(19) OFICINA ESPAÑOLA DE PATENTES Y MARCAS

ESPAÑA

(11) Número de publicación: **2 315 396**

(51) Int. Cl.:
G06T 5/50 (2006.01)

(12) TRADUCCIÓN DE PATENTE EUROPEA T3

(96) Número de solicitud europea: **02765146 .2**
(96) Fecha de presentación : **07.06.2002**
(97) Número de publicación de la solicitud: **1397782**
(97) Fecha de publicación de la solicitud: **17.03.2004**

(54) Título: **Restitución de imágenes utilizando una metodología estrictamente determinística para generar una secuencia tosca de puntos de muestra.**

(30) Prioridad: **07.06.2001 US 297139 P**

(45) Fecha de publicación de la mención BOPI:
01.04.2009

(45) Fecha de la publicación del folleto de la patente:
01.04.2009

(73) Titular/es: **Mental Images GmbH**
Fasanenstrasse 81
10623 Berlin, DE

(72) Inventor/es: **Abramov, Juri**

(74) Agente: **Elzaburu Márquez, Alberto**

Aviso: En el plazo de nueve meses a contar desde la fecha de publicación en el Boletín europeo de patentes, de la mención de concesión de la patente europea, cualquier persona podrá oponerse ante la Oficina Europea de Patentes a la patente concedida. La oposición deberá formularse por escrito y estar motivada; sólo se considerará como formulada una vez que se haya realizado el pago de la tasa de oposición (art. 99.1 del Convenio sobre concesión de Patentes Europeas).

Venta de fascículos: Oficina Española de Patentes y Marcas. Pº de la Castellana, 75 – 28071 Madrid

DESCRIPCIÓN

Restitución de imágenes utilizando una metodología estrictamente determinística para generar una secuencia tosca de puntos de muestra.

Campo de la invención

La invención se refiere generalmente al campo de los gráficos de ordenador, y más particularmente a los sistemas y métodos para generar valores de píxeles para los píxeles de una imagen que se restituyen usando secuencias de baja discrepancia estrictamente determinísticas para proporcionar puntos de muestra a fin de generar estimaciones de los valores de las integrales que representan los valores de los píxeles.

Antecedentes de la invención

En los gráficos de ordenador, se usa un ordenador para generar datos digitales que representan la proyección de las superficies de los objetos, por ejemplo en una escena tridimensional, iluminada por una o varias fuentes de luz, sobre una imagen plana bidimensional, a fin de simular el registro de la escena, por ejemplo mediante una cámara. La cámara puede incluir una lente para proyectar la imagen de la escena sobre el plano de la imagen, o puede comprender una cámara de microorificio, en cuyo caso no se usa lente alguna. La imagen bidimensional tiene la forma de un conjunto de elementos de imagen (los cuales son denominados indistintamente "píxeles" o "Pels"), y los datos generados para cada píxel representan el color y la luminancia de la escena tal como se proyecta sobre el plano de la imagen en el punto del píxel respectivo en el plano de la imagen. Las superficies de los objetos pueden tener cualquier número de tipos de características, incluyendo forma, color, especularidad, textura, etc., que son restituidos en la imagen lo más próximamente posible, para proporcionar una imagen de aspecto realista.

Por lo general, las contribuciones de la luz reflejada en los diversos puntos de la escena al valor del píxel que representa el color y la intensidad de un píxel concreto se expresan en forma de una o varias integrales de funciones relativamente complicadas. Puesto que las integrales usadas en los gráficos de ordenador generalmente no tendrán una solución de forma cerrada, se debe usar métodos numéricos para evaluarlas y de esta forma generar el valor del píxel. Típicamente, se ha usado un método de "Monte Carlo" convencional en los gráficos de ordenador para evaluar numéricamente las integrales. Generalmente, en el método de Monte Carlo, para evaluar una integral

$$\langle f \rangle = \int_{[0,1)^s} f(x)\,dx \qquad (1)$$

donde f(x) es una función real sobre el cubo unitario "s"-dimensional (es decir, un cubo de s dimensiones que incluye "cero", y excluye "uno"), un primer número "N" de puntos estadísticamente independientes colocados aleatoriamente x_i, i=1, ...; N, se generan sobre el dominio de integración. Los puntos aleatorios x_i se usan como puntos de muestra para los cuales se generan los valores de muestra $f(x_i)$ para la función f(x), y se genera una estimación $\bar{f}$ para la integral como

$$\langle f \rangle \approx \bar{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad (2)$$

Conforme aumenta el número de puntos aleatorios usados para generar los puntos de muestra $f(x_i)$, el valor de la estimación $\bar{f}$ convergirá hacia el valor real de la integral (*f*). Generalmente, la distribución de valores estimados que se generará para los diversos valores de "N", esto es, para los diversos números de puntos de muestra, de ser normalmente distribuidos alrededor del valor real con una desviación típica que puede ser estimada por

$$\sigma(\bar{f}) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\overline{f^2} - \bar{f}^2\right)} \qquad (3)$$

si los puntos x_i usados para generar los valores de muestra $f(x_i)$ son estadísticamente, esto es, si los puntos x_i están verdaderamente colocados en forma aleatoria en el dominio de integración.

Generalmente, se ha considerado que las metodologías aleatorias como el método de Monte Carlo son necesarias para garantizar que los artefactos no deseables como los modelos de Moiré y la distorsión por repliegue y similares, que no están en escena no sean generados en la imagen generada. Sin embargo, surgen varios problemas del uso del método de Monte Carloen los gráficos de ordenador. En primer lugar, puesto que los puntos de muestra usados en el método de Monte Carlo están distribuidos de forma aleatoria, pueden acumularse en diversas regiones en el dominio

sobre el cual debe evaluarse la integral. Por consiguiente, dependiendo del conjunto de puntos que se generen, en el método de Monte Carlo para porciones significativas del dominio puede no haber puntos de muestra x_i para los cuales se generan valores de $f(x_i)$. En ese caso, el error puede hacerse bastante grande. En el contexto de generar un valor de píxel en los gráficos de ordenador, el valor del píxel que se genera realmente usando el método de Monte Carlo puede no contener los mismos elementos que de otra forma pueden estar contenidos si se garantizara que los puntos de muestra x_i estuvieran distribuidos de forma más uniforme sobre el dominio. Este problema puede ser aliviado en cierto modo dividiendo el dominio en una pluralidad de subdominios, pero generalmente es difícil determinar *a priori* el número de subdominios en los cuales se debería dividir el dominio, y adicionalmente, en un dominio de integración multidimensional, la partición del dominio de integración en subdominios puede resultar bastante complicada.

Adicionalmente, puesto que el método hace uso de números aleatorios, el error $|\bar{f} - (f)|$ (en el que $|x|$ representa el valor absoluto del valor "x") entre el valor estimado $\bar{f}$ y el valor real (*f*) es probabilística, y puesto que los valores de error para los diversos valores grandes de "N" están próximos a la distribución normal alrededor del valor real (*f*), sólo el sesenta y ocho por ciento de los valores estimados $\bar{f}$ que pueden ser generados está garantizado que queden dentro de una desviación típica del valor real (*f*).

Además, como está claro a partir de la ecuación (3), la desviación típica disminuye al aumentar el número "N" de puntos de muestra, proporcionalmente al inverso de la raíz cuadrada de "N" (esto es, $^1/_{\sqrt{N}}$). De esta forma, si se desea reducir el error estadístico por un factor dos, será necesario aumentar el número de puntos de muestra N según un factor cuatro, lo cual a su vez, aumenta la carga de ordenador que se requiere para generar los valores de los pixeles, para cada uno de los numerosos pixeles de la imagen.

Adicionalmente, puesto que el método de Monte Carlo requiere números aleatorios para definir las coordenadas de los puntos de muestra respectivos x_i en el dominio de integración, se necesita un mecanismo eficiente para generar números aleatorios. Generalmente, los ordenadores digitales están provistos de los llamados generadores de "números aleatorios", los cuales son programas de ordenador que pueden ser procesados para generar un conjunto de números que sean aproximadamente aleatorios. Puesto que los generadores de números aleatorios usan técnicas determinísticas, los números que se generan no son auténticamente aleatorios. Sin embargo, se debería mantener la propiedad de que los números aleatorios subsiguientes procedentes de un generador de números aleatorios sean estadísticamente independientes por aplicaciones determinísticas de los números pseudoaleatorios en un ordenador.

