

(19) 日本国特許庁(JP)

## (12) 特許公報(B2)

(11) 特許番号

特許第6397001号  
(P6397001)

(45) 発行日 平成30年9月26日(2018.9.26)

(24) 登録日 平成30年9月7日(2018.9.7)

(51) Int.Cl.

F 1

|             |              |                  |      |       |      |
|-------------|--------------|------------------|------|-------|------|
| <b>GO1S</b> | <b>7/487</b> | <b>(2006.01)</b> | GO1S | 7/487 |      |
| <b>GO6T</b> | <b>3/40</b>  | <b>(2006.01)</b> | GO6T | 3/40  | 730  |
| <b>GO1C</b> | <b>3/06</b>  | <b>(2006.01)</b> | GO1C | 3/06  | 120Q |
| <b>GO1S</b> | <b>17/10</b> | <b>(2006.01)</b> | GO1S | 17/10 |      |
| <b>GO1S</b> | <b>7/526</b> | <b>(2006.01)</b> | GO1S | 7/526 | J    |

請求項の数 22 (全 52 頁) 最終頁に続く

|               |                               |
|---------------|-------------------------------|
| (21) 出願番号     | 特願2016-516250 (P2016-516250)  |
| (86) (22) 出願日 | 平成26年5月30日 (2014.5.30)        |
| (65) 公表番号     | 特表2016-529472 (P2016-529472A) |
| (43) 公表日      | 平成28年9月23日 (2016.9.23)        |
| (86) 國際出願番号   | PCT/GB2014/051671             |
| (87) 國際公開番号   | W02014/191771                 |
| (87) 國際公開日    | 平成26年12月4日 (2014.12.4)        |
| 審査請求日         | 平成29年5月30日 (2017.5.30)        |
| (31) 優先権主張番号  | 1309689.6                     |
| (32) 優先日      | 平成25年5月30日 (2013.5.30)        |
| (33) 優先権主張国   | 英國 (GB)                       |

|           |   |
|-----------|---|
| (73) 特許権者 | 505167543<br>インペリアル・イノベーションズ・リミテッド<br>イギリス国 ロンドン エスダブリュ7<br>2ページ、エキシビジョン ロード、5<br>2 プリンセズ ゲート                                       |
| (73) 特許権者 | 304043888<br>ザ チャイニーズ ユニバーシティー オブ ホンコン<br>THE CHINESE UNIVERSITY OF HONGKONG<br>中華人民共和国 香港 エヌティー シティン<br>Shatin, NT Hong Kong China |

最終頁に続く

(54) 【発明の名称】方法及び装置

## (57) 【特許請求の範囲】

## 【請求項 1】

装置により収集された信号であって、当該装置による当該信号の収集により歪みが生じた当該信号のサンプルの系列から、当該信号の周波数領域表現を推定するための信号処理方法であって、

前記サンプルの系列を取得する工程と、

信号領域における装置関数のシフトされたバージョンによってそれが定義される複数の基底関数を含む、基底関数の集合を、信号領域の振動成分を含む複素指數関数にフィッティングする係数の集合を取得する工程と、

前記係数の集合を使用して前記サンプルの系列をスケーリングし、スケーリングされたサンプルの総和を求ることによって、前記信号の前記周波数領域表現を推定する工程と、を含み、

前記装置関数は、前記装置による信号の前記収集が当該信号に対して有する、前記歪みの影響を表し、かつ、前記複素指數関数に含まれる前記振動成分の周波数であって当該複素指數関数に関連付けられた周波数における、前記周波数領域の前記歪みの影響の特性に基づいている

ことを特徴とする方法。

## 【請求項 2】

前記サンプルは、前記信号領域においてサンプル間間隔により分離されており、

各基底関数は、前記信号領域において整数のサンプル間間隔によりシフトされ、

10

20

前記フィッティングは、前記複数の基底関数により定義される空間への射影を含むことを特徴とする請求項 1 に記載の方法。

**【請求項 3】**

前記サンプルは、前記信号領域においてサンプル間間隔により分離されており、各基底関数は、前記信号領域において非整数のサンプル間間隔によりシフトされ、前記フィッティングは、メリット関数を減少させることにより実行されることを特徴とする請求項 1 に記載の方法。

**【請求項 4】**

前記係数は、前記複数の基底関数のうちの、それぞれ対応する 1 つの基底関数の周波数領域表現を含む

ことを特徴とする請求項 1 から 3 のいずれか 1 項に記載の方法。

**【請求項 5】**

前記複素指數関数は、信号領域の振動成分を含み、前記装置関数が特徴付けられる周波数は、前記振動成分の周波数を含む

ことを特徴とする請求項 1 から 4 のいずれか 1 項に記載の方法。

**【請求項 6】**

( a ) 前記周波数は、前記周波数領域において等間隔に位置している、

( b ) 前記周波数は、周波数間の間隔を増加させながら、前記周波数における前記装置関数の大きさの変動を減少させるように選択される、及び / 又は

( c ) 前記信号は、イノベーション率有限 ( F R I ) 信号の種類に属し、前記周波数は、前記種類の信号のイノベーションパラメータについての最尤推定器の性能に基づいて選択される

