

(12) **Österreichische Patentanmeldung**

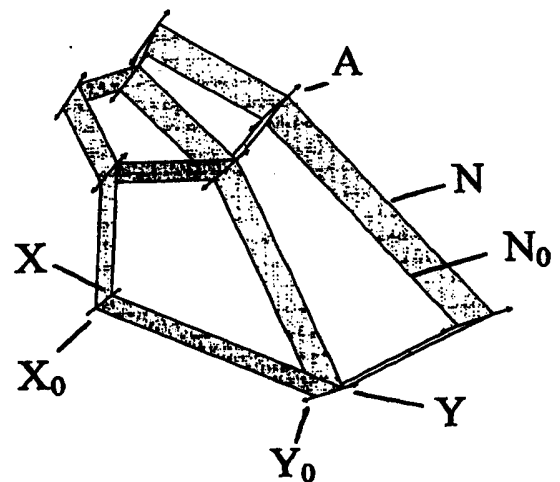
(21) Anmeldenummer: **A 1049/2006** (51) Int. Cl.⁸: **E04B 1/348** (2006.01),
(22) Anmeldetag: **21.06.2006** **E04B 1/19** (2006.01),
(43) Veröffentlicht am: **15.07.2007** **E04B 7/10** (2006.01)

(73) Patentanmelder:

BRELL-COKCAN SIGRID MAG.
A-1190 WIEN (AT)
POTTMANN HELMUT DR.
A-1230 WIEN (AT)

(54) **TRAGSTRUKTUR FÜR FREIFORMFLÄCHEN IN BAUWERKEN**

(57) Tragstruktur (8) für gekrümmte Hüllgeometrien in Bauwerken bestehend aus Trägerelementen (4), die jeweils zu die Hüllgeometrie aufspannende N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils ein planares Flächenelement (5) umgrenzen, zusammengesetzt sind, und die Trägerelemente (4) aneinander grenzender N-Ecke jeweils einen gemeinsamen Knotenbereich (3) bilden, in dem die Trägerelemente (4) zusammenstoßen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Ebene eines Flächenelements (5) und die jeweiligen Ebenen der Flächenelemente (5) zweier in nichtparallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen. Erfindungsgemäß ist vorgesehen, dass die Trägerelemente (4) in diesem Abschnitt jeweils 4- oder 6-Ecke bilden, und die Trägerelemente (4) jeweils eine Längsachse (L) aufweisen, die sich geradlinig zwischen jeweils zwei Knotenbereichen (3) erstreckt und parallel zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen verläuft, wobei der Querschnitt der Trägerelemente (4) normal zu deren Längsachse entlang der gesamten Längsachse des Trägerelements (4) jeweils einen relativen Drillwinkel von 0° aufweist.

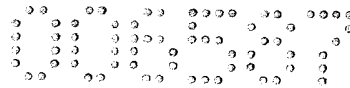




Zusammenfassung:

Tragstruktur (8) für gekrümmte Hüllgeometrien in Bauwerken bestehend aus Trägerelementen (4), die jeweils zu die Hüllgeometrie aufspannende N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils ein planares Flächenelement (5) umgrenzen, zusammengesetzt sind, und die Trägerelemente (4) aneinandergrenzender N-Ecke jeweils einen gemeinsamen Knotenbereich (3) bilden, in dem die Trägerelemente (4) zusammenstoßen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Ebene eines Flächenelements (5) und die jeweiligen Ebenen der Flächenelemente (5) zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen. Erfindungsgemäß ist vorgesehen, dass die Trägerelemente (4) in diesem Abschnitt jeweils 4- oder 6-Ecke bilden, und die Trägerelemente (4) jeweils eine Längsachse (L) aufweisen, die sich geradlinig zwischen jeweils zwei Knotenbereichen (3) erstreckt und parallel zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen verläuft, wobei der Querschnitt der Trägerelemente (4) normal zu deren Längsachse entlang der gesamten Längsachse des Trägerelements (4) jeweils einen relativen Drillwinkel von 0° aufweist.

Fig. 11



Die Erfindung betrifft eine Tragstruktur für gekrümmte Hüllgeometrien von Bauwerken bestehend aus Trägerelementen, die jeweils zu die Hüllgeometrie aufspannende N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils ein planares Flächenelement umgrenzen, zusammengesetzt sind, und die Trägerelemente aneinandergrenzender N-Ecke jeweils einen gemeinsamen Knotenbereich bilden, in dem die Trägerelemente zusammenstoßen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Ebene eines Flächenelements und die jeweiligen Ebenen der Flächenelemente zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen, gemäß dem Oberbegriff von Anspruch 1.

Die Erfindung bezieht sich des Weiteren auf ein Verfahren zur Festlegung einer Tragstruktur für gekrümmte Hüllgeometrien in Bauwerken bestehend aus Trägerelementen, bei dem eine vorgegebene, gekrümmte Hüllgeometrie durch ein lückenloses Netz von N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils ein planares Flächenelement definieren, approximiert wird, wobei jeweils aneinandergrenzende N-Ecke einen gemeinsamen Knotenpunkt aufweisen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Ebene eines Flächenelements und die jeweiligen Ebenen der Flächenelemente zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen, gemäß dem Oberbegriff von Anspruch 6.

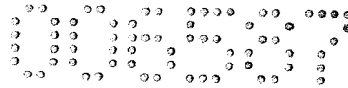
Gekrümmte Hüllgeometrien dieser Art werden im Bauwesen zur Verwirklichung von Freiformflächen verwendet, bei denen die Krümmung in zwei unterschiedlichen Raumrichtungen unterschiedlich ist, etwa bei Kuppelbauten, oder auch komplexeren Flächenformen. Freiformflächen dieser Art werden auch als nicht-abwickelbare Flächen bezeichnet, und im Zuge der architektonischen Planung zunächst im Computermodell als stetige Flächen entworfen. In der baulichen Umsetzung sind die stetigen Freiformflächen durch eine Vielzahl einzelner Flächenelemente zu approximieren, die in einer Tragstruktur gehalten sind. So ist es etwa möglich, auch komplexe Freiformflächen mit z.B. mehrschichtigen ebenen Glaselementen zu verwirklichen, die oberhalb, zwischen oder unterhalb einer Tragstruktur aus z.B.



Stahl befestigt sind. Die Tragstruktur wird dabei aus einzelnen Trägerelementen gebildet, die jeweils zu N-Ecken, also etwa Dreiecke, Vierecke, Sechsecke usw., zusammengesetzt sind. Die N-Ecke spannen die Stützstruktur auf, wobei die Trägerelemente in Knotenbereichen zusammenstoßen, wo sie miteinander befestigt sind.

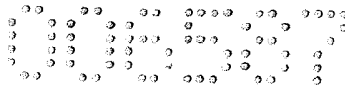
Eine Möglichkeit der Approximation von Freiformflächen durch einzelne Flächenelemente besteht dabei darin, die Freiformfläche durch gekrümmte Flächenelemente anzunähern, die aber aus Kostengründen jeweils von ebenen Trägerelementen gehalten sind. Ein Beispiel hierfür ist etwa die blasenförmige Konstruktion des „Kunsthhauses Graz“, wo für die Flächenelemente plastisch verformbares Material, und zwar „Plexiglas“, verwendet wurde, dem durch thermische Verformung die für die einzelnen Flächenelemente benötigte Krümmung verliehen wurde. Die Tragstruktur wurde in bautechnischer Hinsicht durch Trägerelemente aus Formrohre verwirklicht, wobei die jeweils benötigten Raumkurven der Trägerelemente über eine Verdrehung im Knotenbereich aneinander anschließender Formrohre erzeugt wurden.

Eine solche Vorgangsweise weist aber einige Nachteile auf. So unterliegt etwa die Materialwahl für die Flächenelemente aufgrund der notwendigen Verformbarkeit Einschränkungen. Konkret entstand z.B. beim genannten Beispiel des „Kunsthhauses Graz“ die Notwendigkeit, aufgrund der thermischen Verformung des gereckten Plexiglases eine zusätzliche, brandbeständige Schicht zu schaffen, um die schlechten Brandeigenschaften des Plexiglases zu neutralisieren. Weiters hat sich nach der Realisierung gezeigt, dass das thermische Verhalten durch den sehr hohen Wärmeausdehnungskoeffizient (ca. das 6-fache von jenem von Stahl) des gereckten Plexiglases unter Sonneneinstrahlung zum „Durchhängen“ der Plexiglasplatten führt, und daher eigene Stützungen vorgesehen werden mussten, um den Formerhalt zu gewährleisten. Auch über unregelmäßige Spiegelungen in der Plexiglashaut kann man permanente Formänderungen in Form von Beulen und Dellen wahrnehmen.



Ein weiterer, prinzipieller Nachteil einer Verwirklichung von Freiformflächen mittels einzelner, gekrümmter Flächenelemente ergibt sich auch in allen Fällen, wo ein mehrschichtiger Aufbau der Gebäudehülle gefordert ist, um etwa notwendige Gebäudeinfrastruktur wie Rohrleitungen und dergleichen unterzubringen. Der Nutzer nimmt nur die optisch sichtbaren Schichten wahr, also die innere und äußere Gebäudehülle, für die Funktionalität des Gebäudes sind aber eine Vielzahl von bauphysikalischen Schichten zwischen den optisch sichtbaren Schichten unter Beibehaltung der Form der äußeren Gebäudehülle vorzusehen. Für diese Infrastruktur sind ebene Zwischenschichten notwendig, die mühsam zwischen den optisch sichtbaren, gekrümmten Freiformflächen eingebracht werden müssen. Dieses Konzept wird etwa auch in den Gebäuden von Frank O'Gehry verfolgt, wodurch seine komplexen Bauformen erst wirtschaftlich baubar wurden.

Ein weiterer, prinzipieller Nachteil ergibt sich in der Praxis auch aus den beachtlichen Datenmengen, die im Zuge der Planung zu bearbeiten und etwa zwischen Architekt und Fachplanern auszutauschen sind. Zur Beschreibung einer Freiformfläche muss die räumliche Position und die Formgebung von Träger- und Flächenelementen in einem räumlichen Koordinatensystem wiedergegeben werden, wobei aufgrund der mitunter unterschiedlichen Form eines jeden einzelnen Träger- und Flächenelements kaum Möglichkeiten der Datenreduktion bestehen. In der Praxis sind somit „Punktwolken“, also einzelne Datenpunkte in großer Anzahl, zu verarbeiten, was insbesondere bei der Verwendung unterschiedlicher CAD- oder FEM-Softwarepakete, etwa bei der Datenübergabe zwischen einzelnen Fachplanern wie z.B. vom Architekt zum Tragwerksplaner, Probleme verursacht. Wird eine Freiformfläche stattdessen mithilfe planarer Flächenelemente verwirklicht, können für die einzelnen Flächenelemente lokale Koordinatensysteme definiert werden, in denen etwa die Randpunkte des Flächenelements bereits durch zwei Koordinaten, etwa einer x- und y-Koordinate, eindeutig definierbar sind, und sich durch die Flächennormale auf das



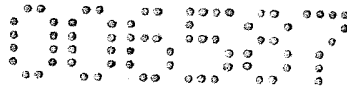
Flächenelement zwanglos eine z-Koordinate festlegen lässt. Diese lokalen Koordinatensysteme sind zum globalen Koordinatensystem der Gesamtstruktur eindeutig definiert. Dies ermöglicht einen einfachen Datenaustausch etwa mithilfe einer Ausgabedatei, die die Position der Normalen der Stützstruktur im Knotenbereich und die zugeordneten lokalen Koordinaten der ebenen Flächenelemente wiedergibt.

Ein weiterer Vorteil der Verwendung planarer Flächenelemente besteht in der uneingeschränkten Materialwahl für die Flächen- und stabförmigen Elemente, da keine speziellen elastischen Eigenschaften oder plastische Verformbarkeit gefordert sind. Zudem ist der Zuschnitt planarer Flächenelemente einfacher zu bewerkstelligen als im Falle gekrümmter Flächenelemente. Das senkt erheblich die gesamten Baukosten für Bauformen mit Freiformflächen.

Die Umsetzung einer vom Architekten geforderten Freiformfläche in eine baulich ausführbare Bauform mithilfe von planaren Flächenelementen, die die Freiformfläche möglichst gut approximieren, ist allerdings mit Schwierigkeiten verbunden. Die Aufgabe besteht dabei darin, eine technisch und wirtschaftlich realistische Verteilung von Trägerelementen zu finden, die nach dem Einsetzen der ebenen Flächenelemente die vorgegebene Freiformfläche lückenlos und mit dem Anschein eines ästhetisch stetigen Verlaufs wiedergibt.

Gemäß dem Stand der Technik wählt man hierzu zumeist eine Tragstruktur, bei der die Trägerelemente in Form von Dreiecken angeordnet sind, da die Modellierung von Freiformflächen mithilfe eines lückenlosen Netzes von Dreiecken, in denen jeweils planare Flächenelemente gehalten sind, mathematisch gut lösbar und bautechnisch vergleichsweise einfach zu verwirklichen ist.

