

(12) 按照专利合作条约所公布的国际申请

(19) 世界知识产权组织
国际局



(10) 国际公布号

WO 2024/198599 A1

(43) 国际公布日

2024 年 10 月 3 日 (03.10.2024)

WIPO | PCT

(51) 国际专利分类号:

G06N 3/088 (2023.01)

(21) 国际申请号:

PCT/CN2024/070340

(22) 国际申请日:

2024 年 1 月 3 日 (03.01.2024)

(25) 申请语言:

中文

(26) 公布语言:

中文

(30) 优先权:

202310326728.2 2023年3月30日 (30.03.2023) CN

(71) 申请人: 大连理工大学 (DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY) [CN/CN]; 中国辽宁省大连市凌工路2号, Liaoning 116024 (CN)。

(72) 发明人: 徐腾飞 (XU, Tengfei); 中国辽宁省大连市凌工路2号, Liaoning 116024 (CN)。郝鹏 (HAO, Peng); 中国辽宁省大连市凌工路2号, Liaoning

116024 (CN)。刘大川 (LIU, Dachuan); 中国辽宁省大连市凌工路2号, Liaoning 116024 (CN)。

(74) 代理人: 辽宁鸿文知识产权代理有限公司 (LIAONING HONGWEN INTELLECTUAL PROPERTY AGENCY CO., LTD); 中国辽宁省大连市甘井子区黄浦路439号科技创业大厦1102-02, Liaoning 116085 (CN)。

(81) 指定国(除另有指明, 要求每一种可提供的国家保护): AE, AG, AL, AM, AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BN, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CV, CZ, DE, DJ, DK, DM, DO, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT, HN, HR, HU, ID, IL, IN, IQ, IR, IS, IT, JM, JO, JP, KE, KG, KH, KN, KP, KR, KW, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LU, LY, MA, MD, MG, MK, MN, MU, MW, MX, MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PA, PE, PG, PH, PL, PT, QA, RO, RS, RU, RW, SA, SC, SD,

(54) Title: VARIATIONAL PRINCIPLE-BASED NEURAL OPERATOR TRAINING AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM SOLVING INTEGRATED METHOD, MEDIUM, AND PRODUCT

(54) 发明名称: 基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品

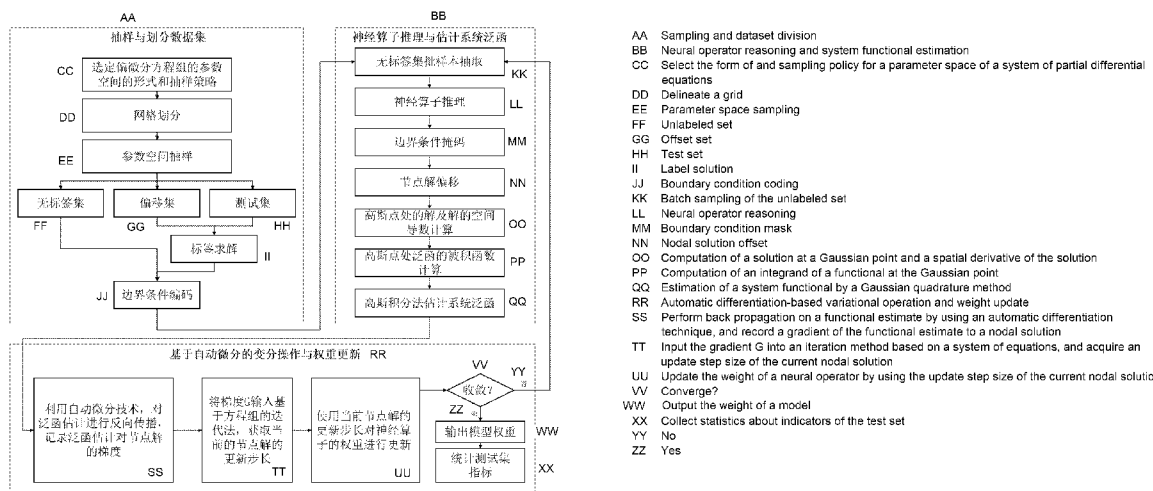


图 1

(57) Abstract: A variational principle-based neural operator training and partial differential equation system solving integrated method, a medium, and a product. The method comprises: performing sampling on a parameter space of a system of partial differential equations to form a dataset only containing discrete parameter fields, dividing the dataset into an offset set, a test set, and an unlabeled set, dividing the unlabeled set into multiple batches, and forming a mask tensor of a boundary condition; predicting nodal solutions of discrete parameter field samples in the unlabeled set by using a neural operator module so as to obtain a discretized functional as a system functional estimate; and calculating a gradient of the functional estimate to a nodal solution, using a norm of the gradient as a minimization objective, acquiring an update step size of the current nodal solution, and updating the weight of the module. According



SE, SG, SK, SL, ST, SV, SY, TH, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ,
UA, UG, US, UZ, VC, VN, WS, ZA, ZM, ZW。

- (84) 指定国(除另有指明, 要求每一种可提供的地区
保护): ARIPO (BW, CV, GH, GM, KE, LR, LS, MW, MZ,
NA, RW, SC, SD, SL, ST, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), 欧亚
(AM, AZ, BY, KG, KZ, RU, TJ, TM), 欧洲 (AL, AT, BE,
BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR,
HU, IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, ME, MK, MT, NL, NO,
PL, PT, RO, RS, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF,
CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, KM, ML, MR, NE, SN,
TD, TG)。

本国际公布:

— 包括国际检索报告(条约第21条(3))。

to the present invention, two tasks of solving operators of the system of partial differential equations and training neural operators are integrated in one framework and then completed, and a variational operation is introduced to construct an unlabeled optimization objective so as to replace a data-driven training error term, thereby saving the time and computing power for generating a large number of labels required to construct a data-driven error term.

(57) 摘要: 一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品, 包括: 从偏微分方程组的参数空间中抽样形成仅含离散参数场的数据集, 划分为偏移集、测试集、无标签集, 将无标签集分为多个批次, 并形成边界条件的掩码张量; 使用神经算子模块预测无标签集中离散参数场样本的节点解, 得到离散化的泛函作为系统泛函的估计; 计算泛函估计关于节点解的梯度, 将其范数作为最小化目标, 获取当前节点解的更新步长, 更新模块的权重。本发明将求解偏微分方程组算子和训练神经算子两个任务统一在一个框架内完成, 引入变分操作构建无标签的优化目标以替代数据驱动的训练误差项, 节省生成用于构建数据驱动误差项所需的大量标签的时间与算力。

基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品技术领域

本发明属于物理仿真与机器学习的交叉领域，尤其涉及一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品。

背景技术

神经算子作为一种能够有效学习偏微分方程组的参数空间与解空间之间映射算子的深度神经网络，相对于高斯过程模型、径向基函数模型等传统的代理模型，能够对整个偏微分方程组求解域进行较高精度的即时推理，在流体、固体、电磁、传热等诸多物理仿真领域受到广泛关注。神经算子具有潜在超分辨率、高度的灵活性与优良的泛化性能等诸多优点，在工业装备数字孪生、实时与大规模仿真解算、动漫游戏建模渲染、元宇宙等行业具有巨大的落地空间，非常可能成为下一代物理仿真求解器的核心技术。

然而，现有针对神经算子的基于数据驱动的训练方法需要来自传统求解器的海量标签数据，导致对传统求解器的大量使用，从而带来巨大的计算负担。此外，训练过程本身也会带来一定的计算成本。

发明内容

针对现有基于数据驱动的训练神经算子方法的不足，本发明提出一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品，通过神经算子的预测节点解估计离散的泛函，并通过基于方程组的迭代法最小化利用自动微分技术得到的离散泛函对节点解的梯度范数，构建无标签的优化目标来训练神经算子，从而避免大量地使用传统求解器获得标签，节约了计算成本。同时，本方法利用神经算子的泛化能力为每步迭代提供良好的初始解，本质上将训练与求解纳入了一个统一的框架。