La solicitud de Grabenstein describe un sistema de gráficos de ordenador y un método para generar los valores de pixeles correspondientes a los pixeles de una imagen usando una metodología estrictamente determinística para generar puntos de muestra, lo cual evita los problemas anteriormente descritos con el método de Monte Carlo. La metodología estrictamente determinística descrita en la solicitud e de Grabenstein proporciona una secuencia de puntos de muestra de baja discrepancia que garantiza *a priori* que los puntos de muestra estén generalmente distribuidos más uniformemente a través de la región sobre la cual se están evaluando las integrales respectivas. En una realización descrita en la solicitud de Grabenstein, se usan los puntos de muestra en base a una así llamada secuencia de Halton. Véase, por ejemplo la publicación, J. H. Halton, Numerische Mathematik, tomo 2, págs. 84-90 (1960) y W.H. Press y otros, Recetas Numéricas en Fortran (2ª Edición) página 300 (Cambridege University Press, 1992). En una secuencia de Halton generada para el número de base "b", en la que la base "b" es un número primo seleccionado, el valor i-ésimo de la secuencia, representado por H_b' se genera utilizando una función radical inversa Φ_b que se define generalmente como

$$\begin{aligned} \Phi_b : N_0 &\rightarrow I \\ i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^j &\mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^{-j-1} \end{aligned} \qquad (4)$$

donde $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ es la representación de "i" en la base entera "b". Generalmente se genera un inverso del radical de un valor "k"

(1) escribiendo el valor "i" como una representación numérica del valor en la base "b" seleccionada, para proporcionar de esta forma una representación del valor como $D_M D_{M-1} ... D_2 D_1$, donde D_m (m =1, 2, ..., M) son los dígitos de la representación,

(2) poniendo un punto de raíz (que corresponde a un punto decimal para los números escritos en la base diez) en el extremo menos significativo de la representación $D_M D_{M-1} ... D_2 D_1$ escrita en la etapa (1) anterior,

(3) reflejando los dígitos alrededor del punto de raíz para proporcionar $0.D_1 D_2 ... D_{M-1} D_M$, que corresponde a H_b'.

Se apreciará que con independencia de la base "b" seleccionada para la representación, para cualquier serie de valores, uno, dos, ... "k", escrita en la base "b", los valores menos significativos de la representación cambiará a una tasa más rápida que los números más significativos. Como resultado, en la secuencia de Halton H_b^1, H_b^2, ...H_b^i, los

dígitos más significativos cambiarán a una tasa más rápida, de modo que los valores 'primitivos de la secuencia se distribuirán generalmente de manera amplia sobre el intervalo de cero a uno, y los valores posteriores de la secuencia llenarán los intersticios entre los valores primitivos de la secuencia. A diferencia de los números aleatorios o pseudoaleatorios usados en el método de Monte Carlo como se describe anteriormente, los valores de la secuencia de Halton son estadísticamente más independientes; por el contrario, los valores de la secuencia de Halton son estrictamente deterministicos, "evitándose al máximo" cada uno al otro sobre el intervalo, y de esta manera no se acumularán, mientras que los números aleatorios o pseudoaleatorios usados en el método de Monte Carlo pueden acumularse.

Se apreciará que la secuencia de Halton según se describe anteriormente proporciona una secuencia de valores sobre el intervalo de cero a uno, inclusive a lo largo de una única dimensión. Se puede generar una secuencia multidimensional de manera similar, pero usando una base diferente para cada dimensión.

Como se indica a continuación, se genera una secuencia de Halton diferente, de la cual la secuencia de Halton anteriormente descrita es un caso especial. Para cada punto de arranque a lo largo del intervalo numérico de cero a uno, inclusive, se genera una secuencia multidimensional de Halton diferente. Definiendo la suma pseudoaleatoria $x \oplus_D y$ para cada x e y sobre un intervalo de cero a uno, inclusive, para cualquier número entero "p" que tenga un valor mayor de dos, la pseudosuma se forma añadiendo los dígitos que representan "x" e "y" en orden inverso, desde el dígito más significativo al dígito menos significativo, y agregando también para cada suma en el arrastre generado de la suma de los dígitos siguientes más significativos. De este modo, si "x" en base "b" se representa por $0.X_1X_2...X_{M-1}X_M$, donde cada "X_m" es un dígito en base "b", y si se representa "y" en base "b" por $0.Y_1Y_2...Y_{N-1}Y_N$, donde cada "Y_n" es un dígito en la base "b" (y donde "M", el número de dígitos de la representación de "x" en base "b", puede diferir), entonces la pseudosuma "z" se representa por $0.Z_1Z_2...Z_{L-1}Z_L$, donde cada "Z_i" es un dígito en la base "b" dado por $Z_1 = (X_1 + Y_1 + C_1) \text{mod } b$, donde "mod" representa el módulo de la función, y $C_l = \begin{cases} 1 \text{ para } X_{l-1} + Y_{l-1} + Z_{l-1} \geq b \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$ en caso contrario es un valor arrastrado de la posición del dígito I-I-ésimo, poniendo C en cero.

Usando la función de pseudosuma como se describe anteriormente, la secuencia de Saltón generalizada que se usa en el sistema descrito en la solicitud de Grabenstein se genera de la forma siguiente. Si "b" es un número entero, y x_0 es un valor arbitrario del intervalo de cero a uno, inclusive, entonces el valor correspondiente a "p" de la transformación de Neumann-Kakutani T_b (x) viene dado por

$$T_p(x) := x \oplus_p \frac{1}{b} \qquad (5),$$

y la secuencia de Halton generalizada se define recurrentemente como

$$x_{n+1} = T_b(x_n) \qquad (6)$$

A partir de las ecuaciones (5) y (6), está claro que, para cualquier valor de "b", la secuencia de Halton generalizada puede proporcionar que se genere una secuencia diferente para cada valor inicial de "x", esto es, para cada x_0. Se apreciará que la secuencia de Halton H_b^1 tal como ha sido descrita anteriormente es un caso especial de la secuencia de Halton generalizada (ecuaciones (5) y (6)) para $x_0 = 0$.

La solicitud de Keller describe también un sistema de gráficos de ordenador y un método para generar valores de pixeles en una imagen usando una metodología estrictamente determinística, en este caso usando conjuntos de puntos de Hammersley s-dimensionales. Los conjuntos de puntos de Hammersley s-dimensionales se definen como

$$U_{N,s}^{Hammersley} : \{0, \cdots, N-1\} \rightarrow I^s$$
$$i \mapsto x_i := \left(\frac{i}{N}, \Phi_{b_1}(i), \cdots, \Phi_{b_{s-1}}(i) \right) \qquad (7),$$

donde I^S es el cubo unidad (0, 1) s-dimensional, el número de puntos "N" en el conjunto es fijo y $\Phi_{bx}(i)$ es el inverso radical de "i" en base b_x, para las bases b_1, ., b_{s-1} como puntos de muestra. Las bases no tienen por que ser números primos, pero se prefiere que sean relativamente primos para proporcionar una distribución relativamente uniforme.