Die Verwendung von Dreiecken als elementare Grundstruktur der Tragstruktur hat aber auch Nachteile. Insbesondere gelingt es nicht, mithilfe von Dreiecken eine Verteilung der Trägerelemente



zu finden, bei der die Trägerelemente im Zuge der Montage zwischen zwei Knotenbereichen keiner Torsion im geometrischen Sinne, also einer Verdrehung der Längsachse etwa im Knotenbereich, unterworfen werden müssen. Nur Trägerelemente mit kreisförmigem Querschnitt können „torsionsfrei“, im geometrischen Sinn, aneinandergereiht werden. Bei der Verwendung von nicht kreisförmigen Querschnitten entsteht bisher in der Tragstruktur eine Torsion (im geometrischen Sinne) im Knotenbereich. Dies führt zu ästhetisch und statisch unbefriedigenden Knotenbereichen. Vielmehr ergibt sich daraus auch das Problem, dass Mehrschichtstrukturen nicht oder nur mit erheblichem, zusätzlichem Aufwand zu verwirklichen sind. Es muss daher für jede Schicht ein eigenes Tragsystem vorgesehen werden, was die Materialkosten und den Montageaufwand wiederum um ein Vielfaches erhöht.

Es ist daher das Ziel der Erfindung, eine bauliche Umsetzung von Freiformflächen zu finden, die die technischen und ökonomischen Anforderungen verringert und ästhetische Ansprüche befriedigt. Insbesondere sollen Montageaufwand und -kosten möglichst gering gehalten werden. Ein weiteres Ziel der Erfindung ist es, dass die Tragstruktur zur Approximation von Freiformflächen auch die Möglichkeit eines problemlosen Mehrschichtaufbaus bietet, also die parallel versetzte Montage mehrerer, ebener Flächenelemente. Diese Ziele werden durch die Maßnahmen von Anspruch 1 erreicht.

Anspruch 1 bezieht sich dabei zunächst auf eine Tragstruktur für gekrümmte Hüllgeometrien eines Bauwerks bestehend aus Trägerelementen, die jeweils zu die Hüllgeometrie aufspannende N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils ein planares Flächenelement umgrenzen, zusammengesetzt sind, und die Trägerelemente aneinandergrenzender N-Ecke jeweils einen gemeinsamen Knotenbereich bilden, in dem die Trägerelemente zusammenstoßen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Ebene eines Flächenelements und die jeweiligen Ebenen der Flächenelemente zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen. Die Eigenschaft, dass die Ebene eines Flächenelements und die



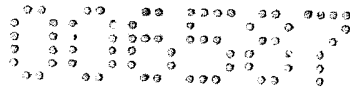
jeweiligen Ebenen der Flächenelemente zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen, gibt dabei die Tatsache wieder, dass die Tragstruktur zur Verwirklichung von Freiformflächen vorgesehen ist, bei denen die Krümmung der zu approximierenden Freiformfläche in zwei unterschiedlichen Raumrichtungen unterschiedlich ist. Erfindungsgemäß ist dabei vorgesehen, dass die Trägerelemente in diesem Abschnitt jeweils 4- oder 6-Ecke bilden, und die Trägerelemente jeweils eine Längsachse aufweisen, die sich geradlinig zwischen jeweils zwei Knotenbereichen erstreckt und parallel zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen verläuft, wobei der Querschnitt der Trägerelemente normal zu deren Längsachse entlang der gesamten Längsachse des Trägerelements jeweils den relativen Drillwinkel von 0° aufweist. Die „zugeordneten Flächenelementebenen“ eines Trägerelements sind dabei die Ebenen jener Flächenelemente, die vom jeweiligen Trägerelement getragen werden.

Die Wahl von Vier- oder Sechsecken als elementare Grundform der Tragstruktur im Gegensatz zu der im Stand der Technik bekannten Dreiecksnetzstruktur ist von entscheidender Bedeutung, da die Anmelder erkannt haben, dass eine Vier- oder Sechseck-Netzstruktur zur Approximation von Freiformflächen über bemerkenswerte mathematische Eigenschaften verfügt, die für eine bauliche Umsetzung von Freiformflächen von großem Vorteil sind. Insbesondere kann für Vier- oder Sechseck-Netzstrukturen eine Form der geometrischen Approximation von Freiformflächen gefunden werden, die eine Parallelverschiebbarkeit der Flächenelemente gewährleistet, wobei die jeweils parallel verschobenen Flächenelemente Begrenzungslinien aufweisen, die zu den entsprechenden ursprünglichen Begrenzungslinien parallel sind, und wiederum eine lückenlose Gesamtfläche ergeben, wie im Folgenden noch gezeigt werden wird. Die praktischen Konsequenzen einer Parallelverschiebbarkeit („Offset“) und deren Bedeutung für die Bautechnik wurden im Stand der Technik noch nicht erkannt.



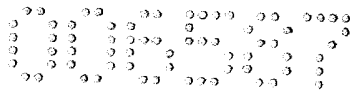
Außerdem können die Baukosten mithilfe einer Vier- oder Sechseck-Netzstruktur im Vergleich zu Dreiecksnetzstrukturen verringert werden, da der Zuschnitt von dreieckigen Flächenelementen höheren Aufwand verursacht, als jener für z.B. viereckige Flächenelemente. Des Weiteren erfordert eine Tragstruktur aus vierecks- oder sechsecksförmigen Grundformen niedrigeren Materialbedarf, da die Anmelder zeigen konnten, dass etwa bei äquivalenten Approximationen von Freiformflächen mithilfe von Dreiecks- und Vierecksnetzstrukturen die Verwirklichung mithilfe von Vierecksnetzstrukturen eine geringere Anzahl von Trägerelementen benötigt, als jene mit dreiecksförmigen Grundformen.

Durch die aufgrund der Wahl von Vier- oder Sechsecken als Grundform der Tragstruktur ermöglichte Parallelverschiebbarkeit besteht die Möglichkeit, ein weiteres erfindungsgemäßes Merkmal hinsichtlich der Trägerelemente vorzusehen, nämlich Trägerelemente, die zwischen den Knotenbereichen geradlinig und ohne Torsion (im geometrischen Sinn) verlaufen. Das wird durch das Merkmal zum Ausdruck gebracht, dass die Trägerelemente jeweils eine Längsachse aufweisen, die sich geradlinig zwischen jeweils zwei Knotenbereichen erstreckt und parallel zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen verläuft, und der Querschnitt der Trägerelemente normal zu deren Längsachse entlang der gesamten Längsachse des Trägerelements jeweils einen relativen Drillwinkel von 0° aufweist. Bei einem Trägerelement, das im geometrischen Sinn einer Torsion unterworfen ist, weist im Gegensatz dazu der Querschnitt entlang der Längsachse eine Verdrehung auf, die somit einen Drillwinkel ungleich 0° besitzt. Durch dieses erfindungsgemäße Merkmal können die Trägerelemente quer zur Ebene der Flächenelemente höher ausgeführt werden, sodass ein Mehrschichtaufbau an ein und derselben Tragstruktur ermöglicht wird. Die Trägerelemente können dabei ausreichend hoch ausgeführt werden, um Raum für Gebäudeinfrastruktur zwischen den begrenzenden Außenschichten zu schaffen. Durch die höher ausführbaren Trägerelemente und die Verwendung von vier- oder sechseckigen Flächenelementen wird außerdem der Einbau von haustechnischen Einrichtungen und einem



bauphysikalischen Mehrschichtaufbau erleichtert. Des Weiteren erleichtert die Verwendung geradliniger Trägerelemente ohne Torsion (im geometrischen Sinn) und Biegung die Montage, was die Montagekosten verringert.

Eine Möglichkeit zur Sicherstellung der Parallelverschiebbarkeit planarer Flächenelemente in einer Freiformfläche approximierenden Tragstruktur besteht gemäß Anspruch 2 darin, dass die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel im Schnittpunkt der gedachten Schnittlinien von vier in einem Knotenbereich aneinandergrenzender Flächenelementebenen gleich ist. Dabei ist zu bemerken, dass das Resultat einer geometrischen Approximation einer vom Architekten vorgegebenen Freiformfläche zunächst eine Netz aus Linien ist, wobei die Vierecke durch einen viereckigen Polygonzug dargestellt werden, die im Folgenden auch als „Masche“ bezeichnet wird, und jeweils zwei aneinandergrenzende Polygonzüge eine gemeinsame Begrenzungslinie aufweisen, und jeweils vier aneinandergrenzende Polygonzüge einen gemeinsamen Knotenpunkt aufweisen, in dem sich die jeweils gemeinsamen Begrenzungslinien schneiden, wie noch näher beschrieben werden wird. In der baulichen Umsetzung sind freilich entlang der gemeinsamen Begrenzungslinien die Trägerelemente anzusetzen, sodass die in den Trägerelementen gehaltenen Flächenelemente in der Regel nicht mehr physisch zusammenstoßen, um eine gemeinsame Begrenzungslinie zu teilen, sondern voneinander beabstandet sind. Dennoch kann eine gedachte Schnittlinie gebildet werden, die durch die gedachte Erweiterung der jeweiligen Flächenelementebenen definiert wird. Diese gedachte Schnittlinie entspricht der oben genannten, gemeinsamen Begrenzungslinie der Polygonzüge der geometrischen Approximation. Der Schnittpunkt der gedachten Schnittlinien von vier in einem Knotenbereich aneinandergrenzenden Flächenelementebenen entspricht dabei dem oben genannten Knoten von vier Polygonzügen. In den Knotenpunkten ergeben sich zwischen den vier aneinandergrenzenden Polygonzügen vier Winkel, wobei gemäß Anspruch 2 die Tragstruktur so auszuführen ist, dass die Summe von jeweils zwei gegenüberliegenden Winkeln gleich ist. Das ist eine hinreichende Bedingung für die



Parallelverschiebbarkeit der in der Tragstruktur gehaltenen Flächenelemente, und die Trägerelemente können ohne Torsion (im geometrischen Sinn) angeordnet werden, wie noch näher ausgeführt werden wird. In diesem Fall wird das einer solchen Tragstruktur zu Grunde liegende Polygonnetz auch als „konisches Netz“ bezeichnet, wie ebenfalls noch näher erläutert werden wird.

Eine weitere Möglichkeit zur Sicherstellung der Parallelverschiebbarkeit planarer Flächenelemente in einer Freiformfläche approximierenden Tragstruktur besteht gemäß Anspruch 3 darin, dass die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel zwischen den Flächennormalen zweier aneinandergrenzender Flächenelementebenen von vier in einem Knotenbereich aneinandergrenzender Flächenelementebenen gleich ist. In diesem Fall wird das einer solchen Tragstruktur zu Grunde liegende Polygonnetz auch als „dual-isothermes Netz“ bezeichnet, wie ebenfalls noch näher erläutert werden wird.

Gemäß Anspruch 4 ist vorgesehen, dass die Trägerelemente eine rechteckige Querschnittsform aufweisen, oder in eine rechteckige Querschnittsform einschreibbar sind. Die Längsachse dieser Trägerelemente verläuft dabei zwischen jeweils zwei Knotenbereichen, und die Querachse steht entlang der gesamten Längserstreckung des Trägerelements sowohl normal auf die Längsachse, als auch normal auf die gedachte Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen. Die Längsachse muss dabei nicht unbedingt eine Symmetrieachse des Trägerelements sein, entscheidend ist stattdessen, dass entlang des Trägerelements geradlinig zwischen zwei Knotenbereichen und parallel zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen verläuft. Rechtecksquerschnitte haben auch einen ästhetischen Vorteil, da sie schlanker erscheinen als etwa kreisförmige Querschnitte, und auch schlanker ausgeführt werden können, da für die Biegebeanspruchung aufgrund der entlang der Querachse wirkenden Belastung durch die Flächenelemente nur die Trägerhöhe normal zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen ausschlaggebend ist. Des Weiteren können aber je nach technischer Anforderung auch andere Formen der



Trägerelemente vorteilhaft sein, etwa Trägerelemente mit einer I-förmige Querschnittsform.

Gemäß Anspruch 5 ist vorgesehen, dass an den Trägerelementen zumindest zwei Flächenelemente gehalten sind. Hierbei wird der Vorteil der erfindungsgemäßen Merkmale ausgenutzt, dass ein Mehrschichtaufbau durch parallel zueinander versetzte Flächenelemente an ein und derselben Tragstruktur leicht möglich ist. Zwischen den gemäß Anspruch 5 vorgesehenen, zumindest zwei Flächenelementebenen wird Raum für Einrichtungen zusätzlicher Gebäudeinfrastruktur geschaffen, wie etwa Rohrleitungen oder bauphysikalische Schichten. Des Weiteren kann der Zwischenschichtbereich Aufgaben für die klimatechnischen Eigenschaften der Bauform erfüllen, wie etwa eine Zirkulation von Luftmassen zur Hinterlüftung und thermischen Isolierung.