为了达到上述目的，本发明采用的技术方案如下：

第一方面，一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，包括以下步骤：

步骤 100：从偏微分方程组的参数空间中抽样形成无标签的仅含离散参数场的数据集 D ，将数据集 D 划分为偏移集 L 、测试集 T 和无标签集 U ，将无标签集 U 分为多个批次，对边界条件进行编码，形成边界条件的掩码张量（the mask tensor），包括以下子步骤：

步骤 101：选定偏微分方程组的参数空间的形式和抽样策略；

步骤 102：对偏微分方程组的求解域进行网格划分，并按照步骤 101 选定的抽样策略对偏微分方程组的参数空间进行抽样，对抽样得到的参数场在网格的高斯点处离散化，形成无标签的仅含离散参数场的离散参数场数据集 D ，具体的：确定抽样离散参数场数目和离散参数场的

形状;

步骤 103: 从离散参数场数据集 D 随机抽样出 (N_1+N_2) 个离散参数场, 求解这 (N_1+N_2) 个离散参数场对应的偏微分方程组的节点解, 并将其中前 N_1 个离散参数场及其对应的节点解 (标签) 作为偏移集 L , 剩余的 N_2 个离散参数场及其对应的节点解作为测试集 T , 其中, 偏移集 L 用于对输出的范围进行偏移, 详见步骤 203;

步骤 104: 将上一步骤抽样的 (N_1+N_2) 个离散参数场排除出数据集 D , 形成无标签集 U 作为训练集;

步骤 105: 设定记录迭代次数的变量 i , 并设置其值为 0, 将无标签集 U 分为若干批次的离散参数场样本;

步骤 106: 对边界条件进行编码, 形成形状和节点解相同的边界条件的掩码张量 M , 在 M 当中, 位置对应于被约束的节点自由度的 M 元素被设为 0, 其余元素被设为 1;

步骤 200: 使用神经算子模块 F 预测无标签集 U 中离散参数场样本的节点解, 进一步根据节点解得到离散化的泛函作为系统泛函的估计, 包括以下子步骤:

步骤 201: 不放回地抽取无标签集 U 中一批离散纤维角度场样本 s , 如果所有的批次都被抽出, 变量 i 自增 1, 判断对神经算子的训练过程是否达到算法收敛条件, 如果收敛, 则输出神经算子的权重 θ , 并执行步骤 304, 否则, 打乱无标签集 U , 并将打乱后的无标签集 U 重新分为若干个批次, 从第一个批次重新抽取、训练; 其中, 所述的收敛条件可以是 i 达到训练的最大迭代次数或者神经算子的推理精度已达到精度要求;

步骤 202: 将样本 s 输入神经算子模块 F 进行推理, 利用掩码张量 M 对 F 输出的张量 $F(s)$ 进行掩码操作, 得到节点解 a , 如式 (1.1) 所示;

$$a = F(s) \odot M \quad (1.1)$$

式 (1.1) 中, $\odot$ 代表张量之间进行元素积, 下同;

步骤 203: 使用偏移集 L 内所有标签的均值 mean 和标准差 std , 对节点解 a 进行偏移处理:

$$a = a \odot \text{std} + \text{mean} \quad (1.2)$$

步骤 204: 对节点解 a 进行卷积操作, 得到在高斯点处的解及其空间导数;

步骤 205: 利用张量操作处理高斯点处的解及其空间导数, 求得泛函被积函数在高斯点处的值;

步骤 206: 使用高斯积分法, 根据泛函被积函数在高斯点处的值, 求得离散化的泛函估计 Π ;

步骤 300: 对离散化的泛函施加变分操作构建优化目标, 具体的: 计算泛函估计 Π 关于节点解 a 的梯度 R , 并将其范数作为最小化目标, 采用基于方程组的迭代法获取当前节点解的更新步长 Δa , 并利用 Δa 更新神经算子模块 F 的权重 θ , 包括以下子步骤:

步骤 301: 利用自动微分方法, 对泛函估计 Π 进行反向传播, 记录泛函估计 Π 对节点解 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$, 并将其范数作为最小化目标;

步骤 302: 将梯度 $\mathbf{R}$ 输入基于方程组的迭代法, 得到当前的节点解的更新步长 $\Delta \mathbf{a}$;

步骤 303: 使用 $\Delta \mathbf{a}$ 对神经算子的权重 θ 进行更新, 并返回执行步骤 201;

步骤 304: 将神经算子模块 F 在测试集 T 上进行推理, 并统计测试集指标。

进一步, 所述的步骤 101 中, 偏微分方程组的参数空间可以是偏微分方程组的系数或自由项形成的空间, 偏微分方程组的参数空间形式可以是 B 样条曲面和高斯随机场等由参数控制的连续的参数场或由此类参数场作为自变量的函数, 抽样策略可以是简单随机抽样法和拉丁超立方抽样法等抽样方法。

进一步, 所述的步骤 102 中, 网格划分的设置可根据具体的研究问题自行调整, 对偏微分方程组的参数空间进行抽样可以指对偏微分方程组参数的直接抽样, 也可以指对控制偏微分方程组参数的自变量的抽样, 例如, 对控制热传导的热传导偏微分方程, 可以对热源项进行直接抽样, 而对于控制纤维铺层弹性板的弹性力学偏微分方程组, 可以对控制本构方程组中的弹性系数的材料主方向坐标轴角度进行抽样, 即对纤维角度场进行抽样。

进一步, 所述的步骤 103 中, 求解偏微分方程组所用到的分析方法可以是有限元分析法、边界元分析法、等几何分析法和无网格法等类似分析方法。

进一步, 所述的步骤 105 中, 批次的大小与数目可以根据具体的研究问题自行调整。

进一步, 所述的步骤 202 中, 神经算子模块 F 包括但不限于单个神经算子和多个神经算子的组合, 神经算子模块 F 所有的神经网络的网络结构与网络结构的超参数可根据具体的研究问题自行调整。

进一步, 所属步骤 205 中, 从高斯点处的解及其空间导数得到高斯点处泛函被积函数的张量操作的具体形式可根据解决的偏微分方程组形式自行调整。

进一步, 所述的步骤 302 中, 基于方程组的迭代法包括但不限于最速下降法和共轭梯度法, 基于方程组的迭代法的迭代步数可以根据具体的研究问题自行调整, 训练的最大迭代次数可以根据具体的研究问题自行调整。

进一步, 所述的步骤 303 中, 更新过程所需的各种超参数, 如学习率、动量等可以根据具体的研究问题自行调整。

进一步, 所述的步骤 304 中, 测试集指标可以根据具体的研究问题自行确定。

第二方面, 一种计算机可读存储介质, 包括指令, 当指令其在计算机上运行时, 使得计算机执行如第一方面任意一项的方法。

第三方面, 一种包含指令的计算机程序产品, 当其在计算机上运行时, 使得计算机执行第

一方面任意一项的方法。

本发明的有益效果是：

本发明提出基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品，将求解与训练过程纳入一个统一的框架。纯粹的数据驱动方式的求解与训练过程是分离进行的，需要大量的标签构建优化目标，而本发明通过估计神经算子的输出泛函，并引入变分操作构建无标签的优化目标，从而减少了训练过程中所需的标签，进而减少了传统求解器的使用。优化设计与不确定性量化等领域需要对偏微分方程组的参数集而非单个参数进行求解，传统的求解器，例如基于有限元的求解器，只能针对参数集当中的每一个参数实例进行独立求解，继而遍历地求解整个参数集，而本发明则在求解一个从参数空间到解空间的算子，并同时地学习一个具有泛化能力的神经算子的权重，这保证了在具体地求解某一个参数的同时，本发明能够在其他的参数上获得精度提升。本发明有望在优化设计与不确定性量化等需要对偏微分方程组的大量参数求解的领域替代传统的求解器。