Adicionalmente, la solicitud de Keller describe también el uso de un conjunto de puntos de Hammersley dispersos para reducir o eliminar un problema que puede surgir en relación con las secuencias de baja discrepancia y alto número de dimensiones. Típicamente, la función Φ_b radical inversa tiene subsecuencias de b-1 valores equidistantes espaciados 1/b, las cuales pueden resultar de modelos de correlación. Aunque estos modelos de correlación pueden ser meramente perceptibles en el espacio s-dimensional completo, no son deseables puesto que propenden a la aleatorización. La

solicitud de Keller describe una metodología de una permutación en los dígitos de la representación b-aria utilizada para la inversión del radical. Para una permutación σ de un grupo simétrico S_b sobre los números enteros 0,..., b-1, el inverso radical aleatorizado se define como

$$\Phi_b : N_0 \times S_b \rightarrow I$$
$$(i,\sigma) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \sigma\left(a_j(i)\right) b^{-j-1} \Leftrightarrow i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^j \qquad (8).$$

Si la permutación "σ" es la identidad, el inverso radical aleatorizado corresponde al inverso radical no aleatorizado. En una realización, la permutación σ se define de manera recurrente como sigue. Comenzando a partir de la permutación $\sigma_2 = (0,1)$ para la base b=2, la secuencia de permutaciones se define como sigue:

(i) si la base "b" es par, la permutación σ_b se genera tomando en primer lugar los valores $2\,\sigma_{b/2} + 1$, y

(ii) si la base "b" es impar, la permutación σ_b se genera tomando los valores de σ_{b+1}, incrementando cada valor que sea mayor o igual de (b-1)/2 en uno, e insertando el valor b-1 en el centro.

Este procedimiento recurrente da lugar a las permutaciones siguientes:

$$\sigma_2 = (0,1)$$
$$\sigma_3 = (0,1,2)$$
$$\sigma_4 = (0,2,1,3)$$
$$\sigma_5 = (0,3,2,1,4)$$
$$\sigma_6 = (0,2,4,1,3,5)$$
$$\sigma_7 = (0,2,5,3,1,4,6)$$
$$\sigma_8 = (0,4,2,6,1,5,3,7)\ldots.$$

Por consiguiente, dado el inverso radical de un valor "i" en la base "b", si el dígito "k-ésimo" de la representación para el inverso radical tiene un valor "j", el dígito "k-ésimo" del radical inverso aleatorizado tiene el valor correspondiente al dígito"j-ésimo" de la permutación σ_b anterior. El uso del inverso radical aleatorizado, que puede ser aplicado a la secuencia de Halton y a otras de baja discrepancia, así como al conjunto de puntos de Hammersley, reduce o elimina los modelos de correlación anteriormente descritos.

El uso de una secuencia estrictamente determinística de baja discrepancia puede proporcionar cierto número de ventajas sobre los números aleatorios o pseudoaleatorios que se usan en relación con la técnica de Monte Carlo. A diferencia de los números aleatorios usados en relación con la técnica de Monte Carlo, las secuencias de baja discrepancia garantizan que los puntos de muestra estén distribuidos de manera más uniforme sobre una región o intervalo de tiempo respectivo, reduciendo de esta manera el error en la imagen que puede resultar de la acumulación de los puntos de muestra de este tipo que puede tener lugar en la técnica de Monte Carlo. Eso facilita la generación de imágenes de calidad mejorada cuando se usa el mismo número de puntos de muestra al mismo costo informático que con la técnica de Monte Carlo. Sin embargo, pueden surgir problemas si se desea generar una imagen usando una pluralidad de procesadores operando en paralelo, puesto que generalmente será deseable asegurar que cada uno de los procesadores haga uso de una secuencia de baja discrepancia en sus operaciones de procesamiento.

Las secuencias de integración quasi-Monte Carlo (t, s), Schmid W. C.; Uhl A; Computación Paralela, 4ª Conferencia Internacional ACPC que incluye Vías Especiales de Numérica Paralela (PaeNum '99) y Computación Paralela en el Procesamiento de Imágenes, Procesamiento de Vídeo y Multimedia, 18-19 de febrero de 1999, Salzburgo, Austria, describe la partición de una secuencia de baja discrepancia en subsecuencias interrelacionadas $X_i, X_{i+p_i}, X_{i+2p_i}, \ldots, X_{i+lp}$ para la paralelización de la integración quasi-Monte Carlo usando unas secuencias (t, s) y como la paralización de la rana saltadora "puede resultar muy peligrosa" mientras que la paralelización basada en bloques propende a ser robusta.

El documento Investigaciones computacionales sobre las secuencias de baja discrepancia, Krocis, L; Whiten W, J CCM Transactions on Mathmatical Software, Junio 1997, ACM, EEUU, XP00191443 describe secuencias de Halton, Sobol y Feure y las construcciones de Braaten de la secuencia de Halton generalizada que evalúa su aplicabilidad en la integración quasi-Monte Carlo con un gran número de variables. Se sugiere una modificación de la secuencia de

Halton (la secuencia de Halton con saltos) y una nueva construcción de la secuencia de Halton generalizada para un número no restringido de dimensiones y se muestra que mejoran considerablemente la secuencia de Halton original. Se identifican los problemas asociados con la estimación del error en la integración quasi-Monte Carlo y en la selección de funciones de ensayo.

El documento Métodos quasi-Monte Carlo en Gráficos de Ordenadores, Parte II. La Ecuación de la Radicancia, Stefan Heinrich, Alexander Keller; Fachbereich Informatik, AG Numerische Algorithmen, Universität Kaiserlautern, kellernformatik.uni.kl.de, Informe Técnico 243/94, Kaiserlautern, Alemania, describe un sistema de gráficos de ordenador que tiene las características de los preámbulos de las reivindicaciones 1 y 4, respectivamente. La presente invención está caracterizada por las propiedades de las partes caracterizantes de estas reivindicaciones y, en un aspecto adicional, por las propiedades de la reivindicación 9.

Resumen de la invención

La invención proporciona un sistema y un método para generar valores de píxeles para los píxeles de una imagen que están siendo restituidos usando unas secuencias estrictamente determinísticas de baja discrepancia para proporcionar unos puntos de muestra para generar estimaciones de los valores de las integrales que representan los valores de los píxeles, siendo generadas las secuencias estrictamente determinísticas de baja discrepancia de manera tal que el sistema puede realizar las operaciones de procesamiento usando una pluralidad de procesadores que operan en paralelo.

Haciendo un breve resumen, en un aspecto la invención proporciona un sistema mejorado y un método para generar puntos de muestra que pueden generar los puntos de muestra en paralelo. Los puntos de muestra se pueden usar para procesar en paralelo, con los resultados recogidos subsiguientemente y usados según sea necesario para las operaciones de restitución subsiguientes. De acuerdo con la invención, los puntos de muestra se generan usando la secuencia de Halton gruesa, la cual hace uso de los valores inversos radicales $\Phi_b^{i,M}(j)$ en la forma siguiente:

$$\Phi_b^{i,M}(j) = \Phi_b(jM+i) \qquad (9),$$

donde "b" es preferiblemente un número primo, pero no un divisor de "M", e "i" es un número entero. Usando esta definición, la secuencia gruesa de Halton s-dimensional, que se puede usar para definir los puntos de muestra a usar en la evaluación de integrales se define como:

$$U_s^{CHalt,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j)\right) \qquad (10),$$

donde $b_1,\ldots,b_2$ son los primeros "s" números que no son divisores de "M". Cada valor de "i" define una subsecuencia que es una secuencia de baja discrepancia, y por tanto puede ser utilizada en relación con el procesamiento. De manera similar, la unión de todas las subsecuencias para todos los valores de "i" entre "cero" y "M+1" es también una secuencia de baja discrepancia, de manera que se pueden recoger los resultados de procesamiento usando las secuencias de Halton gruesas para todos los valores tales de "i" y usarlos de la misma manera que si los resultados hubieran sido generados usando una secuencia de Halton para definir los puntos de muestra.

Breve descripción de los dibujos

Esta invención queda definida particularmente en las reivindicaciones anexas. Se puede entender mejor lo anterior y las ventajas adicionales de esta invención haciendo referencia a la descripción siguiente tomada conjuntamente con los dibujos anexos, en los cuales:

la Fig. 1 representa a título ilustrativo un sistema de gráficos de ordenador construido de acuerdo con la invención; y

la Fig. 2 es un diagrama de flujo que representa las operaciones realizadas por el sistema de gráficos de ordenador representado en la Fig. 1 de acuerdo con esta invención.