Anspruch 6 bezieht sich auf ein Verfahren zur Festlegung einer Tragstruktur für gekrümmte Hüllgeometrien in Bauwerken bestehend aus Trägerelementen, bei dem eine vorgegebene, gekrümmte Hüllgeometrie durch ein lückenloses Netz von N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils eine planare Masche definieren, approximiert wird, wobei jeweils aneinandergrenzende N-Ecke einen gemeinsamen Knotenpunkt aufweisen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Maschenebene eines N-Ecks und die jeweiligen Maschenebenen zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecke in unterschiedlichen Ebenen liegen. Erfindungsgemäß ist vorgesehen, dass die Approximation der vorgegebenen, gekrümmten Bauform mithilfe eines ersten, lückenlosen Netzes von 4- oder 6-Ecken erfolgt, die durch Parallelverschiebung in einer Richtung normal zur Maschenebene des jeweiligen 4- oder 6-Ecks in ein weiteres, lückenloses Netz von 4- oder 6-Ecken überführbar sind, wobei jeweils zwei aneinandergrenzende N-Ecke eine gemeinsame Begrenzungslinie aufweisen, die den Verlauf der Längsachse eines diesen N-Ecken zugeordneten Trägerelements festlegt, und die Abmessung eines Trägerelements senkrecht zu dieser Begrenzungslinie durch den Abstand der entsprechenden Begrenzungslinie des ersten Netzes zu jener des weiteren, parallel verschobenen Netzes festgelegt

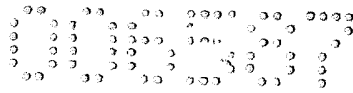


wird. Eine Parallelverschiebung eines Netzes von z.B. 4-Ecken bedeutet dabei, dass jede Masche eines 4-Ecks des ersten Netzes in einer Richtung normal zur Maschenebene des jeweiligen 4-Ecks parallel verschoben wird. Erfindungsgemäß muss das auf diese Art parallel verschobene Netz von 4-Ecken wieder ein lückenloses Netz von 4-Ecken mit jeweils planaren Maschenebenen ergeben. Das hat den Vorteil, dass der Abstand einer Begrenzungslinie zweier aneinandergrenzender 4-Ecke des ersten Netzes zu der durch Parallelverschiebung aus ihr hervorgegangene Begrenzungslinie des weiteren, parallel verschobenen Netzes zur Festlegung der Abmessung eines Trägerelements senkrecht zu dieser Begrenzungslinie herangezogen werden kann. Da der Verlauf der Längsachse dieses Trägerelements erfindungsgemäß ebenfalls durch diese Begrenzungslinie festgelegt wird, also parallel zu ihr verläuft, ergeben sich somit durch die erfindungsgemäße Festlegung des Tragrahmens gerade Trägerelemente ohne Torsion (im geometrischen Sinn).

Anspruch 7 bezieht sich wiederum auf die Festlegung einer Tragstruktur mithilfe eines ihm zu Grunde liegenden, konischen Netzes, indem die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel zwischen den Begrenzungslinien von vier aneinandergrenzenden 4-Ecken in deren gemeinsamen Knotenpunkt gleich ist.

Anspruch 8 bezieht sich auf die weitere Möglichkeit der Festlegung eines Tragrahmens mithilfe eines ihm zu Grunde liegenden, dual-isothermen Netzes, indem die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel zwischen den Flächennormalen zweier aneinandergrenzender Maschenebenen von vier in einem Knoten aneinandergrenzender Flächenelementebenen gleich ist.

Anspruch 9 zielt wiederum auf einen Mehrschichtaufbau der gekrümmten Bauform ab, indem in einem Abschnitt der Tragstruktur zumindest ein zweites, lückenloses Netz von 4-Ecken, die jeweils eine planare Maschenebene definieren, festgelegt wird, wobei die 4-Ecke des zweiten Netzes durch Parallelverschiebung der 4-Ecke des ersten Netzes in einer Richtung normal zur Maschenebene des jeweiligen 4-Ecks gebildet werden.



Bevorzugte Ausführungsformen der Erfindung werden im Folgenden anhand der beiliegenden Zeichnungen näher erläutert. Es zeigen hierbei die

Fig. 1 eine Darstellung zweier paralleler Vierecksnetze mit jeweils planaren Maschenebenen,

Fig. 2 eine Darstellung eines Abschnittes einer erfindungsgemäßen Tragstruktur in der architektonischen Anwendung,

Fig. 3 die Konstruktion eines parallel verschobenen Netzes N_0 aus einem Basisnetz N und dem Parallelnetz $p(N)$ in zweidimensionaler Ansicht,

Fig. 4 die Konstruktion eines parallel verschobenen Netzes N_0 aus einem Basisnetz N und dem Parallelnetz $p(N)$ in dreidimensionaler Ansicht,

Fig. 5a eine Darstellung eines konischen Knotens,

Fig. 5b eine Darstellung von zwei benachbarten konischen Knoten,

Fig. 6a eine Darstellung einer Schramm'schen Kreispackung auf der Kugel und das isotherme Netz $p(N)$,

Fig. 6b eine Darstellung eines dual-isothermen Knotens,

Fig. 6c eine Darstellung zur geforderten Winkelbeziehung in dual-isothermen Netzen,

Fig. 7 ein Vierecksnetz (im Hintergrund) und ein verfeinertes Vierecksnetz mit jeweils planaren Maschenebenen (im Vordergrund),

Fig. 8 ein Beispiel einer architektonischen Anwendung des Vierecksnetzes gemäß Fig. 7,

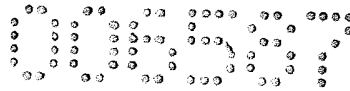


Fig. 9-12 ein Ausführungsbeispiel zur Festlegung von Trägerelementen anhand eines gemäß dem erfindungsgemäßen Verfahren generierten Vierecksnetzes,

Fig. 13 eine schematische, zweidimensionale Darstellung der rechteckigen Querschnittsform des Bauraums im Knotenbereich,

Fig. 14 eine schematische, dreidimensionale Darstellung der rechteckigen Querschnittsform des Bauraums im Knotenbereich,

Fig. 15 a-d mögliche architektonische Anwendungen einer Tragstruktur,

Fig. 16 eine schematische Darstellung zur Erläuterung der Konstruktion der Trägerelemente,

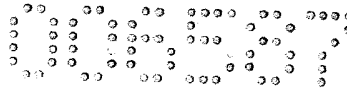
Fig. 17 Trägerelemente, die in einem Knotenbereich eines dual-isothermen Netzes zusammenlaufen,

Fig. 18 eine Darstellung eines Mehrschichtaufbaus am Beispiel eines dual-isothermen Netzes,

Fig. 19a-b eine Darstellung der geometrischen Stützstruktur eines hexagonalen Netzes mit Stütztrapezen konstanter Höhe, und die

Fig. 20a-c in der Fig. 20b ein Offset-Paar N , N_0 mit konstantem Eckenabstand und konstantem Flächenabstand, das aus der Stützstruktur von Fig. 20a gewonnen wurde, und aus dem das dazugehörige, ebene Flächentragsystem in Diagrammform in der Fig. 20c gezeigt ist.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie mithilfe des erfindungsgemäßen Verfahrens eine erfindungsgemäße Tragstruktur 8 von der beginnenden Planung einer Freiformfläche bis zur realisierten Bauform umgesetzt werden kann. Ausgangspunkt ist dabei ein computergeneriertes Modell einer Freiformfläche, wobei



der Architekt auf ästhetische und wohlproportionierte Formgebungen zu achten hat. Die architektonische Planung der Freiformfläche wird dabei auch deren Aufbau aus einzelnen Flächenelementen 5 und die Gestaltung der Tragstruktur 8 mit einbeziehen. Für den Architekten wird sich dabei die Frage der Gestaltung der einzelnen Flächenelemente 5 in Art, Größe und Form in erster Linie im Zusammenhang mit dem visuellen Eindruck der Gesamtstruktur stellen, wobei freilich auf die technische und wirtschaftliche Umsetzbarkeit zu achten ist. Die Freiformfläche ist dabei aus einzelnen Flächenelementen 5 aufzubauen, die die Freiformfläche lückenlos zusammensetzen.

Im Computermode'll ist daher zunächst die Aufgabe zu lösen, eine vorgegebene, stetige Freiformfläche so in N-Ecke zu unterteilen, dass die Freiformfläche lückenlos wiedergegeben wird. Die Begrenzungslinien 2 der N-Ecke sind dabei Polygonzüge, die einen Flächeninhalt begrenzen, die als Masche 1 bezeichnet wird. Die Maschenebene soll planar sein, und stellt die Ebene des zukünftigen Flächenelements 5, etwa einer Glasplatte, dar. Im Folgenden wird daher der Begriff „Masche“ 1 im Zusammenhang mit der geometrischen Approximation einer Freiformfläche durch ein Netz aus N-Ecken verwendet, und der Begriff „Flächenelement“ 5 im Zusammenhang mit dem physischen Abdeckelement in der baulichen Umsetzung, das in die Trägerelemente 4 eingesetzt wird und sich in der entsprechenden Maschenebene des geometrischen Modells erstreckt.

Wie hinlänglich bekannt ist, kann nur die Ebene oder eine einfach gekrümmte Fläche in eine Vielzahl gleicher Dreiecke, Vierecke und Vielecke unterteilt werden. Sobald die Fläche zur Raumbildung eine zweite Krümmung aufweist, also zur Freiformfläche wird, ist ein Maschennetz aus z.B. gleichen Dreiecken nur mehr in einigen wenigen Sonderfällen möglich. Die Art und Weise der Unterteilung etwa einer Kugel, also einer geometrisch vergleichsweise einfach zu beschreibenden Form, gehört zu den ältesten ingenieurstechnischen Aufgaben. Eine mögliche Lösung für die Kugel sind z.B. die geodäsischen Kuppeln von Buckminster Fuller, die ein Beispiel für eine



Flächenaufteilung einer Kugel mit gleichen Sechsecken sind. Ungleich schwieriger ist das Auffinden geeigneter Lösungen zur Approximation komplexerer Freiformflächen, wie sie angesichts der beliebig geformten, mehrfach gekrümmten Flächen zeitgenössischer Architektur gefordert werden.

Gegenstand der Erfindung sind hierbei Annäherungen von Freiformflächen durch Vier- oder Sechsecksnetze mit ebenen Maschen 1. Im Folgenden wird zunächst auf Vierecksnetzstrukturen eingegangen. Ein solches Vierecksnetz ist aus ebenen Vierecken lückenlos so aufgebaut, dass längs jeder inneren Kante des Netzes genau zwei Vierecke zusammenstoßen. In einer inneren Ecke des Netzes stoßen im Allgemeinen genau vier Vierecke zusammen; eine solche Ecke wird im Folgenden als Knoten X bezeichnet und heißt regulär, andernfalls nennt man den Knoten X singulär. Durch Kanten bzw. Begrenzungslinien 2 von Randpolygonen geht nur eine Vierecksmasche 1. An regulären Ecken von Randpolygonen stoßen nur eine oder zwei Maschen 1 zusammen. Wenn im Folgenden von einem „Netz“ ohne andere Spezifikation die Rede ist, ist immer ein Vierecksnetz mit ebenen Maschen 1 gemeint.

Im Folgenden soll nun erläutert werden, wie im Rahmen der Erfindung ein Vierecksnetz N als Approximation einer Fläche F , meist einer Freiformfläche, gefunden werden kann, das in der baulichen Verwirklichung über die erfindungsgemäßen Vorteile verfügt.

Dabei ist im Folgenden ein Vierecksnetz N immer als Approximation einer Fläche F , meist einer Freiformfläche, gedacht. Man kann ein Netz so verfeinern, dass die Seitenflächen immer kleiner werden, und immer näher an F rücken. Als Grenzlage ergibt sich dadurch ein Kurvennetz K auf F . Erhält man bei der Verfeinerung die Ebenheit der Maschen 1, so ergibt sich in der Grenze ein so genanntes konjugiertes Kurvennetz K auf F .

Wichtige Methoden zur Erzeugung von Vierecksnetzen mit ebenen Maschen 1 und insbesondere von solchen, welche für die Architektur vorteilhafte Eigenschaften besitzen, beruhen auf dem



Konzept paralleler (parallelbezogener) Netze. Parallele Netze M , N sind solche, bei denen die Maschen 1 des einen Netzes M unter Erhaltung aller Nachbarschaftsbeziehungen auf die Maschen 1 des anderen Netzes N so abgebildet werden können, dass die Ebenen entsprechender Maschen 1 parallel sind. Da bei dieser Transformation bzw. Parallelverschiebung Maschen 1 mit einer gemeinsamen Kante 2 wieder auf Maschen 1 mit einer gemeinsamen Kante 2 abgebildet werden, sind wegen der Parallelität entsprechender Maschenebenen auch entsprechende Kanten 2 in den Netzen M und N parallel (siehe Fig. 1). Es kann vorkommen, dass alle Maschen 1 des einen Netzes, etwa M , konvex sind, es aber im parallelen Netz N Maschen 1 mit Selbstüberschneidungen gibt.

Man kann von einem Netz M ausgehen und durch Parallelverschiebung der Seitenflächen unter Einhaltung der Eckenbedingungen neue Netze N konstruieren. Die dabei auftretenden Freiheitsgrade lassen sich für das Design nutzen. Die Fig. 1 illustriert eine Konstruktionsmethode welche zuerst den Parallelbezug von zwei Polygonen (fett) herstellt; der Rest von N (rechte Abbildung in der Fig. 1) ergibt sich zwangsläufig durch Parallelenziehen zu entsprechenden Kanten von M (linke Abbildung in der Fig. 1).

Für die Konstruktion spezieller Netze sind jene Netze N von Bedeutung, zu denen es ein paralleles Netz $p(N)$ gibt, welches eine konvexe Fläche S (z.B. eine Kugel) approximiert. Dies regularisiert das Netz N in dem Sinn, dass zu kleine Eckenwinkel in den Maschen 1 und damit zu schmale Vierecke vermieden werden. Der tiefere Grund hierfür liegt darin, dass unter Verfeinerung im oben angegebenen Sinn und unter Beibehaltung der ebenen Maschen 1 von N und $p(N)$ folgendes passiert: N hat als Grenzlage ein Kurvennetz K auf einer Fläche F , $p(N)$ hat als Grenzlage ein Kurvennetz $p(K)$ auf der Fläche S . Die Netze K und $p(K)$ sind parallel aufeinander bezogen und daher ist K das Netz der Relativkrümmungslinien von F in Bezug auf die „Relativsphäre“ S . Falls S eine Kugel ist, ist K das Netz der gewöhnlichen Krümmungslinien und daher rechtwinklig. Das Netz der Krümmungslinien beschreibt die Richtungen stärkster und



schwächster Normalkrümmung einer Fläche. Es ist geeignet, dem Betrachter eine gute Vorstellung von der Form zu vermitteln, was die Bedeutung für die Architektur erhöht. Im Folgenden wird ein Netz N mit einem parallelen Netz $p(N)$, welches eine konvexe Fläche S approximiert, auch *allgemeines Krümmungsnetz* genannt.