附图说明

图1为本发明实施例提供的基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品的实现流程图；

图2为实施例1边界条件示意图；

图3为实施例1神经算子网络结构示意图；

图4为实施例1的测试集随机抽样5个样本展示图；

图5为实施例2的含变化热源的矩形区域P边界条件示意图；

图6为实施例2的测试集随机抽样5个样本展示图。

具体实施方式

为使本发明解决的技术问题、采用的技术方案和达到的技术效果更为详尽，下面结合附图和实施例对本发明作进一步的详细说明。可以理解的是，此处所描述的具体实施例仅用于解释本发明，而非对本发明的限定。所描述的实施例仅仅是本发明的一部分实施例，而不是全部的实施例。基于本发明中的实施例，本领域普通技术人员在没有付出创造性劳动前提下所获得的其他实施例，都属于本发明保护的范围。另外还需要说明的是，为了便于描述，附图中仅示出了本发明相关的部分而非全部内容。

实施例1

本发明实施例提供基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，包括以下步骤：

步骤100：研究变刚度纤维铺层弹性板P，板P的尺寸，材料属性和边界条件见步骤103，

对板 P 的纤维角度场抽样形成无标签的仅含离散纤维角度场的数据集 D，进一步将数据集 D 划分为偏移集 L，测试集 T 和无标签集 U，将无标签集 U 分为多个批次，对边界条件进行编码，形成边界条件的掩码张量，包括以下子步骤：

步骤 101：选定纤维角度场的形式为由 4×4 控制点网格控制的 2 阶 B 样条曲面的 z 坐标分量，固定控制点的 x 和 y 分量，则对于点 (x_p, y_p) ，其纤维角 $Z(x_p, y_p)$ 由式 (1.1) 确定：

$$Z(x_p, y_p) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 N_{i,2}(u_p) N_{j,2}(v_p) Z_{i,j} \quad (1.1)$$

其中， (u_p, v_p) 是点 (x_p, y_p) 的参数坐标， $N_{i,2}$ 和 $N_{j,2}$ 分别是 x 和 y 方向的第 $(i+1)$ 和第 $(j+1)$ 个控制点的基函数， i 和 j 分别为 x 和 y 方向的控制点标号，抽样策略选为拉丁超立方抽样；

步骤 102：对所研究的纤维铺层弹性板 P，选择单元为平面 4 节点的双线性缩减积分单元，网格设置采用均匀的网格划分，网格划分密度为 32×32 个单元，共 33×33 个节点，并对纤维角度场的 4×4 控制点的 z 坐标进行拉丁超立方抽样，对所有 z 坐标抽样的范围均为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，从而实现对纤维角度场的抽样，抽样的纤维角度场数目为 100000 个，随机抽取并离散其中 14005 个纤维角度场，形成无标签的仅含离散纤维角度场的离散纤维角度场数据集 D，其中，纤维角度场在网格的高斯点处进行离散，离散纤维角度场形状为 $32 \times 32 \times 1$ ；

步骤 103：从数据集 D 随机抽样 2005 个离散纤维角度场，求解这 2005 个离散纤维角度场对应的偏微分方程组的节点位移解，并将其中前 5 个离散纤维角度场及其对应的节点位移解作为偏移集 L，剩余的 2000 个离散纤维角度场及其对应的节点位移解作为测试集 T，本例中的节点位移解由 ABAQUS 商用软件求解获得，计算时采用 ABAQUS 商用软件单元库中的 S4R 单元，ABAQUS 软件中的网格划分采用均匀划分，网格的密度为 32×32 个单元，共 33×33 个节点，本例中研究的变刚度纤维铺层弹性板 P 的边界条件如图 2 所示，本例中研究的变刚度纤维铺层弹性板 P 的尺寸为：板 P 为正方形板，长和宽均为 100mm，即 $OA=OB=100\text{mm}$ ，板厚度为 0.125mm，板 P 的材料属性为：纤维方向的弹性模量 $E_1=126000\text{MPa}$ ，垂直于纤维方向的弹性模量为 $E_2=11000\text{MPa}$ ，1-2 面内的泊松比 $\nu_{12}=0.28$ ；1-2 面内的剪切模量为 $G_{12}=6600\text{MPa}$ ，板 P 的边界条件为：固定板 P 的左边 OA 和下边 OB，并对上边 BC 施加向上的线载荷 F1 和向右的线载荷 F3，对右边 AC 施加向右的线载荷 F2 和向上的线载荷 F4， $F1=5 \text{ N/mm}$ ， $F3=5x \text{ N/mm}$ ， $F2=5 \text{ N/mm}$ ， $F4=5y \text{ N/mm}$ ；

本实施例中，测试集随机抽样 5 个样本展示图如图 4 所示，其中，5 个样本以五列展示，每一列是一个样本，其中，第一行为 5 个样本的纤维路径展示，第二行为 5 个样本的纤维角度场（单位：rad），第三行为神经算子对 5 个样本的位移节点解的 x 分量预测（单位：mm），

第四行为 5 个样本位移节点解的 x 分量的标签（单位：mm），第五行为神经算子对 5 个样本的位移节点解的 x 分量预测绝对值误差（单位：mm），第六行为神经算子对 5 个样本的位移节点解的 y 分量预测（单位：mm），第七行为 5 个样本位移节点解的 y 分量的标签（单位：mm），第八行为神经算子对 5 个样本的位移节点解的 y 分量预测绝对值误差（单位：mm）。

步骤 104：将上一步骤抽样的 2005 个离散纤维角度场排除出数据集 D ，得到包含 12000 个离散纤维角度场的无标签集 U 作为训练集；

步骤 105：设定记录迭代次数的变量 i ，并设置其值为 0，将无标签集 U 分为 12000 个批次的离散纤维角度场样本，每个批次的大小为 1；

步骤 106：对边界条件进行编码，形成形状为 (1, 33, 33, 2) 的边界条件掩码张量 M ，在 M 当中，位置对应于被约束的节点自由度的 M 元素被设为 0，其余元素被设为 1；

步骤 200：使用神经算子模块 F ， F 包含两个相同设置的隐式傅里叶神经算子 (Implicit Fourier neural operator, IFNO)，每个隐式傅里叶神经算子负责一个位移分量的预测，每个傅里叶神经算子的设置如图 3 所示，预测无标签集 U 中离散纤维角度场样本所对应形状为 $32 \times 32 \times 2$ 的节点位移，进一步根据节点位移得到离散化的泛函作为系统泛函的估计，包括以下子步骤：

步骤 201：不放回地抽取无标签集 U 中一批离散纤维角度场样本 s ，如果所有的批次都被抽出，变量 i 自增 1，判断对神经算子的训练过程是否达到算法收敛条件，如果收敛，则输出神经算子的权重 θ ，并执行步骤 304，否则，打乱无标签集 U ，并将打乱后的无标签集 U 重新分为 12000 个批次，从第一个批次重新抽取、训练；其中，所述的收敛条件是 i 达到训练的最大迭代次数，本实施例中训练的最大迭代次数为 500；

步骤 202：将离散纤维角度场样本 s 输入神经算子模块 F 进行推理，利用掩码张量 M 对 F 输出的张量 $F(s)$ 进行掩码操作，得到节点位移解 a ，如式 (1.2) 所示；

$$a = F(s) \odot M \quad (1.2)$$

步骤 203：使用偏移集 L 内所有标签的均值张量 mean 和标准差张量 std ，对节点位移 a 进行偏移处理；

$$a = a \odot \text{std} + \text{mean} \quad (1.3)$$

步骤 204：对节点位移 a 进行卷积操作，得到在高斯点处的解及其空间导数；

步骤 205：利用张量操作处理高斯点处的解和空间导数求得泛函被积函数在高斯点处的值；

步骤 206：使用高斯积分法，根据泛函的被积函数在高斯点处的值，求得离散化的泛函 Π ，如式 (1.4) 所示；

$$\tilde{\Pi} = \sum_e \Pi^e \approx \frac{1}{2} \sum_e \sum_{l=1}^{n_g} H_l a^{eT} B_l^T D_l B_l a^e |J_l^e| - \sum_e \sum_{l=1}^{n_g} H_l a^{eT} N_l^T f_l |J_l^e| - \sum_e \sum_{m=1}^{n_{S_f^e}} \sum_{l=1}^{n_m} I_{ml} a^{eT} N_{ml}^T \bar{X}_{ml} |J_{ml}^{S_f^e}| \quad (1.4)$$