Descripción detallada de una realización ilustrativa

La invención proporciona un sistema de gráficos de ordenador y un método para generar valores de píxeles correspondientes a los píxeles de una imagen de una escena, el cual hace uso de una metodología estrictamente determinística para generar puntos de muestra para evaluar la integral o integrales cuya función(ones) representa la las contribuciones

de la luz reflejada desde los diversos puntos de la escena al valor de píxel respectivo, en vez de la metodología aleatoria o pseudoaleatoria de Monte Carlo que ha sido usada en el pasado. La metodología estrictamente determinística garantiza *a priori* que los puntos de muestra estarán distribuidos por lo general de manera más uniforme sobre el intervalo o la región sobre la cual la(s) integral(es) se evalúan de una manera de baja discrepancia.

La Fig. 1 aquí anexa representa un sistema ilustrativo de ordenador 10 que hace uso de una metodología estrictamente determinística de este tipo. Haciendo referencia a la Fig. 1, el sistema de ordenador 10 de una realización incluye un módulo 11 de procesador y unos elementos de interfaz que comprenden unos componentes de introducción de operador tales como un teclado 12A y/o un ratón 12B (generalmente identificado(s) como elemento(s) de introducción de operador (12)) y un elemento de salida a operador tal como un dispositivo de monitor de vídeo 13. El sistema de ordenador 10 ilustrativo es de una arquitectura de ordenador con programas almacenados de tipo convencional. El módulo procesador 11 incluye, por ejemplo, uno o varios dispositivos de procesador, memoria y almacenamiento masivo, tales como elementos de almacenamiento en disco y/o cinta (no mostrados por separado), los cuales realizan las operaciones de procesamiento y almacenamiento en relación con los datos digitales que se proporcionan a los mismos. Si el módulo de procesador 11 incluye una pluralidad de dispositivos procesadores, se pueden configurar los respectivos dispositivos procesadores para procesar diversas porciones, de una única tarea, en paralelo, en cuyo caso la tarea se puede ejecutar con mayor rapidez que de otra forma. El (Los) elemento(s) de introducción de operador 12 se proporciona(n) para permitir a un operador introducir información para su procesamiento. El dispositivo monitor de vídeo 13 se proporciona para presentar la información de salida generada por el módulo 11 de procesador en una pantalla 14 al operador, incluyendo datos que pueda introducir el operador para controlar el procesamiento, así como la información generada durante el procesamiento. El módulo de procesador 11 genera información para su presentación en pantalla por parte del dispositivo de monitor de vídeo 13 usando una así denominada "interfaz de gráficos de usuario" (GUI), en la cual se presenta la información correspondiente a los diversos programas usando diversas "ventanas". Aunque se muestra el sistema 10 de ordenador como comprendiendo componentes concretos, tales como el teclado 12A y el ratón 12B para recibir la información de introducción procedente de un operador, y un dispositivo de monitor de vídeo 13 para presentar la información de salida al operador, se apreciará que el sistema de ordenador 10 puede incluir una variedad de componentes adicionalmente a los representados en la Fig. 1 o en lugar de los mismos.

Adicionalmente, el módulo de procesador 11 incluye uno o varios puertos de red, generalmente identificados por un número de referencia 14, los cuales se conectan a unos enlaces de comunicación los cuales conectan el sistema de ordenador 10 a una red informática. Los puertos de la red permiten al sistema de ordenador 10 transmitir información a otros sistemas de ordenador y otros dispositivos de la red y recibir información de los mismos. En una red típica, organizada, por ejemplo, según el paradigma cliente-servidor, ciertos sistemas informáticos de la red son designados como servidores, los cuales almacenan datos y programas (generalmente "información") para su procesamiento por los otros, sistemas informáticos clientes, para de esta forma permitir a los sistemas informáticos compartir la información de manera conveniente. Un sistema informático cliente que necesite acceder a la información mantenida en un servidor concreto permitirá al servidor descargar la información sobre la red. Después de procesar los datos, el sistema informático cliente puede también devolver los datos procesados al servidor para su almacenamiento. Adicionalmente, a los sistemas informáticos, (que incluyen los servidores y clientes anteriormente descritos), una red puede incluir también, por ejemplo, impresoras y dispositivos de fax, dispositivos de almacenamiento de audio y vídeo digitales y dispositivos de distribución, etc., los cuales pueden ser compartidos entre los diversos sistemas informáticos conectados a la red. Los enlaces de comunicación que interconectan los sistemas informáticos en la red pueden comprender, tal como es convencional, cualquier medio portador de información conveniente, incluyendo cables, fibras ópticas u otros medios para portar las señales entre los sistemas informáticos. Los sistemas informáticos transfieren información a por la red mediante mensajes transferidos sobre los enlaces de comunicación, incluyendo cada mensaje la información y un identificador que señala el dispositivo que debe recibir el mensaje.

De acuerdo con la invención, el sistema de gráficos de ordenador proporciona una disposición que puede facilitar la realización en paralelo de la restitución de la imagen, de tal manera que las operaciones que se incluyen en una restitución de imagen se pueden procesar por una pluralidad de procesadores en paralelo, lo cual puede acelerar la restitución de una imagen. Esto se describirá en relación con una faceta de la restitución de imágenes, en particular la emisión de fotones, aunque se apreciará que la metodología se puede extender a otras facetas. Como se observa anteriormente, la solicitud de Grabenstein describe un sistema de gráficos de ordenador y un método para generar valores de pixeles para los pixeles de una imagen usando una metodología estrictamente determinística, en la cual se usan múltiples puntos de muestra en una así llamada secuencia de Halton. De acuerdo con este aspecto de la invención, el sistema 10 de gráficos de ordenador hace uso de lo que aquí se ha llamado una distribución de Halton gruesa, que se define de la forma siguiente. Si $\Phi_p(j)$ es el inverso radical de "j", dado un número entero "M" y un segundo número entero "i", la secuencia de Halton gruesa hace uso de los valores de inverso radical gruesos $\Phi_b^{i,M}(j)$ como sigue:

$$\Phi_b^{i,M}(j) = \Phi_b(jM+i) \qquad (11),$$

donde la base “b” es preferiblemente un número primo, pero no un divisor de “M”. usando esta definición, la secuencia de Halton s-dimensional gruesa, que se puede usar para definir los puntos de muestra para su uso en la evaluación de integrales, se define como:

$$U_s^{CHal,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j)\right) \qquad (12),$$

donde $b_1,\ldots,b_s$ son los “s” primeros números que no son divisores de “M”, es decir, que son relativamente primos con respecto a “M”.

El sistema 10 de gráficos de ordenador puede hacer uso también de una secuencia gruesa de Halton aleatorizada usando las permutaciones σ tal como se han definido anteriormente. En ese caso, los valores inversos gruesos aleatorizados $\Phi_b^{i,M}(j, \sigma_b)$ son como sigue:

$$\Phi_b^{i,M}(j,\sigma_b) = \Phi_b(jM+i,\sigma_b) \qquad (13),$$

donde σ_b es la permutación para la base respectiva “b” como se describe anteriormente en relación con la solicitud de Keller. Usando esta definición, la secuencia de Halton s-dimensional gruesa aleatorizada $U_s^{CSHal,i,M}$ se define como:

$$U_s^{CSHal,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j,\sigma_{b_1}),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j,\sigma_{b_s})\right) \qquad (14).$$

En la siguiente descripción se hará generalmente referencia a la secuencia de Halton s-dimensional gruesa $U_s^{CHal,i,M}$, aunque se podría reconocer que cabe utilizar en vez de ella la secuencia de Halton gruesa s-dimensional aleatorizada $U_s^{CSHal,i,M}$.