Erfindungsgemäß wird das Konzept der Parallelverschiebbarkeit eines Netzes N , M zur Erzeugung eines sogenannten „Offsets“ zur Festlegung einer Tragstruktur und zur Verwirklichung mehrschichtiger Aufbauten von Schalen in der Architektur benutzt. Ein Offset N_0 zu einem Vierecksnetz N soll dabei ein paralleles Vierecksnetz sein, wobei je nach Anwendung gewisse Anforderungen an die Abstände entsprechender Maschen 1, Kanten 2 oder Knoten X gestellt werden.

Die Fig. 2 zeigt einen Ausschnitt aus einer erfindungsgemäßen Tragstruktur 8. Es treten hier zwei Offsets auf, welche an einer Netzmasche 1, die in der Fig. 2 als Flächenelement 5 ersichtlich ist, erklärt sind. Einerseits gibt es zum ebenen Viereck der Basismasche 1 ein in einer parallelen Ebene verlaufendes Viereck der zweiten Schicht (z.B. Glaskonstruktion), in der auch die Verspannungen 7 verlaufen. Mithilfe der Distanzelemente 6 wird noch eine dritte Ebene in etwas größerem Abstand definiert, die durch die Verbindungslinien zwischen den Endpunkten der Distanzelemente 6 angedeutet ist. Die Figur 2 zeigt auch eine typische Konstruktion der Trägerelemente 4, in die die Glasscheiben eingelegt sind. Geometrisch liegt bei diesen Trägerelementen 4 folgende Situation vor, wobei die Trägerelemente 4 im geometrischen Modell zunächst als zweidimensionale Stützvierecke, die im Folgenden auch als Stütztrapeze bezeichnet werden, erscheinen: Entsprechende (parallele) Kanten von Basisnetz N und Offsetnetz N_0 sind durch ebene Vierecke (Stützvierecke) verbunden; die Strecke, die entsprechende Knoten X und X_0 von Basis und Offset verbindet, ist eine gemeinsame Kante $n(X)$ der vier in diesen Knoten zusammenlaufenden Stützvierecke. Die gemeinsame Kante $n(X)$ kann man sich als Gegenstück zur Flächennormalen einer glatten Fläche vorstellen. Die Menge aller Stützvierecke wird im Folgenden als

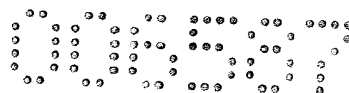


Stützstruktur bezeichnet. Bei der Konstruktion von Offsets und Stützstrukturen ist es günstig, orientierte Netze zu benutzen, bei denen man zwischen zwei Seiten (einer Außenhaut und einer Innenhaut) unterscheidet. Damit werden auch die Normalen $n(X)$ einheitlich (nach außen oder nach innen) orientiert. Die Knotenbereiche 3 der baulichen Umsetzung befinden sich an den Positionen der Knoten X des geometrischen Modells.

Es sei nun ein Vierecksnetz N mit ebenen Maschen 1 auf ein ebensolches Netz $p(N)$ parallelbezogen, wobei $p(N)$ eine konvexe Fläche S approximiert. Innerhalb von S kann ein Punkt Z gewählt werden, der die Rolle eines Mittelpunkts spielt und die Verteilung der Abstände der Offsets regelt. Die Konvexität von S ist nicht unbedingt notwendig, wohl aber, dass ein Punkt Z existiert, von dem aus alle Flächen von $p(N)$ sichtbar sind. Nun werden Offsets N_o von N bezüglich $p(N)$ folgendermaßen konstruiert: Jede Maschenebene Q des Netzes N wird im Sinne der gegebenen Orientierung in eine Neulage Q_o parallel verschoben. Der Abstand von Q zu Q_o muss dabei gleich dem Abstand von Z zu $p(Q)$ sein. Hierbei bezeichnet $p(Q)$ die Ebene jener Masche 1 des Parallelnetzes $p(N)$, welche zu Q gehört (siehe Fig. 3). In Anlehnung an die Minkowski-Summe konvexer Polyeder kann man das dadurch entstehende Offsetnetz N_o als Summe von N und $p(N)$ ansehen; wir schreiben kurz $N_o = N \oplus p(N)$. Man kann bei der Summenbildung alle Abstände mit einem einheitlichen Faktor λ multiplizieren (oder vorher eine Skalierung von $p(N)$ vornehmen). Schreibt man die Skalierung von $p(N)$ mit Faktor λ als $\lambda \cdot p(N)$, so sind die mit Z und $p(N)$ konstruierbaren Offsets die Netze $N_o = N \oplus \lambda \cdot p(N)$.

Es ist zu beachten, dass die Abstände entsprechender Knoten X und X_o von Basis und Offset durch die Abstände von Z zu den Knoten des Parallelnetzes $p(N)$ gegeben sind, und Analoges gilt für entsprechende Kanten.

Offensichtlich sind bei dieser Offset-Konstruktion noch gewisse Freiheiten bei der Verteilung der Abstände möglich. Diese liegen in der Wahl des Zentrums Z . Haben zum Beispiel alle



Maschenebenen von $p(N)$ denselben Abstand zu Z , so erhält man Offsets in konstantem Flächenabstand. Dabei darf aber das Ausgangsnetz N nicht beliebig sein, sondern muss schon auf ein passendes Netz $p(N)$ parallelbezogen sein.

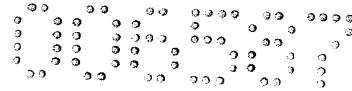
Falls entsprechende Vierecksflächen von Basis und Offset einen konstanten Abstand besitzen sollen, muss das parallele Netz $p(N)$ Vierecksflächen in konstantem Abstand zu Z haben. Deshalb muss $p(N)$ einer Kugel S mit Mitte Z berührend umschrieben sein, d.h. alle Maschenebenen von $p(N)$ müssen die Kugel S berühren. Für den Radius der Kugel S kann etwa der Wert 1 angenommen werden.

Jedes zu einem solchen Netz $p(N)$ parallele Netz N wird im Folgenden *konisches Netz* genannt. Diese Bezeichnung rührt von folgender geometrischen Kennzeichnung her: Die in einem regulären inneren Knotenpunkt X von N zusammenstoßenden vier Netzebenen berühren eine Kugel S_x vom Radius 1, die man aus der eingeschriebenen Kugel S von $p(N)$ durch geeignete Parallelverschiebung erhält. Daher berühren diese vier Ebenen durch X auch jenen Drehkegel mit Spitze X , der der Kugel S_x berührend umschrieben ist (siehe Fig. 5a und 5b). Im Folgenden wird in diesem Fall auch von einem konischen Knoten X gesprochen. Die Drehachse $n(X)$ des Kegels enthält die dem Knoten X entsprechenden Knoten X_0 der Offsets $N_0 = N \oplus d \cdot p(N)$ im Abstand d .

Konische Netze haben also die praktische Eigenschaft, Offsets in konstantem Flächenabstand zu besitzen. Da $p(N)$ eine Kugel S approximiert, sind konische Netze auch als Näherungen von Krümmungslinien-Netzen zu betrachten. Zur Berechnung eignet sich neben der Konstruktion aus $p(N)$ vor allem folgende Optimierungsmethode.

Zur Verwirklichung der Erfindung wird ein Algorithmus vorgeschlagen, der folgendes leistet:

- Input ist ein Vierecksnetz N , dessen Maschen nicht zu stark von ebenen Maschen abweichen. Solche Netze können



automatisch oder interaktiv aus konjugierten Kurvennetzen der unterliegenden Fläche F generiert werden.

- Output ist ein Vierecksnetz mit ebenen Maschen, welches möglichst nahe an F liegt.

Der Algorithmus arbeitet mit einer numerischen Optimierung, welche iterativ abläuft. Sie erfolgt durch schrittweise Verlagerung der Knoten X unter Erhalt der Konnektivität. Am Beginn der Iteration wird durch ein Penalty-Verfahren folgende Zielfunktion $f = f_{\text{planar}} + w_1 f_{\text{glatt}} + w_2 f_{\text{nahe}}$ minimiert. Die Bedeutung dieser Funktionen ist die folgende: Da ein Viereck genau dann eben und konvex ist, wenn für die Summe der Innenwinkel $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ gilt, wird f_{planar} als Summe von Termen $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi)^2$ angesetzt, wobei sich die Summe über alle Vierecke des Netzes erstreckt. Die Funktion f_{glatt} soll kleine Werte für glatte und ästhetische Netze annehmen, wobei im Prinzip jede bekannte Glättungsfunktion verwendet werden kann. Die Funktion f_{nahe} hält das Netz während der Optimierung nahe an der gegebenen Referenzfläche F oder auch am Input-Netz N . Am einfachsten wird die Summe der Abstände entsprechender Knoten X des aktuellen und des verbesserten Netzes eingesetzt. Besser bewährt sich allerdings die bekannte Tangentialdistanz-Methode. Die Gewichte w_1 und w_2 müssen im Laufe der Optimierung verkleinert werden, um den Einfluss des Planaritäts-Terms f_{planar} zu erhöhen. Um eine numerisch hochwertige Ebenheit der Maschen 1 zu erhalten, verwendet man im Anschluss an das Penalty-Verfahren eine Lagrange-Newton-Iteration, welche die Zielfunktion $w_1 f_{\text{glatt}} + w_2 f_{\text{nahe}}$ unter einer Menge von Nebenbedingungen minimiert. Die Nebenbedingungen sind die Gleichungen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ für die einzelnen Vierecksmaschen 1.

Der Algorithmus kann nur dann sinnvoll eingesetzt werden, wenn das Input-Netz die Geometrie eines konjugierten Kurvennetzes reflektiert, also insbesondere aus einem solchen gewonnen wurde. Damit es leichter fällt, einen Input zu haben, der diese Anforderungen erfüllt, kann man die vorgeschlagene Optimierungsmethode mit einem Unterteilungsalgorithmus, der auf



Vierecksnetzen arbeitet, kombinieren. Man gibt ein grobes und einfaches Vierecksnetz mit (fast) ebenen Maschen 1 vor (siehe Beispiel im Hintergrund von Fig. 7), und wechselt dann zwischen Unterteilung und Optimierung ab. Das Netz im Vordergrund von Fig. 7 wurde mit einem solchen Verfahren generiert, das auch als Basis eines konkreten Designs einer Haltestelle für öffentliche Verkehrsmittel gemäß Fig. 8 ist.

Des Weiteren ist in die Optimierung noch folgende Kennzeichnung eines konischen Knotens X einzubauen: Die vier um einen konischen Knoten X der Reihe nach auftretenden Eckenwinkel ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 erfüllen die Gleichung

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_2 + \omega_4. \quad (K)$$

Im Penalty-Verfahren wird zur Funktion f_{planar} pro Knoten X ein Term $(\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4)^2$ addiert. In der Optimierung mit Nebenbedingungen kommt pro Knoten X die Nebenbedingung (K) hinzu. Das Netz im Vordergrund der Fig. 7 wurde durch ein Alternieren zwischen Catmull-Clark-Unterteilung und Optimierung unter Hinzunahme der Bedingung (K) pro Knoten X berechnet.

Will man Trägerelemente 4 mit konstanten Profilen für einen Tragrahmen 8 verwenden und dies mit optimierten Knoten X (4 Ebenen durch eine Achse) durchführen, so sind Offsets in konstantem Kantenabstand (Höhe der Trägerelemente 4) nötig. Dies ist eine stärkere Einschränkung als die Forderung nach konstantem Flächenabstand oder nach konstantem Eckenabstand, und daher kann man mit solchen Netzen nicht mehr beliebige Formen approximieren. Trotzdem gibt es eine Vielfalt derartiger Netze, welche man auf folgende Weise erhält: Wegen des konstanten Abstandes der Kanten 2 von Basisnetz N und Offsetnetz N_0 muss es ein Parallelnetz $p(N)$ geben, dessen Kanten 2 durchwegs denselben Abstand von Z haben. Also berühren alle Kanten von $p(N)$ eine Kugel S mit Mitte Z . Jede Vierecksmasche von $p(N)$ liegt in einer Ebene E , deren Schnittkreis mit S alle Seiten der Masche 1 berührt. Also hat jede Masche 1 von $p(N)$ einen auf der Kugel S liegenden Inkreis. Angrenzende Maschen 1 erzeugen berührende



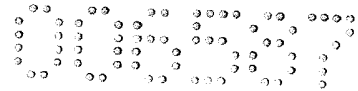
Inkreise. Insgesamt bildet daher die Menge der Inkreise eine Kreispackung auf der Kugel (siehe Fig. 6a). Es ist eine sogenannte Schramm'sche Kreispackung, da jeweils vier gemeinsame Berührtangenten durch einen gemeinsamen Punkt (Knoten X von $p(N)$) gehen. Das Netz $p(N)$ ist als ein isothermes Netz bekannt.