其中， $\mathbf{a}^e$ 代表每个单元的节点位移，下标“ l ”在单元内第 l 个积分点处取值， $\mathbf{N}$ 代表形函数矩阵， $\mathbf{B}$ 代表应变-位移矩阵， $\mathbf{D}$ 代表材料属性阵， $\mathbf{J}^e$ 代表单元的雅克比矩阵， $\mathbf{f}$ 代表体力， $\bar{\mathbf{X}}$ 代表面力， H_l ， I_{ml} 分别代表在单元内第 l 个积分点的权重和第 m 个单元边界的第 1 个积分点的权重。

步骤 300：对离散化的泛函 $\tilde{\Pi}$ 施加变分操作，具体的：计算泛函估计 $\tilde{\Pi}$ 关于节点位移 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$ ，并将其范数作为最小化目标，采用基于方程组的迭代法获取当前节点位移的更新步长 $\Delta\mathbf{a}$ ，并利用 $\Delta\mathbf{a}$ 更新神经算子模块 F 的权重 θ ，包括以下子步骤：

步骤 301：利用自动微分技术，对泛函估计 $\tilde{\Pi}$ 进行反向传播，记录泛函估计 $\tilde{\Pi}$ 对节点位移 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$ ，如式 (1.5) 所示，并将 $\mathbf{R}$ 的范数作为最小化目标：

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.5)$$

步骤 302：将梯度 $\mathbf{R}$ 输入共轭梯度法，共轭梯度法运行两个迭代步，得到当前的节点位移的更新步长 $\Delta\mathbf{a}$ ；

步骤 303：基于随机梯度下降法，利用 $\Delta\mathbf{a}$ 对神经算子的权重 θ 进行更新，学习率设为 1，之后返回执行步骤 201；

步骤 304：将神经算子模块 F 在测试集 T 上进行推理，并选取测试集指标为平均相对 2-范数误差，如式 (1.6) 所示：

$$\text{Metric} = \frac{1}{2000} \sum_{i=1}^{2000} \frac{\|\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{a}}\|_2} \quad (1.6)$$

本实施例神经算子网络各个层功能描述与超参数设置如表 1 所示：

表 1

	特征层		反卷积层		提升层		傅里叶层		投影层		
功能描述	对离散角度场进行特征变换将单通道的离散角度场 θ 变为如下4通道： $\sin \theta$ $\cos \theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta$		调整特征图尺寸		通过线性变换调整通道数		在频域中进行特征变换和学习		通过线性层A+GELU激活函数+线性层B进行通道调整		
网络超参数设置	输入通道数	1	核尺寸	2×2	输入通道数	4	输入模态数	16	线性层A		
			填充	0					输入通道数	32	
	输出通道数	4	步长	1	转换模态数	16	输出通道数	128			
			输入通道数	4					线性层B		
			输出通道数	4			输出通道数	32		输入通道数	32
输出通道数	1										

第二方面，一种计算机可读存储介质，包括指令，当指令其在计算机上运行时，使得计算机执行如第一方面任意一项的方法。

第三方面，一种包含指令的计算机程序产品，当其在计算机上运行时，使得计算机执行第一方面任意一项的方法。

针对现有基于数据驱动的训练神经算子方法与传统求解器的不足，本发明提出了基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品。复合材料在航空航天、体育装备、汽车制造等行业应用广泛，变刚度复合材料更是因其能通过纤维路径优化设计实现力学承载性能的最大化，而在轻量化设计中受到青睐。变角度纤维铺层是变刚度复合材料的基本组成部分，实现变角度纤维铺层的力学响应的批量实时分析对加速变刚度复合材料的优化设计具有重要意义。本发明实施例 1 面向各向异性的变角度纤维铺层仿真，在偏移集 L 仅使用 5 个标签、训练集完全无标签的情况下，在容量为 2000 的测试集上达到了 2.93%的平均相对 2-范数误差，已达到纯粹数据驱动的训练误差水平，从而证明了本发明能够应用于变角度纤维铺层的力学响应的批量实时、低成本高效能的仿真分析。由于没有使用数据驱动的训练误差项，本发明可以节省生成用于构建数据驱动误差项所需的大量标签的时间与算力，并且将求解偏微分方程组和训练神经算子两个任务统一在一个框架内完成，为下游应用如优化设计、反问题等

提供有力支持。

实施例 2

第一方面, 本发明提供基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法, 包括以下步骤:

步骤 100: 研究含变化热源矩形区域 P 的传热问题, 区域尺寸和边界条件见步骤 103, 对热源抽样形成无标签的仅含离散的热源场数据集 D , 进一步将数据集 D 划分为偏移集 L , 测试集 T 和无标签集 U , 将无标签集 U 分为多个批次, 对边界条件进行编码, 形成边界条件的掩码张量, 包括以下子步骤:

步骤 101: 选定热源场的形式为高斯随机场:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &\sim \mathcal{GP}\left(0, k_l(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\right) \text{ W/m}^2 \\ k_l(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \sigma e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2}{2l^2}} \text{ W/m}^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中, $l = \frac{1}{2}, \sigma = 1$, 抽样策略选为简单随机抽样;

步骤 102: 对所研究含变化热源矩形区域 P , 选择单元为平面 4 节点的双线性单元, 网格设置采用均匀的网格划分, 网格划分密度为 30×30 个单元, 共 31×31 个节点, 并对热源场进行简单随机抽样和离散化, 抽样的数目为 12010 个, 从而形成无标签的仅含离散热源场的数据集 D , 其中, 热源场在网格的高斯点处进行离散, 离散的热源场形状为 $30 \times 30 \times 1$;

步骤 103: 从数据集 D 随机抽样 2010 个离散的热源场, 求解这 2010 个离散的热源场对应的偏微分方程组的节点温度解, 并将其中前 10 个离散的热源场及其对应的节点温度解标签作为偏移集 L , 剩余的 2000 个离散的热源场及其对应的节点温度解标签作为测试集 T , 本例中的节点温度解标签由 COMSOL 商用软件求解获得, 计算时采用 COMSOL 商用软件单元库中的平面 4 节点的双线性单元, COMSOL 软件中的网格划分采用均匀划分, 网格划分密度为 30×30 个单元, 共 31×31 个节点, 本例中研究的含变化热源矩形区域 P 的边界条件如图 5 所示, 本例中, 区域 P 长和宽均为 1m, 即 $OA=OB=1\text{m}$, 区域 P 的四个边界均设为温度为 0°C 的狄利克雷边界条件;

本实施例中, 测试集随机抽样 5 个样本展示图如图 6 所示, 其中, 5 个样本以五列展示, 每一列是一个样本, 其中, 第一行为 5 个样本的热源场 (单位: W/m^2), 第二行为神经算子对 5 个样本的温度节点解 (单位: $^\circ\text{C}$), 第三行为 5 个样本温度节点解标签 (单位: $^\circ\text{C}$), 第四行为神经算子对 5 个样本的温度节点解的预测绝对值误差 (单位: $^\circ\text{C}$);

步骤 104: 将上一步骤抽样的 2010 个离散的热源场排除出数据集 D , 得到包含 10000 个离

散的热源场的无标签集 U 作为训练集；

步骤 105：设定记录迭代次数的变量 i ，并设置其值为 0，将无标签集 U 分为 157 个批次离散的热源场样本，其中 156 个批次的大小为 64，最后 1 个批次大小为 16；