La secuencia de Halton s-dimensional gruesa $U_s^{CHal,i,M}$ y la secuencia de Halton s-dimensional gruesa aleatorizada $U_s^{CSHal,i,M}$ para los distintos valores de “i” son subsecuencias esencialmente aritméticas de las secuencias de Halton y de Halton aleatorizada en las que no se incluyen inversos radicales en las bases “b” que dividan “M”. Las secuencias tanto de Halton como de Halton aleatorizada son secuencias de baja discrepancia, con una discrepancia que es similar a la que presenta una secuencia de Halton como la anteriormente descrita. El carácter deseable de retirar las bases que dividen de forma par a “M” se puede ilustrar en el ejemplo siguiente. Se considera que tanto “M” como “b” son ambos iguales a dos y que la secuencia de Halton es unidimensional. En ese caso, la subsecuencia que se asocia con valores pares de “i” en la secuencia gruesa de Halton cuyos valores están comprendidos en el intervalo (0, ½) y la subsecuencia que está asociada con los valores impares de “i” es una secuencia gruesa de Halton cuyos valores están comprendidos en el intervalo (½, 1) y de esta manera ninguna subsecuencia presentará características de baja discrepancia sobre todo el intervalo (0,1). Por otra parte, si “M” es igual a tres, la base “b” es igual a dos, las subsecuencias que están asociadas con los valores pares e impares de “i” son secuencias gruesas de Halton cuyos valores están comprendidos en el intervalo (0, 1), y no se producirá ninguna acumulación en porción alguna del intervalo. Además, puesto que cada subsecuencia está asociada con un valor de “i” diferente, la metodología puede asegurar que todas las subsecuencias son disjuntas, es decir, que no habrá dos subsecuencias que tengan el mismo valor, si el valor de “i” es inferior al valor de “M”. Además, si los valores de “i” que se usan para generar las subsecuencias incluyen todos los números enteros de “cero” a M-1, la unión de tales subsecuencias es a su vez una secuencia de baja discrepancia.

El uso de la secuencia de Halton s-dimensional gruesa $U_s^{CHal,i,M}$ facilita el procesamiento en paralelo de diversas facetas de la restitución de la imagen, puesto que cada subsecuencia, asociada con un valor respectivo de “i”, es a su vez una secuencia de baja discrepancia sobre un cubo dimensional unidad $(0, 1)^s$ particularmente si las subsecuencias se generan de manera que la unión de todas las subsecuencia de este tipo sea a su vez una secuencia de baja discrepancia, lo cual, como se observó anteriormente, puede garantizarse si los valores de “i” incluyen todos los valores enteros comprendidos entre “cero” y M-1. Se describirá esto en relación con una faceta de la restitución de imágenes, en particular, la emisión de fotones, aunque se apreciará que el uso de la secuencia de Halton gruesa $U_s^{CHal,i,M}$ puede resultar útil en conexión con el procesamiento en paralelo de otras facetas. Puesto que la subsecuencias se pueden generar de tal manera que todas ellas resultan disjuntas, el sistema 10 de gráficos de ordenador puede realizar la emisión de fotones en “M” tareas en paralelo, utilizándose “i” como un índice para identificar la tarea “i-ésima”. Una vez se han ejecutado todas las tareas para emitir fotones hasta que se ha almacenado el número “N” deseado, el sistema 10 de gráficos de ordenador puede recoger y usar los resultados de todas las tareas, puesto que no hay dos fotones que tengan las mismas características de emisión. El Segmento 1 de Código es un segmento ilustrativo de código de programa, en el lenguaje de programación C.

Segmento 1 de Código

```
(1) vaciar emitphotons_all(
(2)        int  M,          /* número de tareas paralelas propuesto
(3)        int N            /* número aproximado de fotones a guardar */
            )
            {
(4)             int M_act;      /número real de tareas paralelas */
(5)             M_act=M         /*fijar inicialmente el número real de trabajos en
                                paralelo para que sea igual al número propuesto */
                                /* aumentar el número real de trabajos en paralelo
                                hasta que no sea divisible
                                por los "m" primeros números primos; aquí m=4*/
(6a)                mientras  (M_act % 2 == 0 || M_act % 3 == 0 || M_act % 5 == 0 || M_act % 7 =
0)
(6b)                M_act++;
            }
(7)         ejecutar en paralelo emit_photon_part (i, N/M_act, M_act) para
            i=0,...,M_act-I
(8)    recoger los resultados

(9)    vaciar emit_photons_part

(10)        int i,          /*"i" se usa como índice de trabajo*/
(11)        int N,          /* número real de fotones a guardar en el trabajo
                              "i- ésimo",
                            Igual a N/M_act argumento en la línea (7)
(12)        int M           /*paso de la secuencia aritmética a utilizar,
                            Igual a M_act argumento en línea (7)
            )
            {
(13a)                       emitir fotones hasta guardar N (valor de la línea (11))

(13b)                       la subsecuencia  U_s^{CHal,i,M}  como puntos de muestra
            }
```

La secuencia emit_photons_all, que comprende las líneas (1) a (8) a través de (8) en el Segmento de Código I, permite al sistema 10 de gráficos de ordenador almacenar todos los fotones que se van a guardar durante una operación de restitución en conexión con al menos una porción de una imagen a restituir. La secuencia emit_photons_all, hace uso de la secuencia emit_photons_part en esa operación. la secuencia emit_photons_part se realiza sobre un cierto número de tareas, correspondiendo el número a un valor M_act "real" que se determina en las líneas (2) a 6b). Las tareas se pueden realizar en paralelo por los procesadores respectivos que se proporcionan por el módulo 11 de procesador.

Generalmente, en las líneas (2) a (6b) de la secuencia emit_photons_all, el número de trabajos se determina estableciendo el número más bajo que no es divisible por los primeros "m" números primos, donde "m" es un número seleccionado. En el Segmento de Código I ilustrativo, el valor de "m" se ha seleccionado de forma que sea "cuatro", siendo los valores de los "m" números primos asociados "dos", "tres", "cinco" y "siete". Se usa el valor de "m" junto con el valor de "M", un número de trabajos propuesto, que se inicializa en la línea (2), para determinar un valor "M_act", el cual corresponde al número real de trabajos en el cual se debe ejecutar emit_photons_part. El valor escogido para el número propuesto de trabajos "M" puede ser "uno", o cualquier otro valor conveniente, y puede ser corresponder con el número de procesadores en el módulo 11 de procesadores o ser una fracción del mismo. El valor de M_act se determina en las líneas (6a y (6b). En el Segmento 1 de código, el valor de M_act se incrementará hasta que alcance el menos valor que no sea divisible por los "m" primeros números primos. Por consiguiente, si el valor de "m" es "cuatro", y el número propuesto de trabajos "M" en la línea (2) tiene cualquier valor entre "uno" y "once", se determinará que el valor del número real de trabajos "M_act" sea "once", puesto que es el menor número que no es divisible por los primeros cuatro números primos. Por otra parte, si el valor del número de trabajos propuestos "M" de la línea (2) es "veinte", se determinará que el valor del número real de trabajos M_act sea "veintitrés", puesto que este es el menor número mayor de veinte que no es divisible por los primeros cuatro números primos. Se puede seleccionar el valor de "m" por cualquiera de cierto número de criterios. En una realización, se selecciona el valor "m" de forma que sea suficientemente pequeño para que preferiblemente "M_act" no difiera de "M", puesto que el valor de "m" se puede seleccionar de forma que sea al menos el número de dimensiones "s" a fin de garantizar que existen suficientes números primos para la base b_s que se usen para generar las secuencias de Halton gruesas "s"-dimensionales $U_s^{CHal,i,M}$. Como alternativa, el valor de "m" puede diferir de "s", y puede reflejar un compromiso, puesto que las secuencias de Halton que se generen usando típicamente unas bases relativamente pequeñas para proporcionar los puntos de muestra deseables, y seleccionando "m" de forma que sea demasiado grande para causar que se eviten tales secuencias.

