56)参考文献 特開2010-057177(JP, A)

特表2009-522961(JP, A)

国際公開第2010/035501(WO, A1)

米国特許出願公開第2011/0191653(US, A1)

Yige Wang et al., Construction of high-girth QC-LDPC codes, Turbo Codes and Related Topics, 2008 5th International Symposium on, 2008年 9月 5日, pp.180-185

(58)調査した分野(Int.Cl., DB名)

H03M 13/00

CiNii

IEEE Xplore