步骤 106：对边界条件进行编码，形成形状为 (1, 31, 31, 1) 的边界条件掩码张量 $\mathbf{M}$ ，在 $\mathbf{M}$ 当中，位置对应于被约束的节点自由度的 $\mathbf{M}$ 元素被设为 0，其余元素被设为 1；

步骤 200：使用神经算子模块 F ， F 包含一个隐式傅里叶神经算子 (Implicit Fourier neural operator, IFNO)，负责温度的预测，预测无标签集 U 中离散的热源场样本所对应形状为 $31 \times 31 \times 1$ 的节点温度，进一步根据节点温度得到离散化的泛函作为系统泛函的估计，包括以下子步骤：

步骤 201：不放回地抽取无标签集 U 中一批离散纤维角度场样本 s ，如果所有的批次都被抽出，变量 i 自增 1，判断对神经算子的训练过程是否达到算法收敛条件，如果收敛，则输出神经算子的权重 θ ，并执行步骤 304，否则，打乱无标签集 U ，并将打乱后的无标签集 U 重新分为 157 个批次，其中 156 个批次的大小为 64，最后 1 个批次大小为 16，从第一个批次重新抽取、训练；其中，所述的收敛条件是 i 达到训练的最大迭代次数，本实施例中训练的最大迭代次数为 5000；

步骤 202：将离散的热源场样本 s 输入神经算子模块 F 进行推理，利用掩码张量 $\mathbf{M}$ 对 F 输出的张量 $F(s)$ 进行掩码操作，得到节点温度解 $\mathbf{a}$ ，如式 (1.2) 所示：

$$\mathbf{a} = F(s) \odot \mathbf{M} \quad (1.2)$$

步骤 203：使用偏移集 L 内所有标签的均值张量 mean 和标准差张量 std ，对节点温度 $\mathbf{a}$ 进行偏移处理：

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \odot \text{std} + \text{mean} \quad (1.3)$$

步骤 204：对节点温度 $\mathbf{a}$ 进行卷积操作，得到在高斯点处的解及其空间导数；

步骤 205：利用张量操作处理高斯点处的解和空间导数求得泛函被积函数在高斯点处的值；

步骤 206：使用高斯积分法，根据泛函的被积函数在高斯点处的值，求得离散化的温度泛函 $\tilde{\Pi}$ ；

步骤 300：对离散化的温度泛函 $\tilde{\Pi}$ 施加变分操作，具体的：计算泛函估计 $\tilde{\Pi}$ 关于节点温度 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$ ，并将其范数作为最小化目标，采用基于方程组的迭代法获取当前节点温度的更新步长 $\Delta \mathbf{a}$ ，并利用 $\Delta \mathbf{a}$ 更新神经算子模块 F 的权重 θ ，包括以下子步骤：

步骤 301：利用自动微分技术，对泛函估计 $\tilde{\Pi}$ 进行反向传播，记录泛函估计 $\tilde{\Pi}$ 对节点温度 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$ ，如式 (1.5) 所示，并将 $\mathbf{R}$ 的范数作为最小化目标：

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.4)$$

步骤 302：将梯度 $\mathbf{R}$ 输入共轭梯度法，共轭梯度法运行两个迭代步，得到当前的节点温度的更新步长 $\Delta \mathbf{a}$ ；

步骤 303：基于随机梯度下降法，利用 $\Delta \mathbf{a}$ 对神经算子的权重 θ 进行更新，学习率设为 $1e-5$ ，之后返回执行步骤 201；

步骤 304：将神经算子模块 F 在测试集 T 上进行推理，并选取测试集指标为平均相对 2-范数误差，如式 (1.6) 所示：

$$\text{Metric} = \frac{1}{2000} \sum_{i=1}^{2000} \frac{\|\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{a}}\|_2} \quad (1.5)$$

第二方面，一种计算机可读存储介质，包括指令，当指令其在计算机上运行时，使得计算机执行如第一方面任意一项的方法。

第三方面，一种包含指令的计算机程序产品，当其在计算机上运行时，使得计算机执行第一方面任意一项的方法。

针对现有基于数据驱动的训练神经算子方法与传统求解器的不足，本发明提出了基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法、介质及产品。传热问题广泛存在于各类工程技术领域，如能源动力、冶金、化工、交通、建筑建材、机械以及食品、轻工、纺织、医药等传统工业，以及航空航天、核能、微电子、材料、生物医学工程、环境工程、新能源以及农业工程等很多高新技术领域。对传热现象进行准确实时批量仿真，可以帮助我们更好地理解 and 掌握传热现象，从而更好地应用于实际生产和生活中。例如，可以用于模拟和优化工业生产过程中的传热现象，提高生产效率和产品质量；可以用于模拟和优化建筑物的传热现象，提高建筑物的节能性能；可以用于模拟和优化电子设备的传热现象，提高电子设备的散热性能等。本发明实施例 2 在研究含变化热源的矩形区域 $\mathbf{P}$ 的传热问题中，在偏移集 $\mathbf{L}$ 仅使用 10 个标签、训练集完全无标签的情况下，在容量为 2000 的测试集上实现了仅 2.20% 的平均相对 2-范数误差，已达到纯粹数据驱动的训练误差水平，从而证明本发明能够应用于传热现象的准确实时批量仿真。由于没有使用数据驱动的训练误差项，本发明可以节省生成用于构建数据驱动误差项所需的大量标签的时间与算力，并且将求解偏微分方程组算子和训练神经算子两个任务统一在一个框架内完成，为下游应用如优化设计、反问题等提供有力支持。

最后应说明的是：以上各实施例仅用以说明本发明的技术方案，而非对其限制；尽管参照前述各实施例对本发明进行了详细的说明，本领域的普通技术人员应当理解：其对前述各实施例所记载的技术方案进行修改，或者对其中部分或者全部技术特征进行等同替换，并不使相应技术方案的本质脱离本发明各实施例技术方案的范围。

权 利 要 求 书

1.一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，其特征在于，包括以下步骤：

步骤 100：从偏微分方程组的参数空间中抽样形成无标签的仅含离散参数场的数据集 D ，将数据集 D 划分为偏移集 L 、测试集 T 和无标签集 U ，将无标签集 U 分为多个批次，对边界条件进行编码，形成边界条件的掩码张量；

步骤 200：使用神经算子模块 F 预测无标签集 U 中离散参数场样本的节点解，根据节点解得到离散化的泛函作为系统泛函的估计；

步骤 300：对离散化的泛函施加变分操作构建优化目标，计算泛函估计 Π 关于节点解 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$ ，并将其范数作为最小化目标，采用基于方程组的迭代法获取当前节点解的更新步长 $\Delta \mathbf{a}$ ，并利用 $\Delta \mathbf{a}$ 更新神经算子模块 F 的权重 θ 。

2.根据权利要求 1 所述的一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，其特征在于，所述的步骤 100 子步骤为：

步骤 101：选定偏微分方程组的参数空间的形式和抽样策略；

步骤 102：对偏微分方程组的求解域进行网格划分，并按照步骤 101 选定的抽样策略对偏微分方程组的参数空间进行抽样，对抽样得到的参数场在网格的高斯点处离散化，形成无标签的仅含离散参数场的离散参数场数据集 D ；

步骤 103：从离散参数场数据集 D 随机抽样出 (N_1+N_2) 个离散参数场，求解这 (N_1+N_2) 个离散参数场对应的偏微分方程组的节点解，并将其中前 N_1 个离散参数场及其对应的节点解作为偏移集 L ，剩余的 N_2 个离散参数场及其对应的节点解作为测试集 T ，其中，偏移集 L 用于对输出的范围进行偏移；

步骤 104：将上一步骤抽样的 (N_1+N_2) 个离散参数场排除出数据集 D ，形成无标签集 U 作为训练集；

步骤 105：设定记录迭代次数的变量 i ，并设置其值为 0，将无标签集 U 分为若干批次的离散参数场样本；

步骤 106：对边界条件进行编码，形成形状和节点解相同的边界条件的掩码张量 $\mathbf{M}$ ，在 $\mathbf{M}$ 当中，位置对应于被约束的节点自由度的 $\mathbf{M}$ 元素被设为 0，其余元素被设为 1。