Netze N , die auf ein solches Vierecksnetz $p(N)$ parallelbezogen sind, werden *dual-isotherme* Netze genannt, weil sie die Laguerre-geometrischen (und damit in gewissem Sinne dualen) Gegenstücke zu den isothermen Netzen darstellen. Hieraus folgt aber auch, dass mit solchen Netzen nur jene Flächen approximiert werden können, bei denen das Gauss-Bild der Krümmungslinien ein isothermes Netz ist. Dies bedeutet eine gewisse Einschränkung im Design. Die Klasse von Flächen beinhaltet insbesondere die Minimalflächen. Netze mit konstantem Kantenabstand, welche Minimalflächen approximieren, sind im Stand der Technik bekannt, ohne dass aber die vorliegende Eigenschaft der Offsets und ihre Bedeutung für die Architektur erkannt wurden. Wichtig für die praktische Umsetzung ist die bekannte Konstruktion der Netze $p(N)$, welche auch Koebe-Polyeder genannt werden.

Eine Kennzeichnung dual-isothermer Netze kann auch durch Winkelbedingungen erfolgen. In jeder Ecke des Netzes liegen die dort ausgehenden Kanten 2 auf einem Drehkegel. Der längs einer Kante 2 auftretende Winkel zwischen den Flächen (Winkel zwischen den Normalen, gemessen im Intervall $(0, \pi)$) wird im Folgenden als Flächenwinkel längs dieser Kante 2 bezeichnet, wobei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ die längs der Kanten 2 um einen Knoten X auftretenden Flächenwinkel seien, so gilt (siehe dazu auch Fig. 6b)

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4. \quad (D1)$$

In jedem Knoten eines dual-isothermen Netzes muss diese Bedingung erfüllt sein. Es gibt aber noch weitere Winkelbedingungen, die den Kanten 2 des Netzes zugeordnet sind. Seien A und B die Endpunkte einer Kante 2, und mögen die dort auftretenden Winkel zu den in A und B einmündenden Nachbarkanten 2 zu beiden Seiten dieser Kante 2 mit $\alpha_l, \alpha_r, \beta_l, \beta_r$ bezeichnet



sein (siehe Fig. 6c). Dann gilt zwischen diesen Winkeln die Beziehung

$$\tan(\alpha_1/2) \cdot \tan(\beta_r/2) = \tan(\alpha_r/2) \cdot \tan(\beta_1/2) \quad (D2)$$

Die Gültigkeit von (D1) in jedem Knoten X und die Gültigkeit von (D2) in jeder Kante 2 eines Vierecksnetzes mit ebenen Maschen 1 sind notwendig und hinreichend für das Vorliegen eines dual-isothermen Netzes.

Fig. 14 zeigt einen Knotenbereich 3 eines dual-isothermen Netzes, ausgebildet durch Trägerelemente 4 mit rechteckigem Querschnitt. Die Längsachsen der Trägerelemente 4 bilden mit der Knotenachse A (Achse des oben genannten Drehkegels) denselben Winkel. Im Falle durchwegs elliptischer (lokal konvexen) Knoten X im geometrischen Modell (alle Kanten 2 auf demselben Halbkugel) kann man die Glasscheiben dann direkt auf den Rändern der Trägerelemente 4 ansetzen, da diese Ränder selbst ebene Vierecksmaschen 1 begrenzen.

Will man einen festen Abstand zwischen entsprechende Knoten X und X_0 von Basis und Offset erreichen, so müssen die Knoten des Parallelnetzes $p(N)$ auf einer Kugel S liegen. Da jede viereckige Masche 1 von $p(N)$ in einer Ebene E liegt, liegen die Ecken der Masche 1 auf dem Schnittkreis von E und S . Jede viereckige Masche 1 von $p(N)$ ist also ein Kreisviereck, d.h. es hat einen Umkreis. Durch paralleles Verschieben der Seiten eines Kreisvierecks entstehen wieder die Seiten eines Kreisvierecks. Da die Seiten jeder Masche 1 von N zu den entsprechenden Seiten der entsprechenden Masche 1 von $p(N)$ parallel sind, muss auch jedes Viereck in N ein Kreisviereck sein, d.h., einen Umkreis besitzen. Daher wird N auch als zirkuläres Netz bezeichnet. Da $p(N)$ eine Kugel approximiert, sind auch die zirkulären Netze als Näherungen von Krümmungslinien-Netzen anzusehen. Ihre Offsets $N_0 = N \oplus d \cdot p(N)$ im Abstand d haben Knoten X , die im Abstand d zu den entsprechenden Knoten von N liegen.



Zur Berechnung von zirkulären Netzen eignet sich die Optimierungsmethode wie oben beschrieben. Man hat nur die Planaritätsbedingung $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ pro Masche 1 durch die beiden Bedingungen $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$ und $\alpha_2 + \alpha_4 = \pi$ zu ersetzen, welche ein konvexes Kreisviereck kennzeichnen.

Es gibt auch Netze N , deren Offsets sowohl konstanten Flächenabstand als auch konstanten Eckenabstand besitzen. Sie sind auf Netze $p(N)$ parallelbezogen, deren Flächen eine Kugel S_1 mit Mitte Z berühren, und deren Ecken auf einer konzentrischen Kugel S_2 liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die viereckigen Maschen 1 von $p(N)$ Umkreise mit festem Radius besitzen. Man konstruiert ein solches Kreismuster aus einem sphärischen Rhombennetz. In der Fig. 20b ist ein solches Offset-Paar N, N_0 mit konstantem Eckenabstand und konstantem Flächenabstand dargestellt, das aus der Stützstruktur von Fig. 20a gewonnen wurde. Die Fig. 20c zeigt das dazugehörige, ebene Flächentragsystem in Diagrammform.

Die Ausführungen über parallelbezogene Netze, deren Offsets und Stützstrukturen gelten für beliebige Netze mit ebenen Maschen 1, auch wenn die Maschen N -Ecke sind. Sie werden allerdings für Dreiecksnetze trivial: Zwei Dreiecke mit parallelen Seiten sind ähnlich, und daher sind parallelbezogene Dreiecksnetze stets ähnlich. Hingegen ist erfindungsgemäß auch noch der Fall der Sechsecknetze (hexagonale Netze) von Interesse. So wie bei einer regulären Pflasterung mit Sechsecken (Bienenwabe) stoßen in einer regulären Ecke eines solchen Netzes drei Maschen 1 (und drei Kanten 2) zusammen (Fig. 19a). Weil für die praktische Anwendung in der Regel nur konvexe Sechsecke interessant sind, lassen sich nur Flächen mit positiver Gauß'scher Krümmung durch Sechsecknetze mit ebenen Maschen 1 approximieren.

Von besonderem Interesse sind wieder jene Netze, bei denen die Offsets spezielle Eigenschaften haben. Ein Knoten X ist immer konisch (da drei Ebenen stets einen Drehkegel berühren) und daher hat man immer Offsets in konstantem Flächenabstand. Will man konstanten Kantenabstand erreichen, so muss es ein



parallelbezogenes hexagonales Netz $p(N)$ geben, dessen Kanten 2 eine Kugel berühren. Ein solches Netz kann man mittels bekannter Algorithmen für Koebe-Polyeder konstruieren. Die zugehörige Stützstruktur von N hat wieder die Eigenschaft, dass die auftretenden Trapeze konstante Höhe besitzen. In einer erfindungsgemäßen Tragstruktur 8 sind daher Trägerelemente 4 mit konstantem Querprofil verwendbar. Die Längsachsen der Trägerelemente 4 münden unter gleichen Winkeln in die Knotenachsen A und die Flächenelemente 5 können direkt an den inneren Rändern der Tragstruktur 8 montiert werden.

Das Ergebnis ist jeweils ein Vierecksnetz mit ebenen Maschen 1, das eine Freiformfläche F approximiert. In der Fig. 9 ist ein solches Netz schematisch dargestellt, bei dem es sich etwa um ein konisches Netz handeln soll. In den nachfolgenden Fig. 10-12 soll nun beispielhaft gezeigt werden, wie anhand eines solchen Netzes eines geometrischen Modells der Verlauf der Trägerelemente 4 festgelegt werden kann.

Ausgangspunkt für die Konstruktion der Trägerelemente 4 ist ein Vierecksnetz N mit ebenen Maschen 1 (Fig. 9). In jedem Knotenpunkt X des Netzes gibt es eine gemeinsame Gerade (Knotenachse A), auf der die entsprechenden Knoten X der Offset-Netze liegen (Fig. 10). Bei einem konischen Netz N ist die Knotenachse A die Achse des Drehkegels, der von den angrenzenden Maschenebenen berührt wird. Bei einem dual-isothermen Netz N ist die Knotenachse A die Achse jenes Drehkegels, der die angrenzenden Kanten enthält.

Das Vierecksnetz N und ein dazu gehöriges Offset-Netz N_0 bestimmen eine geometrische Stützstruktur welche von ebenen Vierecken aufgebaut wird (Fig. 11). Jedes dieser Vierecke ist ein Trapez, berandet von einer Kante XY von N , der entsprechenden parallelen Kante X_0Y_0 von N_0 und den Verbindungsstrecken XX_0 und YY_0 entsprechender Knoten X von N und N_0 . Zum Bau der Tragstruktur sind die Trägerelemente 4 entlang der geometrischen Stützstruktur anzuordnen. Zur Erstellung eines Bauraumes, in dem die Trägerelemente 4 liegen, kann man einfach



die Stütztrapeze um eine gewünschte Breite normal zu ihren Ebenen nach beiden Seiten hin extrudieren, was quaderförmige Bauräume für die Trägerelemente 4 mit einem schrägen Verschnitt im Knotenbereich 3 ergibt (Fig. 12). Je nach der statischen Ausbildung des Tragsystems kann eine Trägerlage durchgehen, die zweite Trägerlage wird an der ersten Trägerlage gestoßen. (siehe auch Fig. 14).

Die Fig. 13 zeigt eine schematische, zweidimensionale Darstellung der rechteckigen Querschnittsform des Bauraums. Die Fig. 14 zeigt eine entsprechende dreidimensionale Darstellung des Bauraums im Bereich des Knotenbereichs 3, und die Fig. 15a-d mögliche architektonische Anwendungen einer Tragstruktur 8 in Stahl, Holz und Beton (maßstabslos). Der Bauraum muss keine rechtecksförmige Querschnittsform haben, darf jedoch nicht den maximal möglichen Bauraum überschreiten.

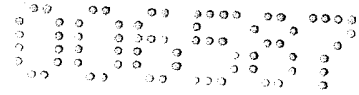
Bei der Erstellung der maximalen Abmessungen für die Querprofile der Trägerelemente 4 sind die extremalen Lagen der Winkel zwischen den Flächen des Basisnetzes und den Ebenen der Stützstruktur zu beachten (siehe Fig. 16).

Bei einem dual-isothermen Netz sind die Höhen der Stütztrapeze konstant und damit auch die Abstände der Linienlager zum Trägerelement 4. Ein weiterer Vorteil dual-isothermer Netze ist der folgende: Man kann die Paneele der Abdeckung, also die Flächenelemente 5, oder weiterer Schichten auch an den Innenseiten der Trägerelemente 4 montieren, da auch diese ebene Maschen 1 bilden (siehe auch Fig. 18). Dies gilt jedoch nur bei konvexen Knoten X. Fig. 17 zeigt einen konvexen Knotenbereich 3 eines dual-isothermen Netzes, ausgebildet durch Trägerelemente 4 mit rechteckigem Querschnitt. Die Längsachsen L der Trägerelemente 4 bilden mit der Knotenachse A (Achse des oben genannten Drehkegels) denselben Winkel (siehe auch Fig. 14).

Mithilfe der Erfindung ist es somit möglich, eine bauliche Umsetzung von Freiformflächen mithilfe einer Tragstruktur 8 zu finden, die die technischen und ökonomischen Anforderungen



verringert. Insbesondere können Montageaufwand und -kosten möglichst gering gehalten werden. Des Weiteren gelingt es, dass die Tragstruktur 8 zur Approximation von Freiformflächen auch die Möglichkeit eines Mehrschichtaufbaus bietet, also die parallel versetzte Montage mehrerer Flächenelemente 5 an den Trägerelementen 4 einer einzigen Tragstruktur 8.



Patentansprüche:

1. Tragstruktur (8) für gekrümmte Hüllgeometrien in Bauwerken bestehend aus Trägerelementen (4), die jeweils zu die Hüllgeometrie aufspannende N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils ein planares Flächenelement (5) umgrenzen, zusammengesetzt sind, und die Trägerelemente (4) aneinandergrenzender N-Ecke jeweils einen gemeinsamen Knotenbereich (3) bilden, in dem die Trägerelemente (4) zusammenstoßen, und in zumindest einem Abschnitt der Hüllgeometrie die Ebene eines Flächenelements (5) und die jeweiligen Ebenen der Flächenelemente (5) zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecken in unterschiedlichen Ebenen liegen, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Trägerelemente (4) in diesem Abschnitt jeweils 4- oder 6-Ecke bilden, und die Trägerelemente (4) jeweils eine Längsachse (L) aufweisen, die sich geradlinig zwischen jeweils zwei Knotenbereichen (3) erstreckt und parallel zur gedachten Schnittlinie der ihm zugeordneten Flächenelementebenen verläuft, wobei der Querschnitt der Trägerelemente (4) normal zu deren Längsachse entlang der gesamten Längsachse (L) des Trägerelements (4) jeweils einen relativen Drillwinkel von 0° aufweist.
2. Tragstruktur nach Anspruch 1, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel im Schnittpunkt der gedachten Schnittlinien von vier in einem Knotenbereich (3) aneinandergrenzender Flächenelementebenen gleich ist.
3. Tragstruktur nach Anspruch 1, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel zwischen den Flächennormalen zweier aneinandergrenzender Flächenelementebenen von vier in einem Knotenbereich (3) aneinandergrenzender Flächenelementebenen gleich ist.