Después de que se ha determinado el número real de trabajos M_act, la secuencia emit_photons_all usa la secuencia emit_photons_part de las líneas (9) a (14b) para emitir realmente y guardar los fotones. La secuencia emit_photons_part hace uso de la secuencia gruesa de Halton $U_s^{CHal,i,M}$ anteriormente descrita en relación con las ecuaciones (9) y (10) referentes al almacenamiento de los fotones. En la línea (7) del Segmento 1 de código, la secuencia emit_photons_all invoca realmente la secuencia emit_photons_part "M_act" veces, proporcionando cada vez los valores "i", "N/M_act" y "M_act" que se van a usar para procesar el trabajo respectivo. Los valores proporcionados para "i" estarán comprendidos entre "cero" y "M_act", y se usan como un índice de trabajo. Adicionalmente, el valor de "i" se usa como "i" en la secuencia de Halton gruesa $U_s^{CHal,i,M}$ para el trabajo respectivo. El valor de "M_act" se usa como "M" en la secuencia de Halton gruesa para todos los trabajos. Puesto que el valor del índice "i" difiere para cada trabajo, y está comprendido entre "cero" y "M_act", el Segmento 1 de código se asegurará de que las secuencias de Halton gruesas asociadas con los trabajos respectivos diferirán todas, en cuyo caso todos los fotones que se guardan por todas las tareas diferirán. El valor de "N/M_act" que se proporciona en la línea (7) identifica el número de fotones que se guardan por el trabajo respectivo, y corresponde a $\left\lfloor \frac{N}{M_act} \right\rfloor$, que a su vez es la parte de número entero de "N", el número total de fotones que se va a almacenar dividido por "M_act", el número de trabajos. Se proporciona el número total aproximado "N" de fotones a guardar a la secuencia emit_photons_all de la línea (3). Se apreciará que, si el valor de "M_act" no divide de forma par "N", el número real de fotones que se guardarán será algo menor que "N" proporcionado en la línea (3).

La secuencia emit_photons_part (líneas (9) a (13b) del Segmento 1 de código recibe como argumentos "i", "N" y "M". Todos los trabajos que se crean usando la secuencia emit_photons_part reciben los mismos valores de "N" y "M", correspondiendo el valor de "N" a "N/M_act" de la línea (7) y correspondiendo el valor de "M" a "M_act" de la línea (7). Cada trabajo que se crea usando la secuencia emit_photons_part recibe un único valor de "i". Al ejecutar cada trabajo, se emite un número de fotones que usa la secuencia de Halton gruesa "s"-dimensional $U_s^{CHal,i,M}$ descrita anteriormente en relación con las ecuaciones (9) y (10), y se guarda, hasta que se guarda un número "N" de fotones (como se define en la línea (11)), correspondiente a $\left\lfloor \frac{N}{M_act} \right\rfloor$ de la línea (7), como se representa por las líneas (13a) y (13b) del Segmento 1 de Código. Las metodologías usadas por los sistemas de gráficos de ordenador tal como el sistema 10 de gráficos de ordenador en relación con la emisión y el almacenamiento de fotones, son conocidas en la técnica y no se describirán aquí en detalle; en la anteriormente mencionada solicitud de Keller se describe una metodología.

Después de que se han completado los diversos trabajos, de acuerdo con la línea (8) de la secuencia emit_photons_all, se recogen los resultados de todos los trabajos. Puesto que, como se indica anteriormente, los valores de los índices de trabajo "i" para los trabajos respectivos son todos únicos y menores que M_act, todos los fotones guardados generados por todos los trabajos serán únicos.

Se apreciará que, si el valor de "m", el número de primeros números primos que se van a usar en la determinación del valor para "M_act", el número de trabajos en los que se va a dividir la tarea, se conoce *a priori*, se podría fijar el número de "M_act", puesto que sólo necesita ser el valor superior que no sea divisible por ninguno de esos números primos. Sin embargo, disponiendo que el valor de M_act no sea fijo, sino que en lugar de ello se determine en tiempo de funcionamiento permitiendo al usuario proporcionar un valor para el argumento de "M" (línea de referencia (2)) que actúe como suelo para el valor de "M_act", el Segmento 1 de código permite ajustar el número de trabajos emit_photons_part, lo cual puede conducir a unas propiedades mejores de muestreo que si se fijara el valor de "M-act".

El uso de subsecuencias de la secuencia de Halton gruesa $U_s^{CHal,i,M}$ en relación con el procesamiento en paralelo puede disponer unas imágenes restituidas mejoradas en comparación con las otras metodologías de procesamiento en paralelo, tales como por ejemplo, dividir la secuencia de Halton en una pluralidad de subsecuencias usando una metodología de indexación seleccionada. La secuencia de Halton gruesa $U_s^{CHal,i,M}$ asegura que cada subsecuencia será una subsecuencia de baja discrepancia, y que todas tendrán sustancialmente las mismas propiedades de baja discrepancia. No será éste necesariamente el caso de otras metodologías de procesamiento en paralelo.

La Fig. 2 representa un diagrama de flujo que detalla las operaciones realizadas por el sistema 10 de gráficos de ordenador en relación con el Segmento 1 de código.

Se apreciará que se pueden realizar cierto número de modificaciones en la disposición anteriormente descrita. Por ejemplo, en vez de la secuencia de Halton o la secuencia de Halton aleatorizada, pueden resultar útiles otras secuencias estrictamente determinísticas de baja discrepancia.

Se apreciará que se puede construir un sistema de acuerdo con la invención en su totalidad o en parte a partir de un hardware para uso especial o de un sistema informático para uso general, o de cualquier combinación de los mismos, pudiendo estar controlada cualquier parte del mismo por un programa adecuado. Cualquier programa puede comprender, en todo o parcialmente, una parte del sistema o para ser guardada en el mismo de manera convencional, o puede ser proporcionado al sistema, en todo o parcialmente, a través de una red u otro mecanismo para transferir información de manera convencional. Adicionalmente, se apreciará que el sistema puede ser operado y/o controlado de otra manera mediante la información proporcionada por un operador que usa elementos de entrada de operador (no representados), los cuales pueden ser conectados directamente al sistema o los cuales pueden transferir la información al sistema a través de una red u otro mecanismo para transferir información de manera convencional.

La descripción precedente se ha limitado a una realización específica de esta invención. Resultará obvio, sin embargo, que se puede hacer diversas variaciones y modificaciones a la invención, alcanzando alguna o todas las ventajas de la misma. Es el objeto de las reivindicaciones anexas cubrir éstas y aquellas otras variaciones y modificaciones de este tipo como corresponden dentro del objeto de la invención, tal como se recoge en las reivindicaciones.

REIVINDICACIONES

1. Un sistema de gráficos de ordenador para generar un valor de píxel correspondiente a un píxel de una imagen, siendo el píxel representativo de un punto de una escena, generando el sistema de gráficos de ordenador el valor del píxel mediante una evaluación de una integral de una función seleccionada, comprendiendo el sistema de gráficos de ordenador:

un generador de puntos de muestra configurado para generar un conjunto de puntos de muestra que está configurado para usar una secuencia predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia para generar los puntos de muestra; y

un evaluador de funciones configurado para generar una pluralidad de valores de función, representado cada uno una evaluación de dicha función seleccionada en uno de los puntos de muestra generados por dicho generador de puntos de muestra y usando los valores de función para generar el valor del píxel; estando **caracterizado** el sistema porque:

la secuencia predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia es una subsecuencia de Halton de una secuencia de Halton predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia; y

el generador de puntos de muestra está configurado para generar una pluralidad de subsecuencias de Halton como subsecuencias de Halton o como subsecuencias de Halton aleatorizadas, asociada cada una a un valor de "i" diferente de las ecuaciones

A: $$U_s^{CHal,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j), \ldots, \Phi_{b_s}^{i,M}(j)\right);$$ o

B: $$U_s^{CHal,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j,\sigma_{b_1}), \ldots, \Phi_{b_s}^{i,M}(j,\sigma_{b_s})\right)$$

y donde b_1, ..., b_s son los primeros "s" números primos que no son divisores de "M" y donde, en el caso A:

$$\Phi_b^{i,M}(j) = \Phi_b(jM+i)$$

donde la base "b" es preferiblemente un número primo, pero no un divisor de "M", donde la función inversa radical Φ_b se define como:

$$\Phi_b : N_0 \rightarrow I$$

$$i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^{-j-1}$$

donde $\left(a_j\right)_{j=0}^{\infty}$ es la representación del número "i" en la base entera "b",

y donde en el caso B_s:

$$\Phi_b^{i,M}(j,\sigma_b) = \Phi_b(jM+i,\sigma_b);$$ y

el generador de puntos de muestra está configurado para generar la subsecuencia de Halton aleatorizada de acuerdo con un operador de permutación predeterminado σ a partir de un grupo simétrico S_b sobre números enteros 0,..., b-1, de tal manera que el inverso radical aleatorizado se define como

$$\Phi_b : N_0 \times S_b \rightarrow I$$
$$(i,\sigma) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \sigma\left(a_j(i)\right) b^{-j-1}$$
; y

el generador de puntos de muestra está configurado para generar dichas subsecuencias para todos los valores de "i" comprendidos entre "cero" y "M-1", y para usar todas dichas subsecuencias.