3.根据权利要求 2 所述的一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，其特征在于，所述的步骤 200 子步骤为：

步骤 201：不放回地抽取无标签集 U 中一批离散纤维角度场样本 s ，如果所有的批次都被抽出，变量 i 自增 1，判断对神经算子的训练过程是否达到算法收敛条件，如果收敛，则输出神经算子的权重 θ ，并执行步骤 304，否则，打乱无标签集 U ，并将打乱后的无标签集 U 重新分

为若干个批次，并从第一个批次开始重新进行抽取、训练；其中，所述的收敛条件可以是 i 达到训练的最大迭代次数或者神经算子的推理精度已达到精度要求；

步骤 202：将样本 s 输入神经算子模块 F 进行推理，利用掩码张量 $\mathbf{M}$ 对 F 输出的张量 $F(s)$ 进行掩码操作，得到节点解 $\mathbf{a}$ ，如式 (1.1) 所示；

$$\mathbf{a} = F(s) \odot \mathbf{M} \quad (1.1)$$

式 (1.1) 中， $\odot$ 代表张量之间进行元素积，下同；

步骤 203：使用偏移集 L 内所有标签的均值 mean 和标准差 std ，对节点解 $\mathbf{a}$ 进行偏移处理：

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \odot \text{std} + \text{mean} \quad (1.2)$$

步骤 204：对节点解 $\mathbf{a}$ 进行卷积操作，得到在高斯点处的解及其空间导数；

步骤 205：利用张量操作处理高斯点处的解及其空间导数，求得泛函被积函数在高斯点处的值；

步骤 206：使用高斯积分法，根据泛函被积函数在高斯点处的值，求得离散化的泛函估计 Π 。

4. 根据权利要求 3 所述的一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，其特征在于，所述的步骤 300 子步骤为：

步骤 301：利用自动微分方法，对泛函估计 Π 进行反向传播，记录泛函估计 Π 对节点解 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathbf{R}$ ，并将其范数作为最小化目标；

步骤 302：将梯度 $\mathbf{R}$ 输入基于方程组的迭代法，得到当前的节点解的更新步长 $\Delta \mathbf{a}$ ；

步骤 303：使用 $\Delta \mathbf{a}$ 对神经算子的权重 θ 进行更新，并返回执行步骤 201；

步骤 304：将神经算子模块 F 在测试集 T 上进行推理，并统计测试集指标。

5. 根据权利要求 3 所述的一种基于变分原理的面向神经算子训练与偏微分方程组求解的统一方法，其特征在于，所述的步骤 202 中，神经算子模块 F 为单个神经算子或多个神经算子的组合。