4. Tragstruktur nach einem der Ansprüche 1 bis 3, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Trägerelemente (4) eine rechteckige Querschnittsform aufweisen, oder in eine rechteckige Querschnittsform einschreibbar sind.
5. Tragstruktur nach einem der Ansprüche 1 bis 4, **dadurch gekennzeichnet**, dass an den Trägerelementen (4) zumindest zwei Flächenelemente (5) gehalten sind.
6. Verfahren zur Festlegung einer Tragstruktur (8) für gekrümmte Hüllgeometrien in Bauwerken bestehend aus Trägerelementen (4), bei dem eine vorgegebene, gekrümmte Hüllgeometrie durch ein lückenloses Netz von N-Ecken ($N=3,4,\dots$), die jeweils eine planare Masche (1) definieren, approximiert wird, wobei jeweils aneinandergrenzende N-Ecke einen gemeinsamen Knoten (X) aufweisen, und in zumindest einem Abschnitt der Bauform die Machenebene eines N-Ecks und die jeweiligen Maschenebenen zweier in nicht-parallelen Raumrichtungen angrenzenden N-Ecke in unterschiedlichen Ebenen liegen, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Approximation der vorgegebenen, gekrümmten Hüllgeometrie mithilfe eines ersten, lückenlosen Netzes von 4- oder 6-Ecken erfolgt, die durch Parallelverschiebung in einer Richtung normal zur Maschenebene des jeweiligen 4- oder 6-Ecks in ein weiteres, lückenloses Netz von 4- oder 6-Ecken überführbar sind, wobei jeweils zwei aneinandergrenzende N-Ecke eine gemeinsame Begrenzungslinie (2) aufweisen, die den Verlauf der Längsachse eines diesen N-Ecken zugeordneten Trägerelements (4) festlegt, und die Abmessung eines Trägerelements (4) senkrecht zu dieser Begrenzungslinie (2) durch den Abstand (d) der entsprechenden Begrenzungslinie (2) des ersten Netzes zu jener des weiteren, parallel verschobenen Netzes festgelegt wird.
7. Verfahren zur Festlegung einer Tragstruktur nach Anspruch 6, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel zwischen den Begrenzungslinien



- (2) von vier aneinandergrenzenden 4-Ecken in deren gemeinsamen Knoten (X) gleich ist.
8. Verfahren zur Festlegung einer Tragstruktur nach Anspruch 6, **dadurch gekennzeichnet**, dass die Winkelsumme jeweils gegenüberliegender Winkel zwischen den Flächennormalen zweier aneinandergrenzender Maschenebenen von vier in einem Knoten (X) aneinandergrenzender Flächenelementebenen gleich ist.
9. Verfahren zur Festlegung einer Tragstruktur (8) nach einem der Ansprüche 6 bis 8, **dadurch gekennzeichnet**, dass in einem Abschnitt der Tragstruktur (8) zumindest ein zweites, lückenloses Netz von 4- oder 6-Ecken, die jeweils eine planare Maschenebene definieren, festgelegt wird, wobei die 4- oder 6-Ecke des zweiten Netzes durch Parallelverschiebung der 4- oder 6-Ecke des ersten Netzes in einer Richtung normal zur Maschenebene des jeweiligen 4- oder 6-Ecks gebildet werden.

Wien, am

21. Juni 2006

Die Patentanwälte

P. Kliment, B. Hennapel

Fig. 1

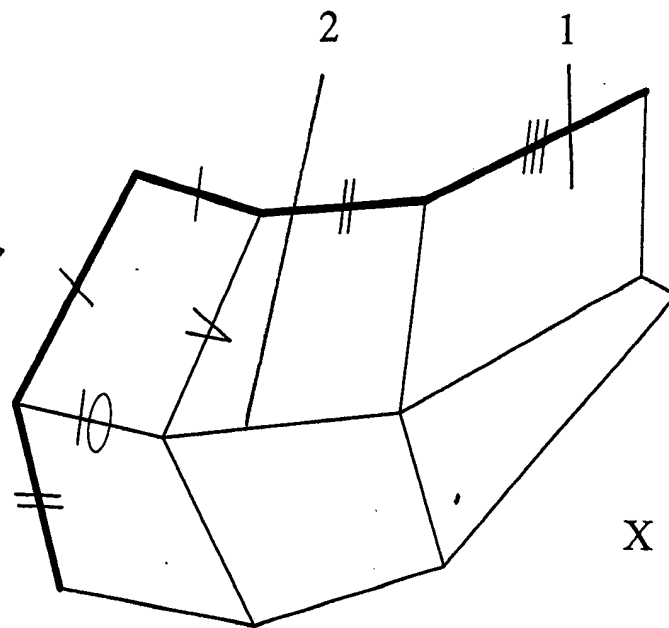
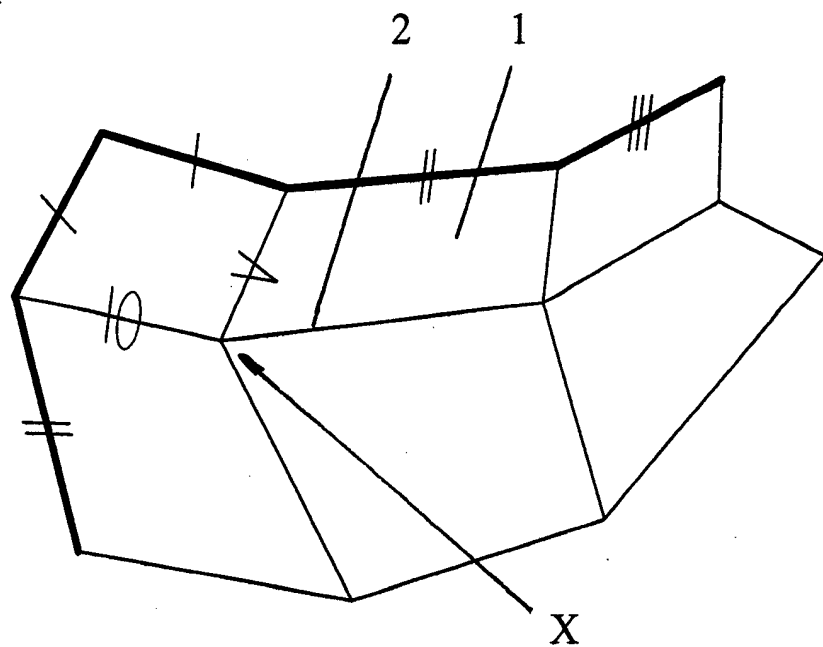