2. Un sistema de gráficos de ordenador como el definido en la reivindicación 1 con la opción B en la cual el generador de puntos de muestra está configurado para generar la subsecuencia de Halton aleatorizada en la cual se define el operador σ de permutación de forma recurrente, a partir de la permutación σ_2 (0, 1) para la base b=2, siendo definida la secuencia de permutaciones como se indica a continuación:

(i) si la base "b" es par, se genera la permutación σ_b tomando en primer lugar los valores $2\sigma_{b/2}$ de añadir los valores de $2\sigma_{b/2} + 1$, y

(ii) si la base "b" es impar, se genera la permutación σ tomando en primer lugar los valores $2\sigma_{b-1}$ incrementando cada valor que es mayor o igual a (b-1)/2 en uno, e insertando el valor b-1 en el centro.

3. Un sistema de gráficos de ordenador como se define en la reivindicación 1, en el cual el evaluador de funciones está configurado para generar la pluralidad de valores de la función que representan cada uno una evaluación de dicha función seleccionada en uno de los puntos de muestra generados por el generador de puntos de muestra, estando configurado el evaluador de función para evaluar la función seleccionada en paralelo para subsecuencias diferentes.

4. Un método de gráficos de ordenador para generar un valor de píxel en una imagen, siendo el píxel representativo de un punto en una escena, generando el sistema de gráficos de ordenador el valor del píxel por evaluación de una integral de una función seleccionada, comprendiendo el método de gráficos de ordenador:

una etapa de generación de puntos de muestra que genera un conjunto de puntos de muestra incluyendo la etapa el uso de una secuencia predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia para generar los puntos de muestra; y

una etapa de evaluación de funciones para generar una pluralidad de valores de función, representando cada uno una evaluación de dicha función seleccionada en uno de los puntos de muestra generados en dicha etapa de generación de puntos de muestra y usar los valores de función para generar el valor del píxel; estando **caracterizado** el método porque:

la secuencia predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia es una subsecuencia de Halton de una secuencia de Halton predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia; y

la etapa de generación de puntos de muestra incluye la etapa de generar una pluralidad de subsecuencias de Halton como subsecuencias de Halton s-dimensionales o como subsecuencias de Halton aleatorizadas, asociada cada una a un valor de "i" diferente de las ecuaciones

$$\text{A: } U_s^{CHal,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j)\right);$$

$$\text{B: } U_s^{CHal,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j,\sigma_{b_1}),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j,\sigma_{b_s})\right)$$

y donde b_1, ..., b_s son los "s" primeros números primos que no son divisores de "M" y donde, en el caso A:

$$\Phi_b^{i,M}(j) = \Phi_b(jM + i)$$

donde la base “b” es preferiblemente un número primo, pero no un divisor de “M”, donde la función inversa radical Φ_b se define como:

$$\Phi_b : N_0 \rightarrow I$$

$$i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^{-j-1}$$

donde $\left(a_j\right)_{j=0}^{\infty}$ es la representación del número “i” en la base entera “b”,

y donde en el caso B_s:

$$\Phi_b^{i,M}(j,\sigma_b) = \Phi_b(j, M+i, \sigma_b) ; \text{ y}$$

la etapa de generación de puntos de muestra incluye generar la subsecuencia de Halton aleatorizada de acuerdo con un operador de permutación predeterminado σ a partir de un grupo simétrico S_b sobre números enteros 0,..., b-1, de tal manera que el inverso radical aleatorizado se define como

$$\Phi_b : N_0 \times S_b \rightarrow I$$

$$(i,\sigma) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \sigma\left(a_j(i)\right) b^{-j-1} \quad ; \text{ y}$$

la etapa de generación de puntos de muestra incluye la etapa de generar dichas subsecuencias para todos los valores de “i” comprendidos entre “cero” y “M-1”, y usar todas dichas subsecuencias.

5. Un método de gráficos de ordenador como el definido en la reivindicación 4 con la opción B, en el cual la etapa de generar puntos de muestra incluye la etapa de generar la subsecuencia de Halton aleatorizada en la cual se define el operador σ de permutación de forma recurrente, a partir de la permutación σ_2 (0, 1) para la base b=2, siendo definida la secuencia de permutaciones como se indica a continuación:

(i) si la base “b” es par, se genera la permutación σ_b tomando en primer lugar los valores $2\sigma_{b/2}$ de añadir los valores de $2\sigma_{b/2} + 1$, y

(ii) si la base “b” es impar, se genera la permutación σ tomando en primer lugar los valores $2\sigma_{b-1}$ incrementando cada valor que es mayor o igual a (b-1)/2 en uno, e insertando el valor b-1 en el centro.

6. Un método de gráficos de ordenador como se define en la reivindicación 4, en el cual la etapa de evaluación de funciones incluye la etapa de generar la pluralidad de valores de la función que representan cada uno una evaluación de dicha función seleccionada en uno de los puntos de muestra generados por la etapa de generar puntos de muestra, estando configurada la etapa de evaluar funcione para evaluar la función seleccionada en paralelo para subsecuencias diferentes.

7. Un producto de programa de gráficos de ordenador para su uso en relación con un ordenador a fin de proporcionar un sistema de gráficos de ordenador para generar un valor de píxel en una imagen, siendo el píxel representativo de un punto en una escena, generando el sistema de gráficos de ordenador el valor del píxel por evaluación de una integral de una función seleccionada, comprendiendo el método de gráficos de ordenador un medio de almacenamiento legible para un ordenador que tiene un código legible de ordenador codificado en el mismo para su ejecución por un procesador, comprendiendo el código:

un módulo de generador de puntos de muestra configurado para permitir al ordenador generar un conjunto de puntos de muestra, estando configurado el módulo de generador de puntos de muestra para usar una secuencia predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia para generar los puntos de muestra; y

un módulo de evaluador de funciones configurado para permitir a un ordenador generar una pluralidad de valores de función, representado cada uno una evaluación de dicha función seleccionada en uno de los puntos de muestra generados por dicho módulo generador de puntos de muestra y usar los valores de función para generar el valor del píxel; estando **caracterizado** el sistema porque:

la secuencia predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia es una subsecuencia de Halton de una secuencia de Halton predeterminada, estrictamente determinística, de baja discrepancia; y

el módulo de generador de puntos de muestra está configurado para generar una pluralidad de subsecuencias de Halton como subsecuencias de Halton o subsecuencias de Halton aleatorizadas, asociada cada una a un valor de "i" diferente de las ecuaciones

$$\text{A: } U_s^{CHal\,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j)\right);$$ o

$$\text{B: } U_s^{CHal\,i,M}(j) = \left(\Phi_{b_1}^{i,M}(j,\sigma_{b_1}),\ldots,\Phi_{b_s}^{i,M}(j,\sigma_{b_s})\right)$$

y donde b_1, ..., b_s son los "s" primeros números primos que no son divisores de "M" y donde, en el caso A:

$$\Phi_b^{i,M}(j) := \Phi_b(jM+i)$$

donde la base "b" es preferiblemente un número primo, pero no un divisor de "M", donde la función inversa radical Φ_b se define como:

$$\Phi_b : N_0 \rightarrow I$$

$$i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, b^{-j-1}$$

donde $\left(a_j\right)_{j=0}^{\infty}$ es la representación del número "i" en la base entera "b",

y donde, en el caso B_s:

$$\Phi_b^{i,M}(j,\sigma_b) = \Phi_b(jM+i,\sigma_b);$$ y

el módulo de generador de puntos de muestra está configurado para generar la subsecuencia de Halton aleatorizada de acuerdo con un operador σ de permutación predeterminado a partir de un grupo simétrico S_b sobre números enteros 0,..., b-1, de tal manera que el inverso radical aleatorizado se define como

$$\Phi_b : N_0 \times S_b \rightarrow I$$

$$(i,\sigma) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \sigma\left(a_j(i)\right) b^{-j-1}$$; y

el módulo de generador de puntos de muestra está configurado para permitir al ordenador generar dichas subsecuencias para todos los valores de "i" comprendidos entre "cero" y "M-1", y para usar todas dichas subsecuencias.