6. 一种计算机可读存储介质，其特征在于，包括指令，当指令其在计算机上运行时，使得计算机执行如权利要求 1-5 任意一项所述的统一方法。

7. 一种包含指令的计算机程序产品，其特征在于，当其在计算机上运行时，使得计算机执行如权利要求 1-5 任意一项所述的统一方法。

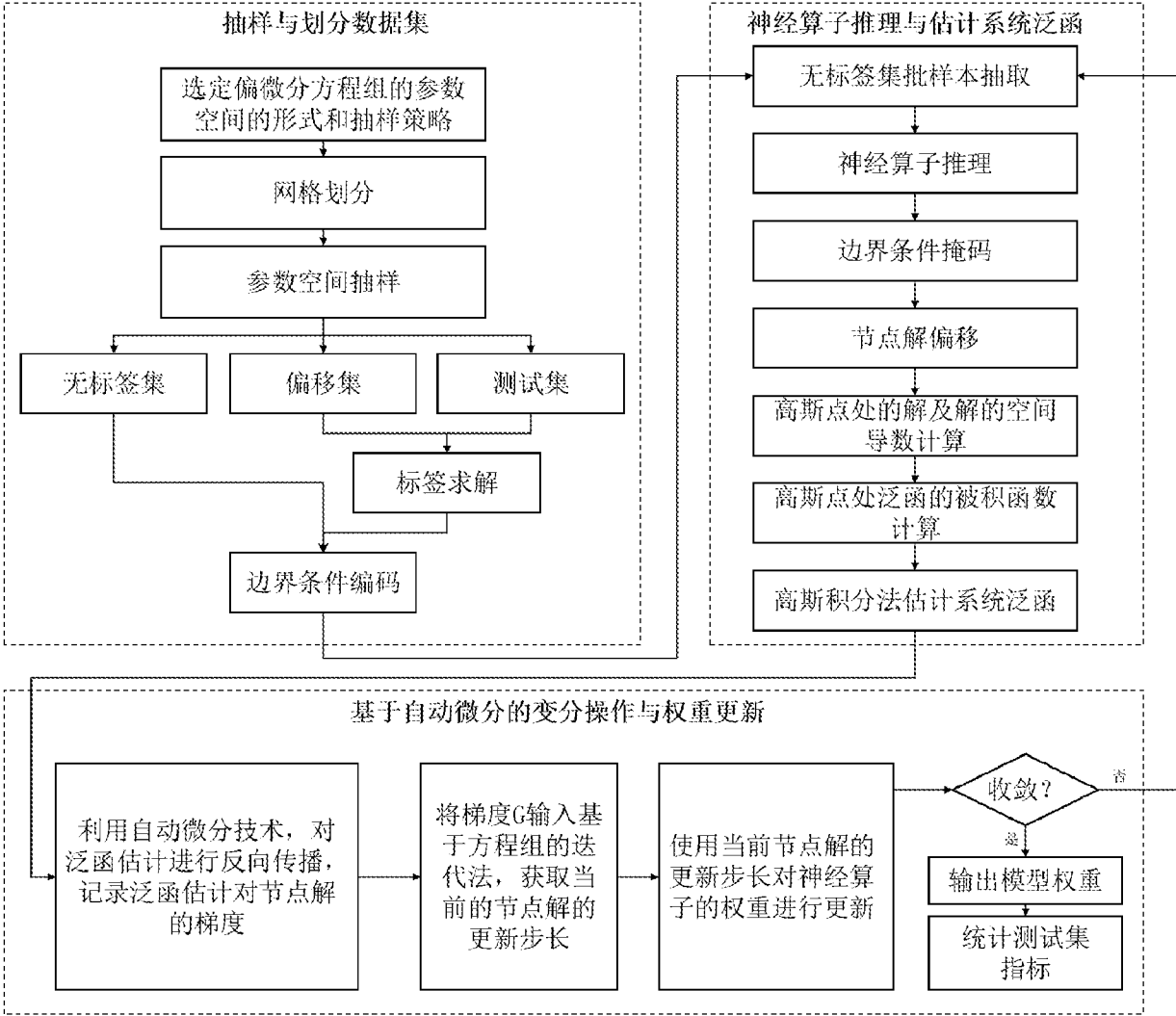


图 1

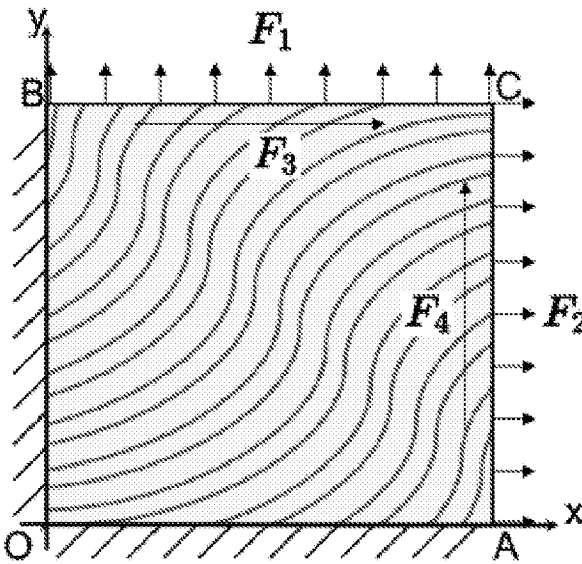


图 2

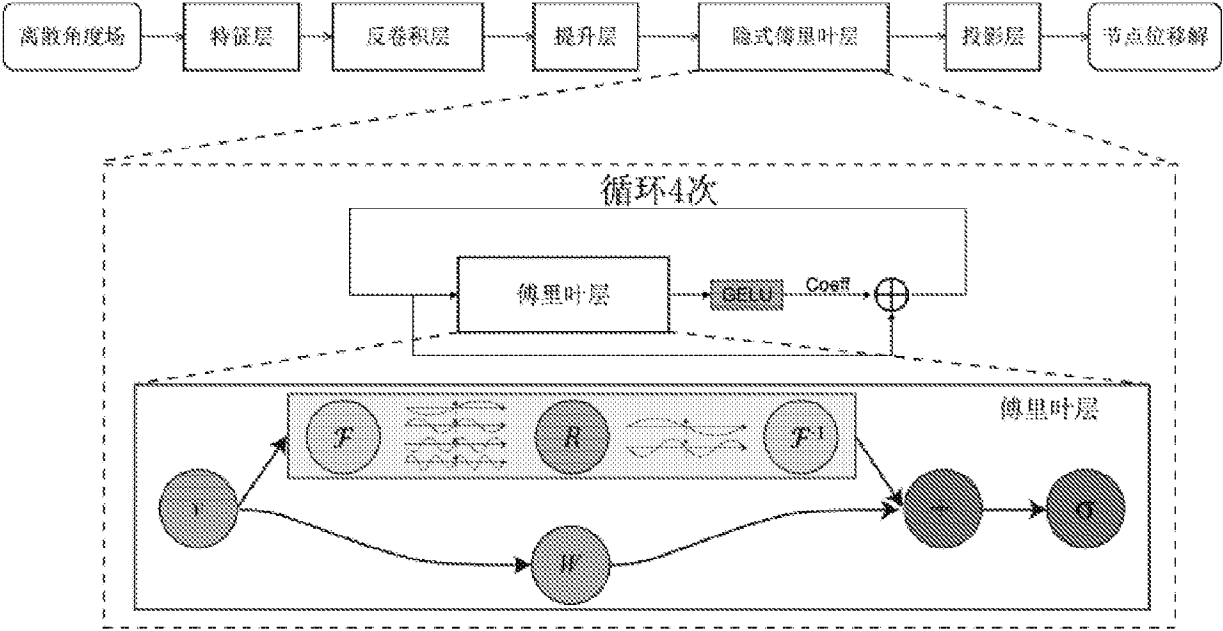


图 3

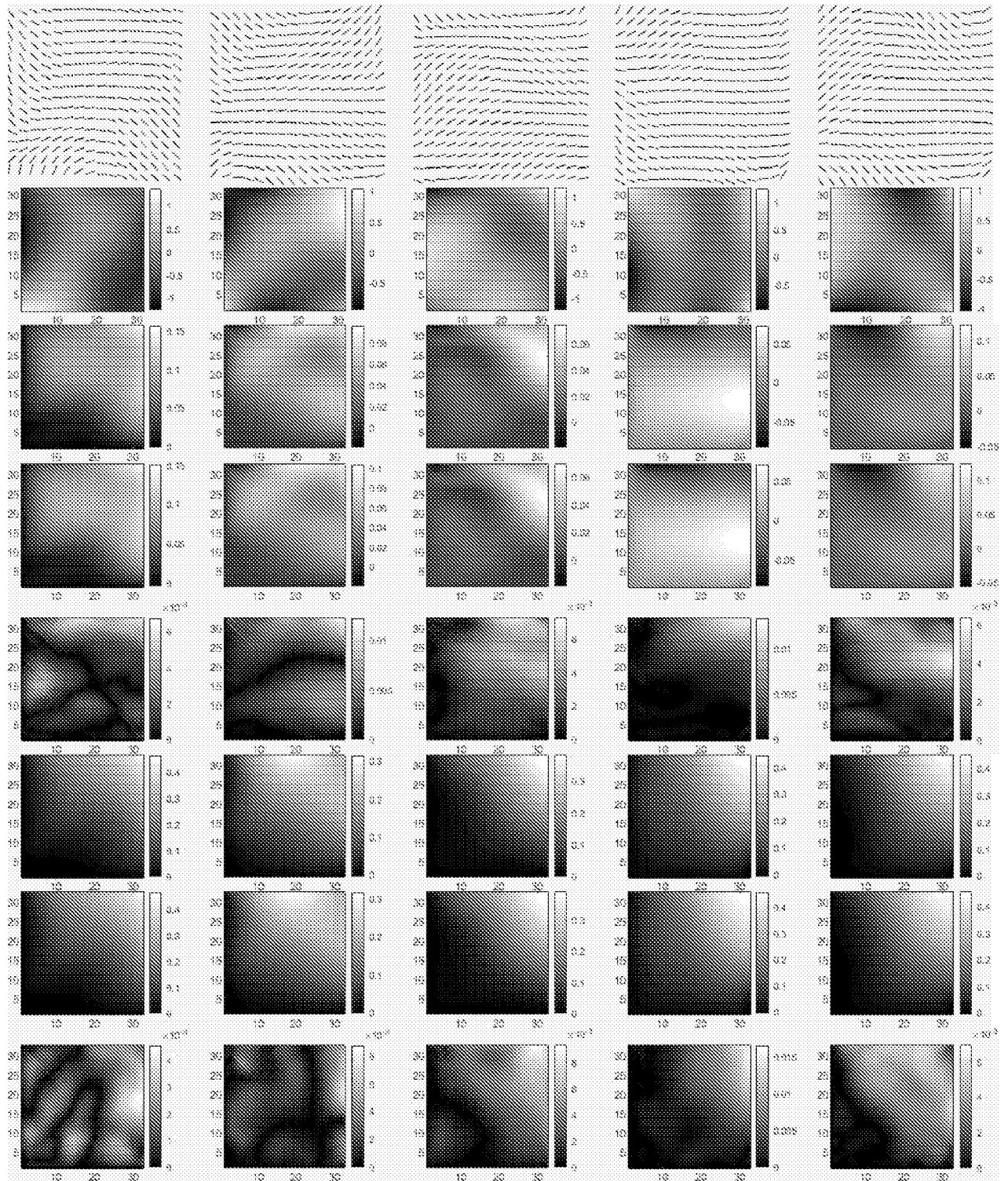


图 4

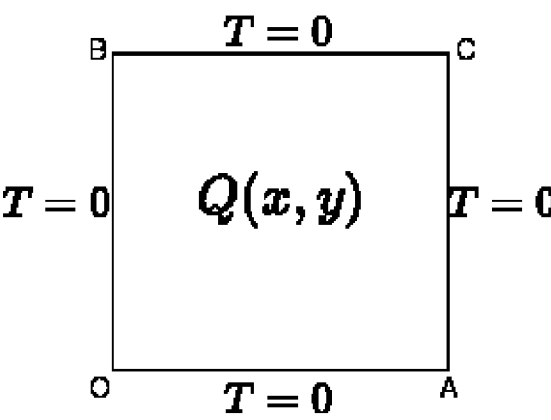


图 5

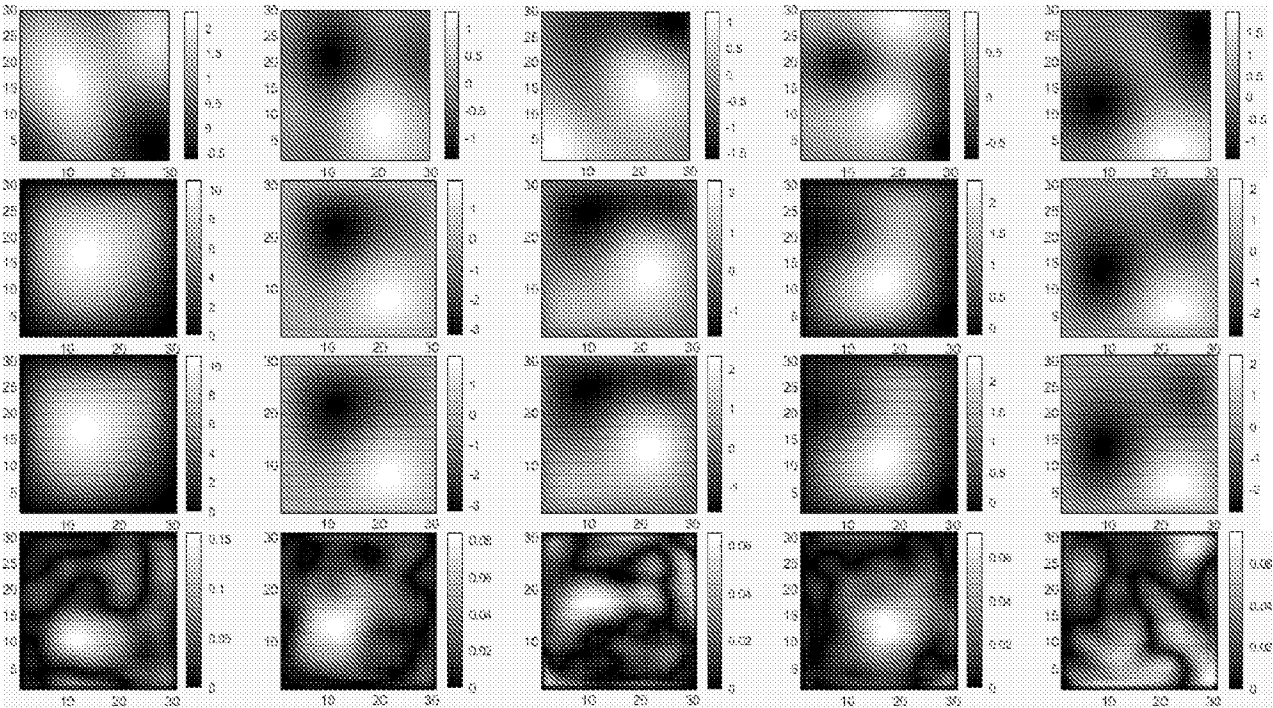


图 6

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.

PCT/CN2024/070340

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

G06N 3/088(2023.01)i

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

IPC: G06N

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

VEN, CNABS, CNTXT, WOTXT, USTXT, CNKI, IEEE: 偏微分, 无标签, 离散, 泛函, 优化目标, 梯度, PDE, 神经算子, 抽样, 变分, discrete, functional, optimization object?, gradient, neural operator?, variational

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
PX	CN 116468104 A (DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY) 21 July 2023 (2023-07-21) claims 1-7	1-7
A	CN 114444012 A (SOUTHEAST UNIVERSITY) 06 May 2022 (2022-05-06) description, paragraphs 52-98, and figure 1	1-7
A	US 2016070023 A1 (THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA) 10 March 2016 (2016-03-10) entire document	1-7
A	WO 2021184466 A1 (PEKING UNIVERSITY) 23 September 2021 (2021-09-23) entire document	1-7
A	WO 2022062164 A1 (PEKING UNIVERSITY) 31 March 2022 (2022-03-31) entire document	1-7
A	LI, Zongyi et al. "Fourier Neural Operator for Parametric Partial Differential Equations" <i>arXiv:2010.08895</i> , 18 October 2020 (2020-10-18), entire document	1-7



Further documents are listed in the continuation of Box C.



See patent family annex.

* Special categories of cited documents:

“A” document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

“D” document cited by the applicant in the international application

“E” earlier application or patent but published on or after the international filing date

“L” document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

“O” document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

“P” document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

“T” later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

“X” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

“Y” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art

“&” document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

29 March 2024

Date of mailing of the international search report

03 April 2024

Name and mailing address of the ISA/CN

China National Intellectual Property Administration (ISA/
CN)
China No. 6, Xitucheng Road, Jimenqiao, Haidian District,
Beijing 100088