Fig. 2

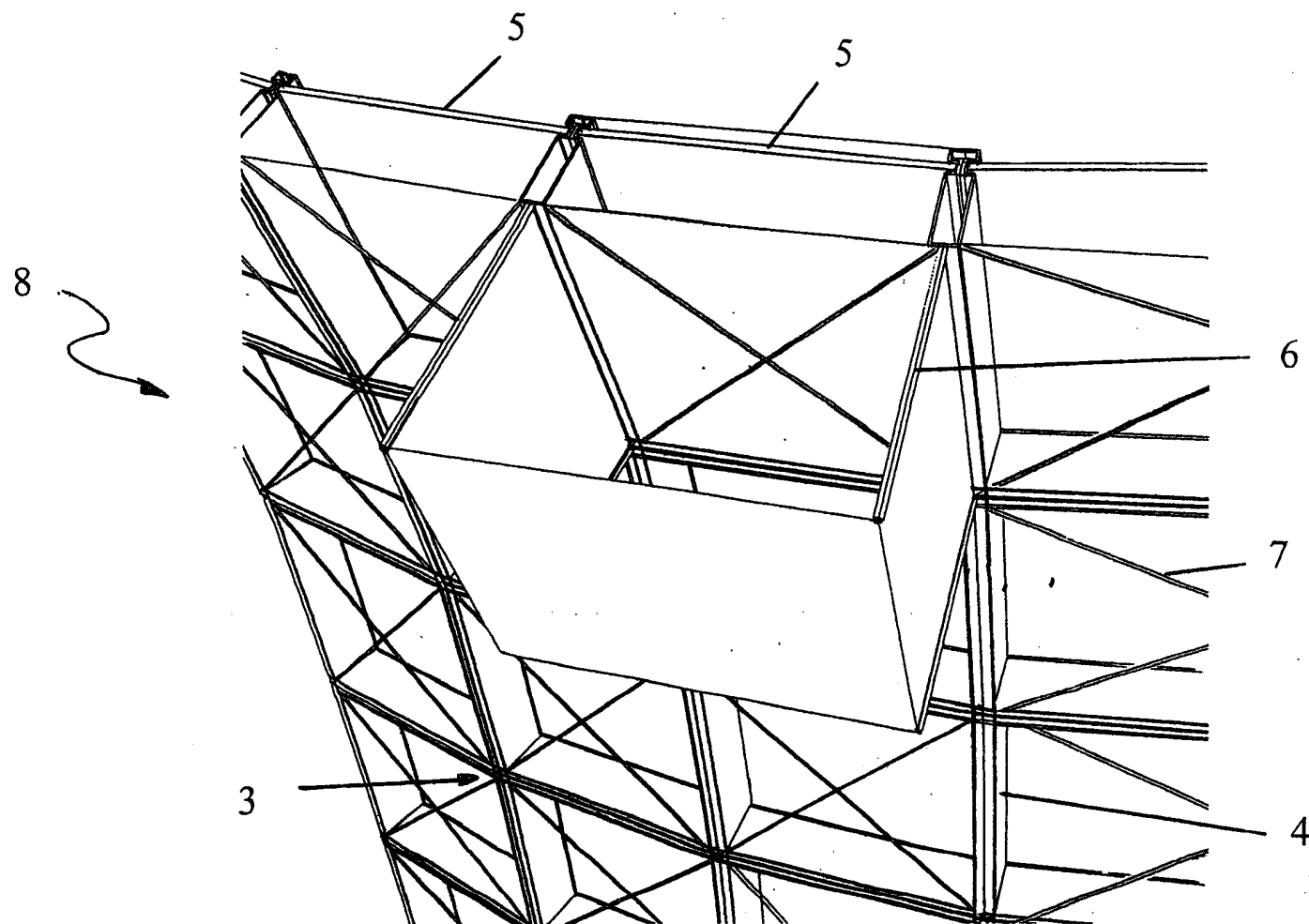


Fig. 5a

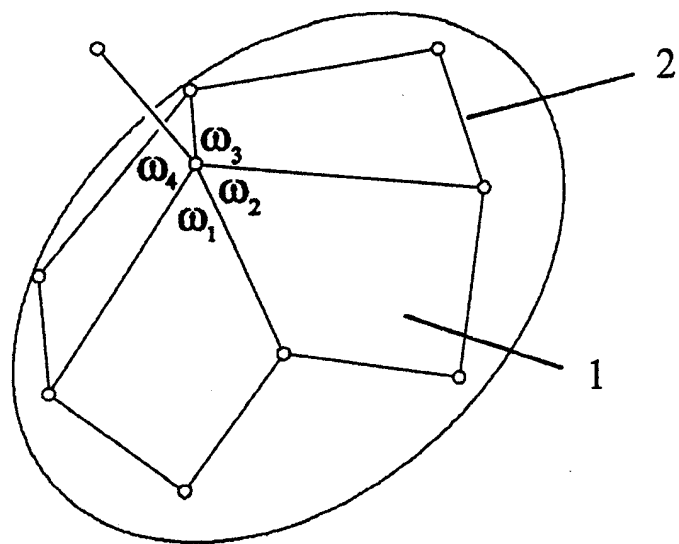


Fig. 5b

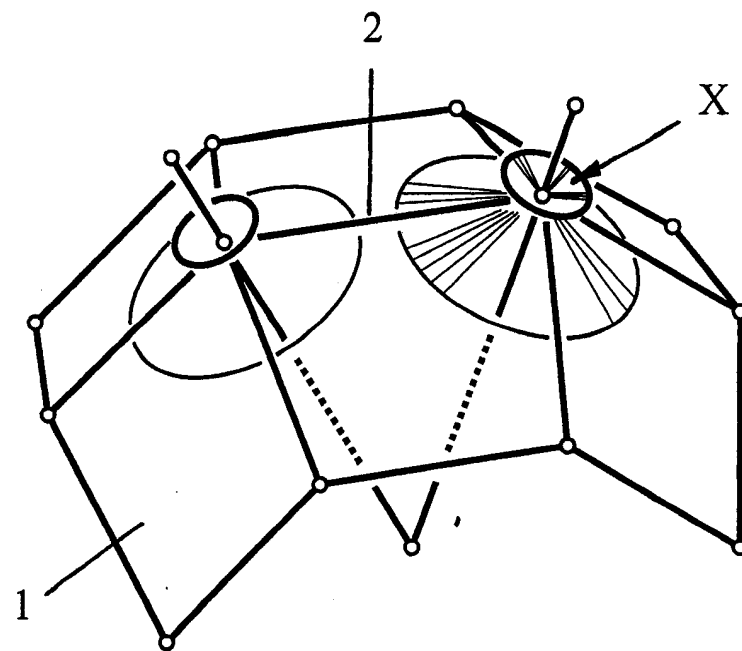


Fig. 7

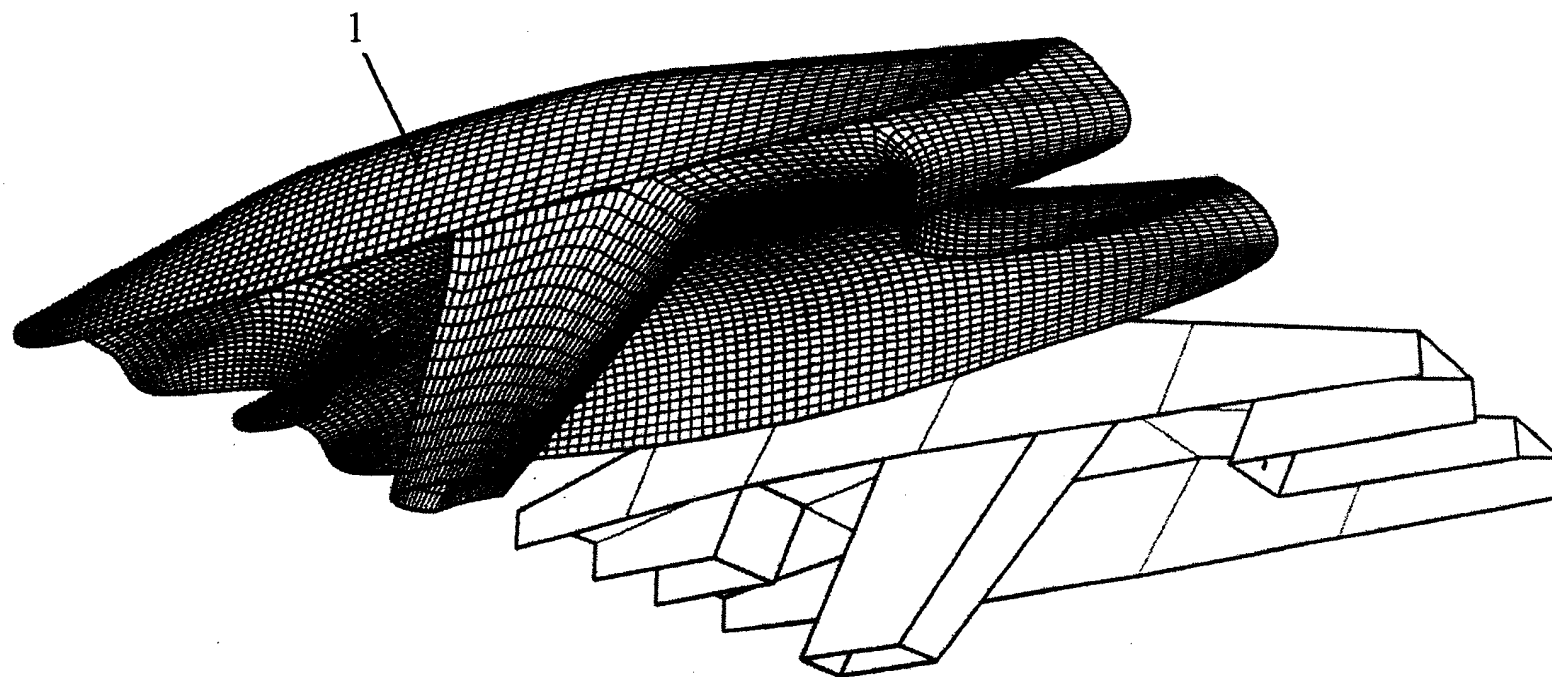
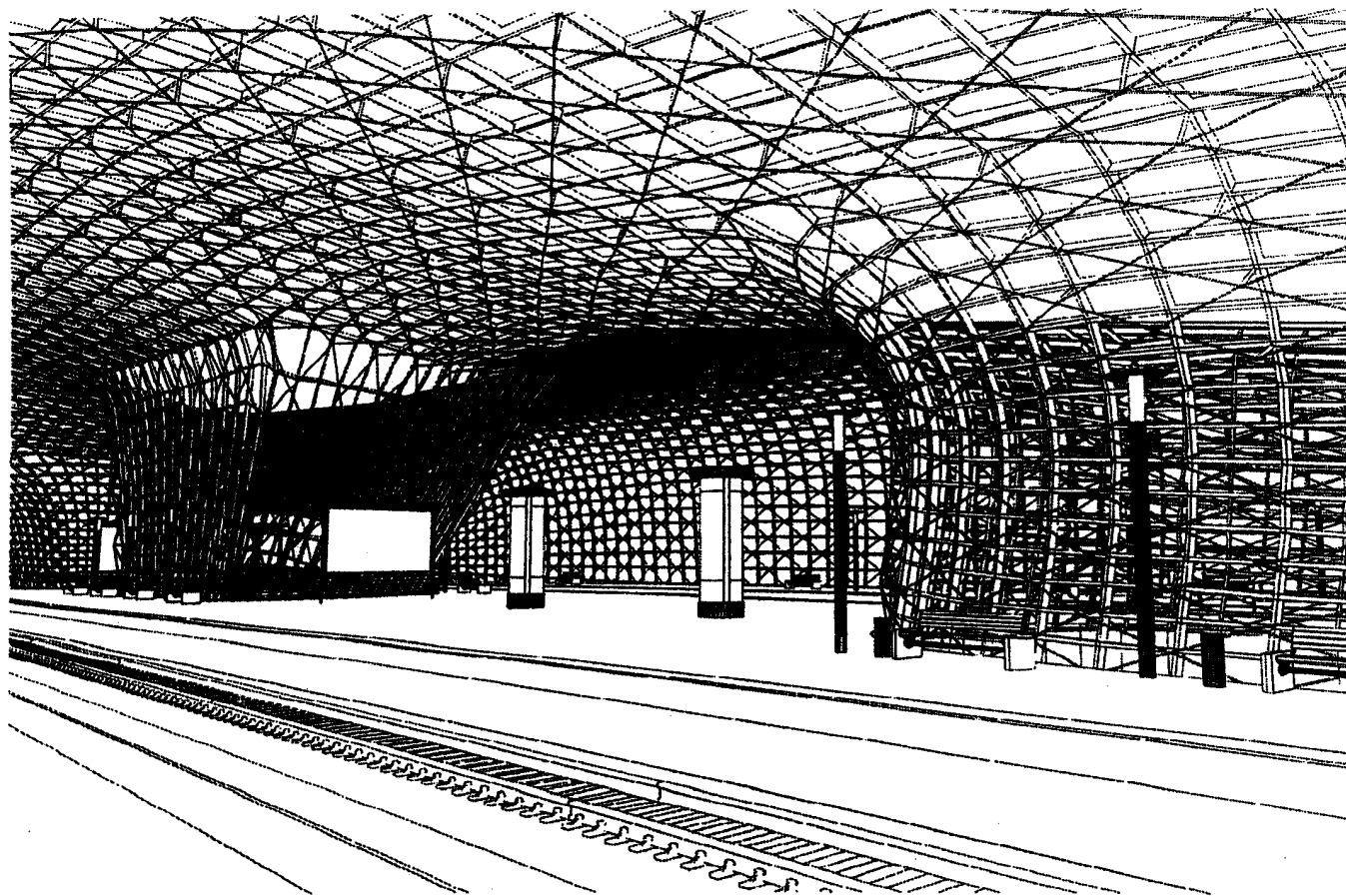