8. Un producto de programa de ordenador como el definido en la reivindicación 7 con una opción B, en el cual el módulo generador de puntos de muestra está configurado para permitir al ordenador generar la subsecuencia de Halton aleatorizada donde el operador σ de permutación se define de forma recurrente, a partir de la permutación σ_2 (0, 1) para la base b=2, siendo definida la secuencia de permutaciones como se indica a continuación:

(i) si la base "b" es par, se genera la permutación σ_b tomando en primer lugar los valores $2\sigma_{b/2}$ de añadir los valores de $2\sigma_{b/2} + 1$, y

(ii) si la base "b" es impar, se genera la permutación σtomando en primer lugar los valores $2\sigma_{b-1}$ incrementando cada valor que es mayor o igual a (b-1)/2 en uno, e insertando el valor b-1 en el centro.

9. Un producto de programa de ordenador como se define en la reivindicación 7, en el cual el módulo evaluador de funciones está configurado para generar la pluralidad de valores de la función que representan cada uno una evaluación de dicha función seleccionada en uno de los puntos de muestra generados por el módulo de generador de puntos de muestra, estando configurado el módulo evaluador de funciones para evaluar la función seleccionada en paralelo para subsecuencias diferentes.

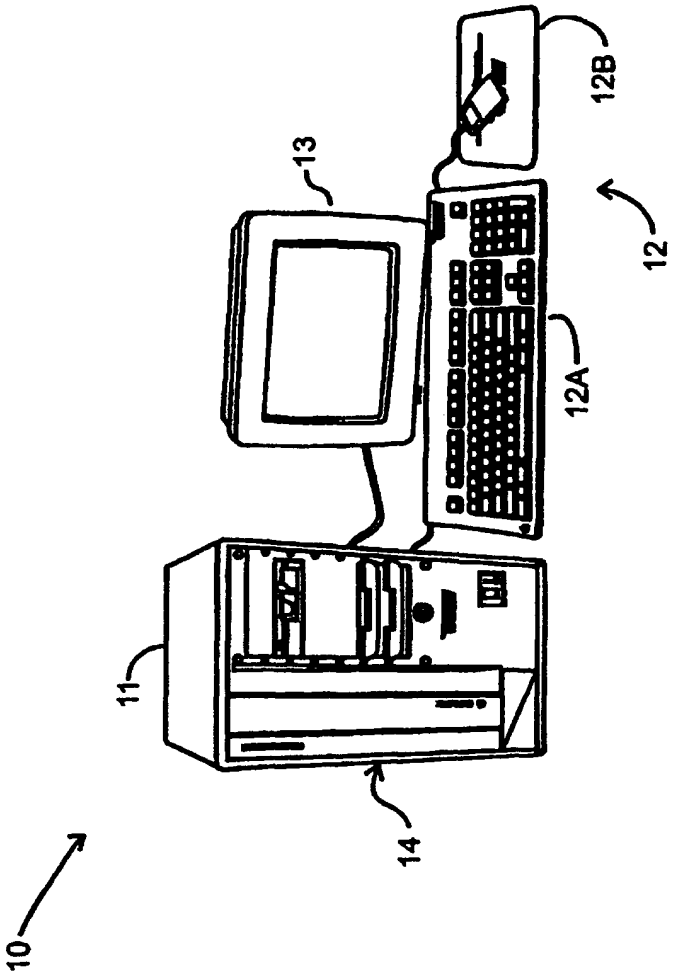


FIG. 1

EMIT_PHOTONS_ALL

FIG. 2

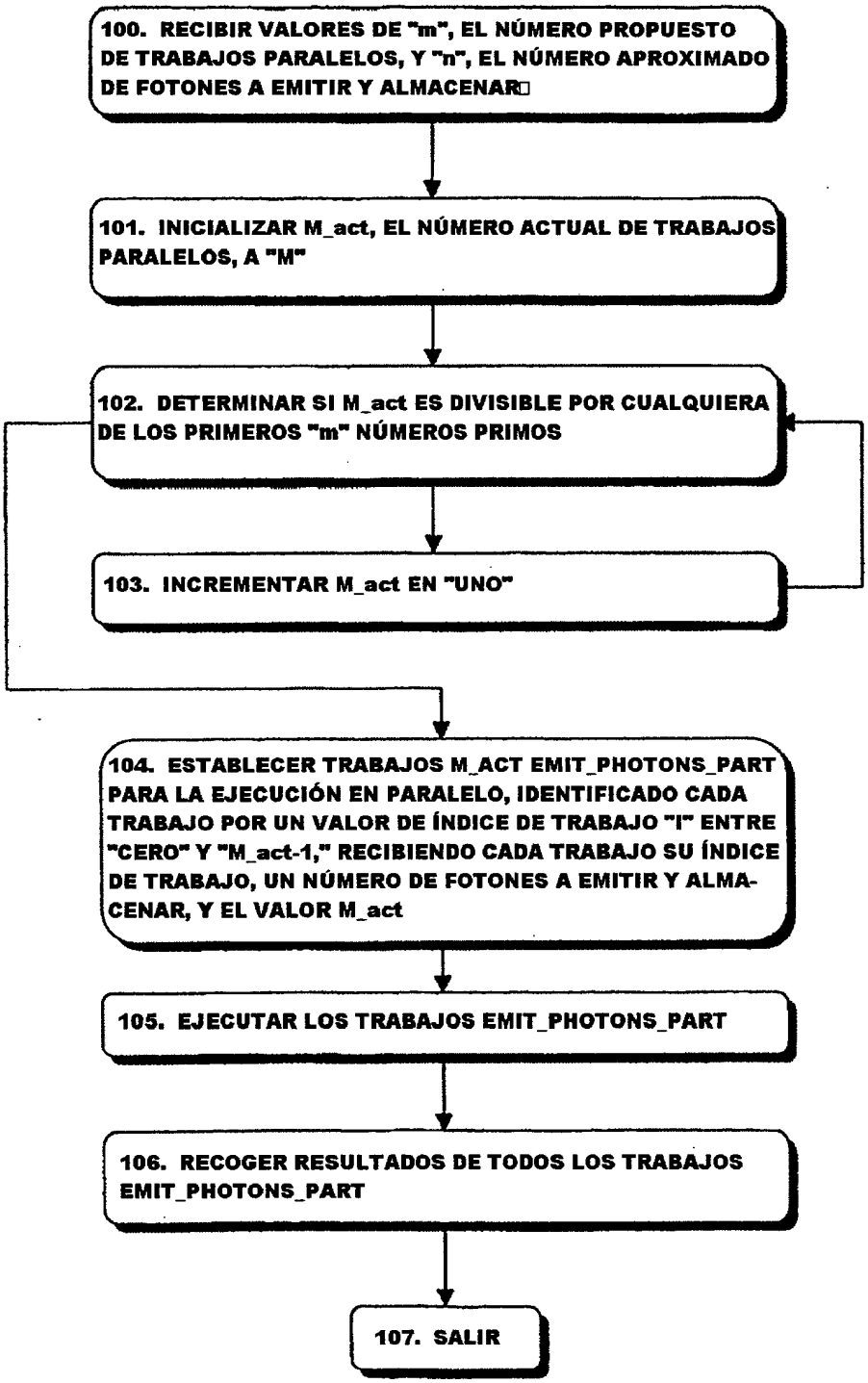


FIG. 2A

EMIT_PHOTONS_PART