Authorized officer

Telephone No.

INTERNATIONAL SEARCH REPORT
Information on patent family members

International application No.
PCT/CN2024/070340

Patent document cited in search report			Publication date (day/month/year)	Patent family member(s)			Publication date (day/month/year)
CN	116468104	A	21 July 2023	None			
CN	114444012	A	06 May 2022	None			
US	2016070023	A1	10 March 2016	WO	2014172787	A1	30 October 2014
				EP	3033689	A1	22 June 2016
				EP	3033689	A4	24 May 2017
				EP	3033689	B1	15 September 2021
WO	2021184466	A1	23 September 2021	None			
WO	2022062164	A1	31 March 2022	None			

国际检索报告		国际申请号 PCT/CN2024/070340
A. 主题的分类 G06N 3/088(2023.01)i 按照国际专利分类(IPC)或者同时按照国家分类和IPC两种分类		
B. 检索领域 检索的最低限度文献(标明分类系统和分类号) IPC: G06N 包含在检索领域中的除最低限度文献以外的检索文献 在国际检索时查阅的电子数据库(数据库的名称, 和使用的检索词(如使用)) VEN, CNABS, CNTXT, WOTXT, USTXT, CNKI, IEEE: 偏微分, 无标签, 离散, 泛函, 优化目标, 梯度, PDE, 神经算子, 抽样, 变分, discrete, functional, optimization object?, gradient, neural operator?, variational		
C. 相关文件		
类型*	引用文件, 必要时, 指明相关段落	相关的权利要求
PX	CN 116468104 A (大连理工大学) 2023年7月21日 (2023 - 07 - 21) 权利要求1-7	1-7
A	CN 114444012 A (东南大学) 2022年5月6日 (2022 - 05 - 06) 说明书第52-98段以及附图1	1-7
A	US 2016070023 A1 (THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA) 2016年3月10日 (2016 - 03 - 10) 全文	1-7
A	WO 2021184466 A1 (PEKING UNIVERSITY) 2021年9月23日 (2021 - 09 - 23) 全文	1-7
A	WO 2022062164 A1 (PEKING UNIVERSITY) 2022年3月31日 (2022 - 03 - 31) 全文	1-7
A	Li Zongyi等. "Fourier Neural Operator for Parametric Partial Differential Equations" 《arXiv:2010.08895》, 2020年10月18日 (2020 - 10 - 18), 全文	1-7
☐ 其余文件在C栏的续页中列出。 ☒ 见同族专利附件。		
★ 引用文件的具体类型: “A” 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件 “D” 申请人在国际申请中引证的文件 “E” 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利 “L” 可能对优先权要求构成怀疑的文件, 或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件(如具体说明的) “O” 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件 “P” 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件 “T” 在申请日或优先权日之后公布, 与申请不相抵触, 但为了理解发明之理论或原理的在后文件 “X” 特别相关的文件, 单独考虑该文件, 认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性 “Y” 特别相关的文件, 当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时, 要求保护的发明不具有创造性 “&” 同族专利的文件		
国际检索实际完成的日期 2024年3月29日		国际检索报告邮寄日期 2024年4月3日
ISA/CN的名称和邮寄地址 中国国家知识产权局 中国北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 100088		授权官员 张敏姣 电话号码 (+86) 010-53961803

国际检索报告
关于同族专利的信息

国际申请号
PCT/CN2024/070340

检索报告引用的专利文件			公布日 (年/月/日)	同族专利			公布日 (年/月/日)
CN	116468104	A	2023年7月21日	无			
CN	114444012	A	2022年5月6日	无			
US	2016070023	A1	2016年3月10日	WO	2014172787	A1	2014年10月30日
				EP	3033689	A1	2016年6月22日
				EP	3033689	A4	2017年5月24日
				EP	3033689	B1	2021年9月15日
WO	2021184466	A1	2021年9月23日	无			
WO	2022062164	A1	2022年3月31日	无			