Fig. 8



7/12



8/12

Fig. 9

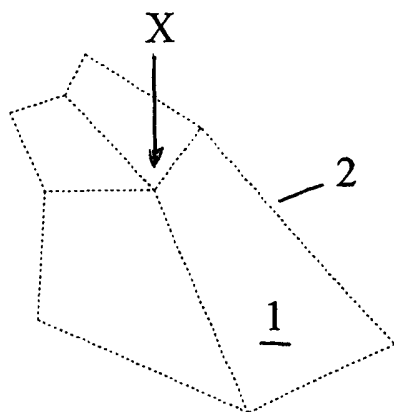


Fig. 10

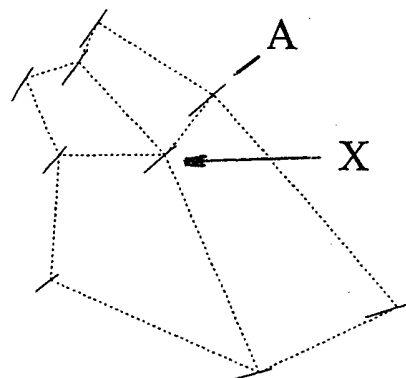


Fig. 11

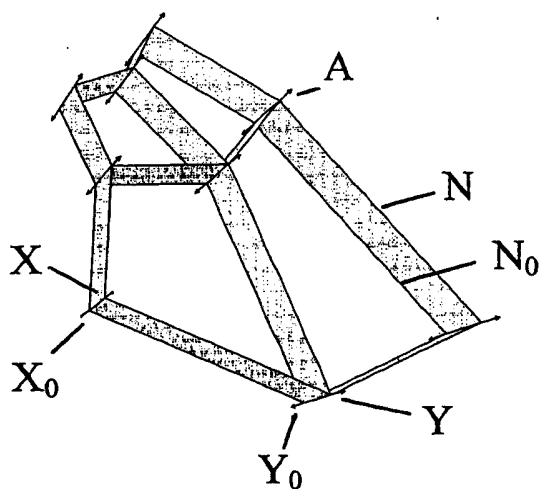


Fig. 12

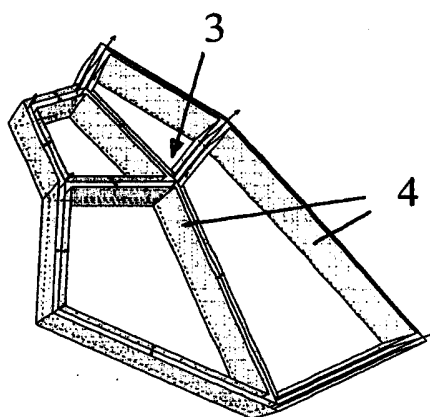


Fig. 13

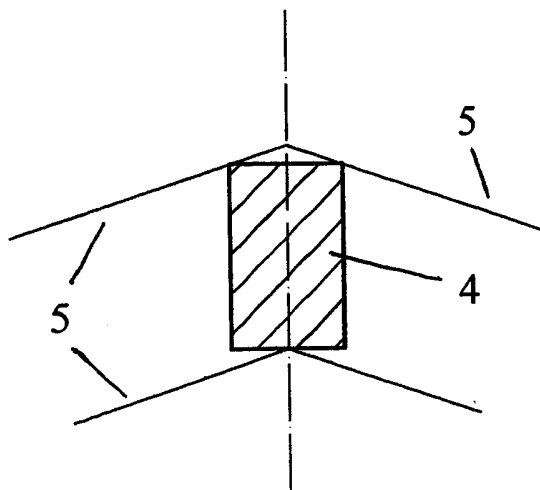


Fig. 14

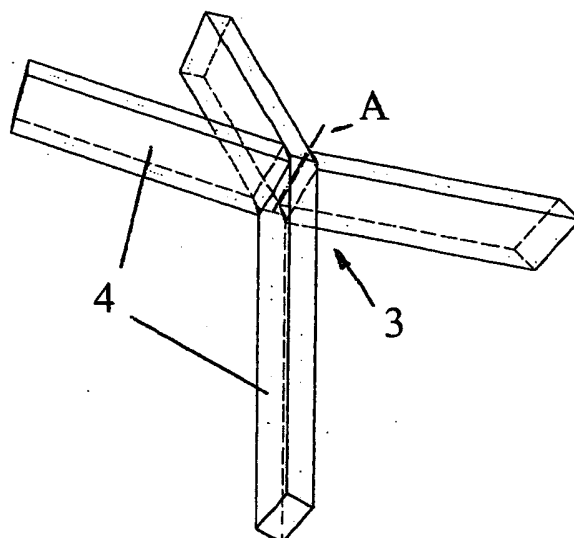


Fig. 15a

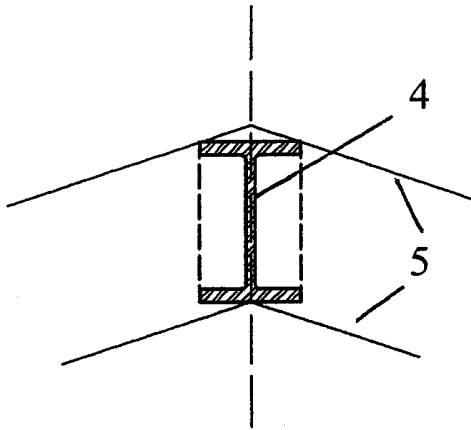


Fig. 15b

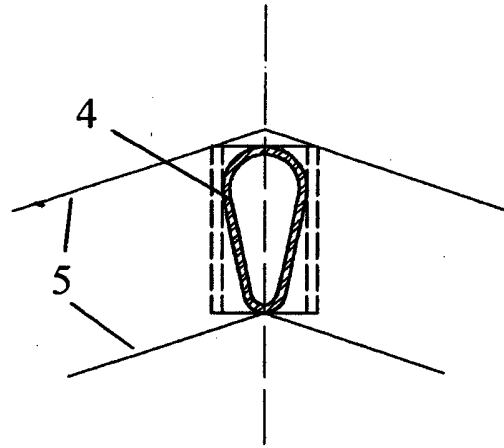


Fig. 15c

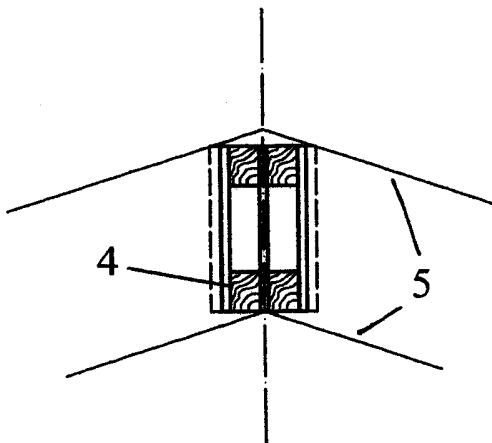


Fig. 15d

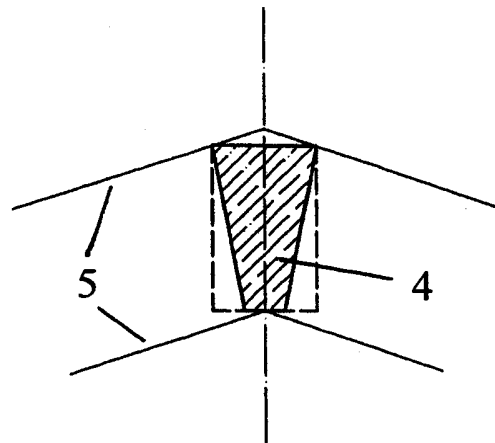


Fig. 16

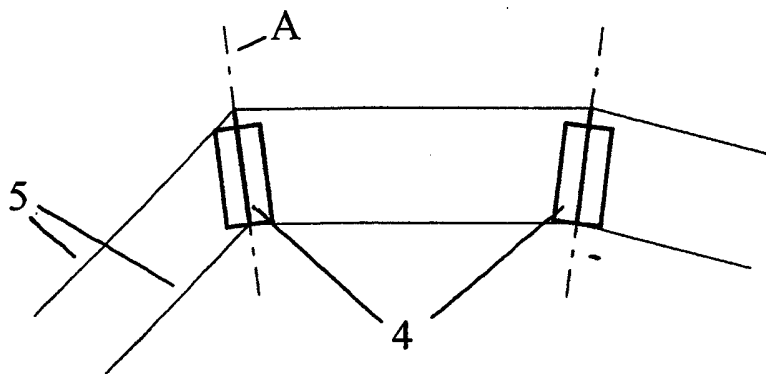


Fig. 17

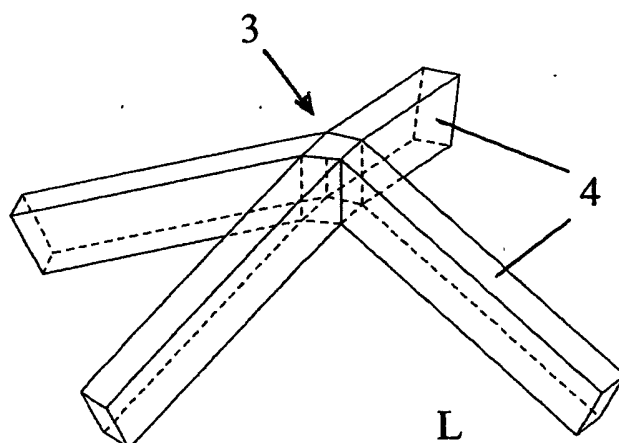


Fig. 18

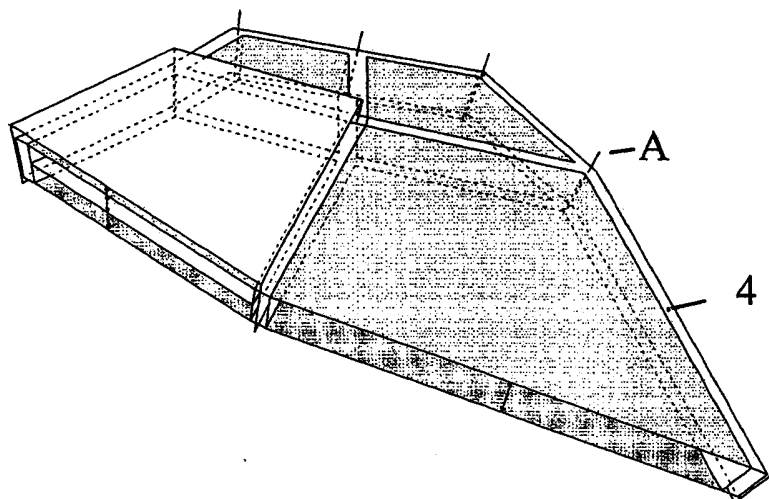


Fig. 19a

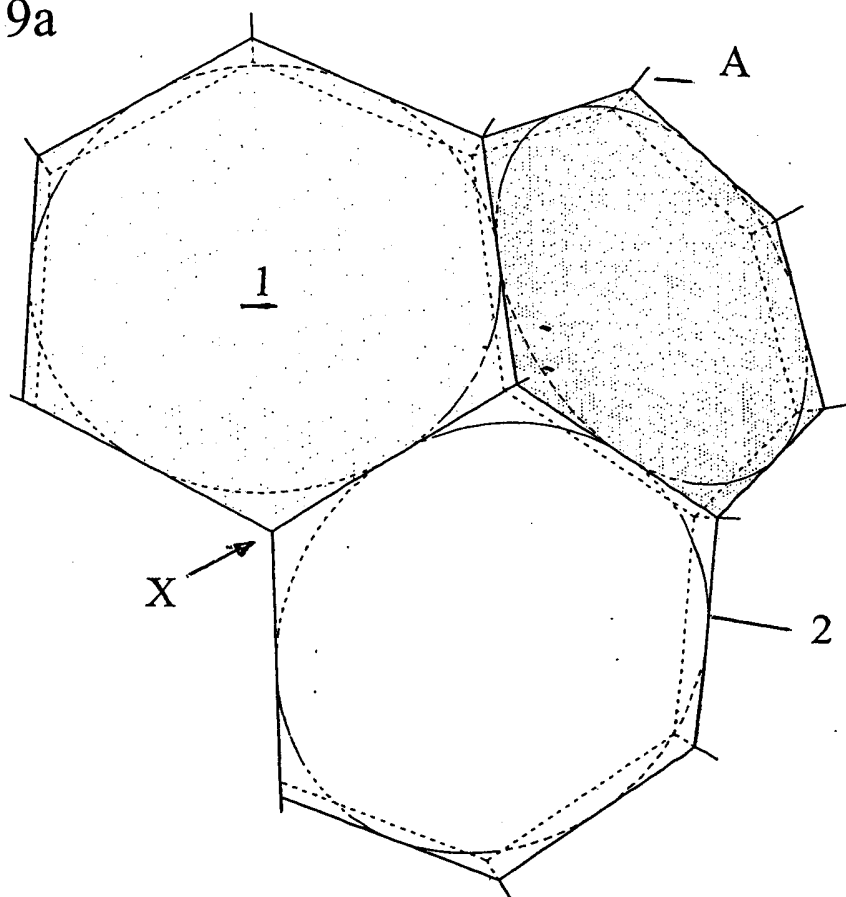


Fig. 19b

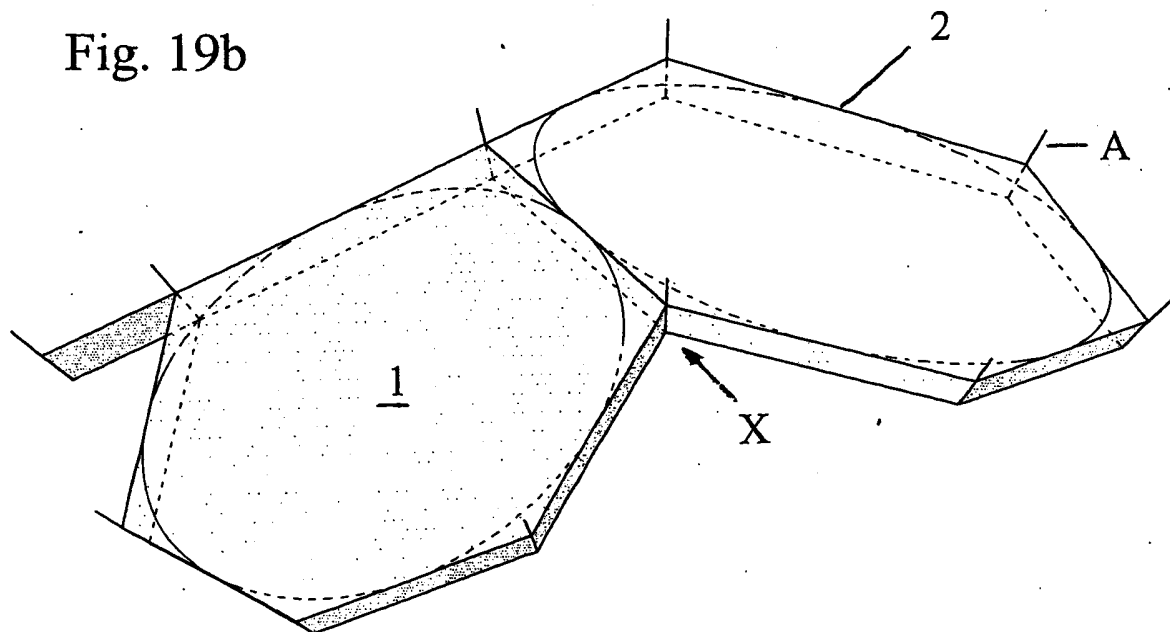


Fig. 20a

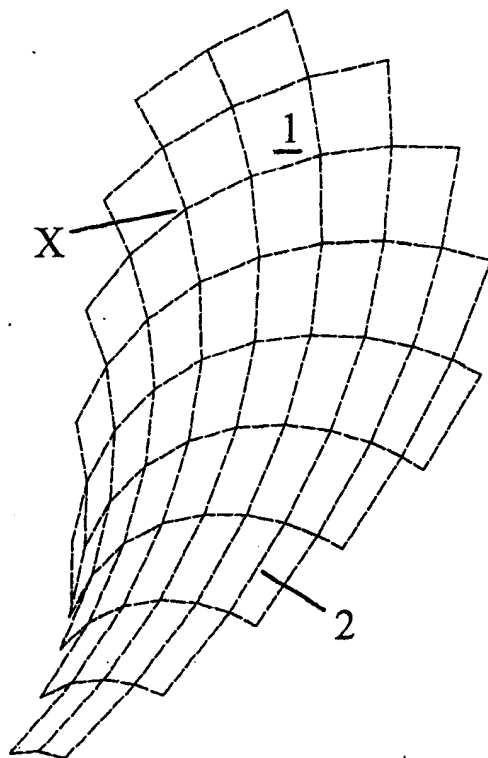


Fig. 20b

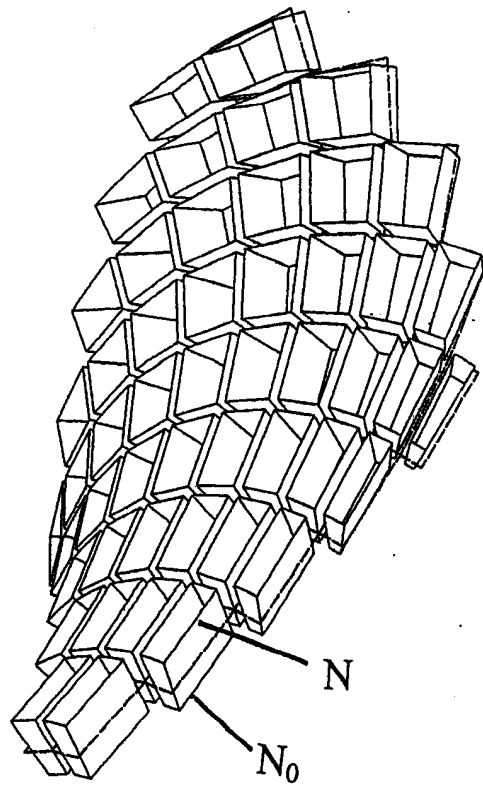
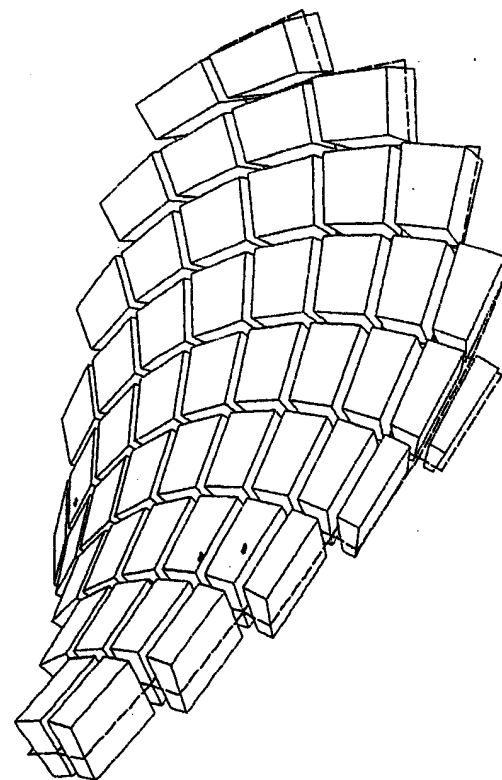


Fig. 20c



12/12