ことを特徴とする請求項 5 に記載の方法。

**【請求項 7】**

前記周波数領域表現に基づいて、前記信号の推定値を提供する工程を更に含む

ことを特徴とする請求項 1 から 6 のいずれか 1 項に記載の方法。

**【請求項 8】**

前記複素指數関数の前記係数及び前記複数の基底関数によって提供される前記周波数領域表現の誤差を取得する工程と、

前記誤差に基づいて、前記信号の前記周波数領域表現を再推定するかどうかを判定する工程と、

を含むことを特徴とする請求項 1 から 7 のいずれか 1 項に記載の方法。

**【請求項 9】**

前記信号の前記周波数領域表現を再推定するかどうかを判定する工程は、

原信号における雑音の推定値を取得する工程と、

前記推定された雑音と前記複素指數関数の前記周波数領域表現における前記誤差とに基づく比較を実行する工程と、

を含むことを特徴とする請求項 8 に記載の方法。

**【請求項 10】**

前記信号の前記周波数領域表現の再推定は、

前記信号の前記周波数領域の推定表現のエネルギーを最小化するように構成されるフィルタを判定し、前記フィルタに基づいて前記周波数領域表現を調節すること、及び

行列ペンシル問題から固有値を導出することによって、前記信号領域における前記信号の位置を表すパラメータの推定値を取得すること、

のうちの 1 つを含むことを特徴とする請求項 8 又は 9 に記載の方法。

**【請求項 11】**

前記フィルタに基づいて調整することは、前記フィルタの根を使用して、前記信号領域における前記信号の位置を表すパラメータの推定値を取得することを含む

ことを特徴とする請求項 10 に記載の方法。

**【請求項 12】**

10

20

30

40

50

前記信号は画像を含み、

前記方法は、

前記複素指数関数に関連付けられた前記周波数に基づいて、前記画像の前記周波数領域表現をスケーリングする工程と、

前記画像の前記周波数領域表現のエネルギーを最小化するように構成されるフィルタ係数  $b_{kj}$  の集合を判定する工程と、

前記フィルタ係数から前記画像内の境界を判定する工程と、

を更に含むことを特徴とする請求項 1 から 11 のいずれか 1 項に記載の方法。

#### 【請求項 1 3】

前記境界と第 2 の画像について取得される境界とに基づいて、前記画像と前記第 2 の画像とを共同位置合わせするための変換を決定する工程を更に含む

ことを特徴とする請求項 1 2 に記載の方法。

#### 【請求項 1 4】

画像解像度を向上させる方法であって、

請求項 1 2 に記載の方法に従って、複数の画像の各々について少なくとも 1 つの境界を特定する工程と、

境界毎に、各境界と選択された基準境界とを共同位置合わせするための変換を決定する工程と、

前記複数の画像及び前記変換に基づいて、合成画像を決定する工程と、

を含むことを特徴とする方法。

#### 【請求項 1 5】

前記合成画像を決定する工程は、前記複数の画像のうちの少なくとも 1 つの画像からのサンプル及び当該画像に関連付けられた前記変換に基づいて、前記合成画像における画素の値を決定する工程を含む

ことを特徴とする請求項 1 4 に記載の方法。

#### 【請求項 1 6】

前記装置関数は、前記装置のサンプリングカーネルを含む

ことを特徴とする請求項 1 から 15 のいずれか 1 項に記載の方法。

#### 【請求項 1 7】

前記装置は光学系を含み、前記サンプリングカーネルは点広がり関数を含む

ことを特徴とする請求項 1 6 に記載の方法。

#### 【請求項 1 8】

装置により収集された信号のサンプルの系列から、当該信号の周波数領域表現を提供するデジタル信号処理装置であって、前記信号には前記装置による当該信号の収集により歪みが生じ、前記デジタル信号処理装置は、

前記信号の前記サンプルの系列を取得するように構成されたデータ取得器と、

信号領域におけるサンプル数だけシフトされた装置関数によって定義される基底関数の集合から、前記信号領域の振動成分を含む複素指数関数を近似するように選択される係数の集合を使用して、前記サンプルの系列をスケーリングするように構成されたデータスケーラと、

前記スケーリングされたサンプルの総和を求めるこ**と**によって、前記信号の前記周波数領域表現を提供するデータ提供器と、を備え、

前記装置関数は、前記装置による信号の収集が当該信号に対して有する、前記歪みの影響を表し、かつ、前記複素指数関数に含まれる前記振動成分の周波数であって当該複素指数関数に関連付けられた周波数における、前記周波数領域の前記歪みの影響の特性に基づいている

ことを特徴とするデジタル信号処理装置。

#### 【請求項 1 9】

請求項 1 から 17 のいずれか 1 項に記載の方法を実行するよう構成された、請求項 1 8 に記載のデジタル信号処理装置。

10

20

30

40

50

**【請求項 2 0】**

信号収集装置を備え、かつ、較正方法に従って構成されたデジタル信号処理装置であつて、前記較正方法は、

前記信号収集装置の伝達関数の推定値を取得する工程と、

前記周波数領域において等間隔に位置する周波数の集合を選択する工程と、

前記選択された周波数における前記伝達関数のサンプルに基づく係数を、前記信号収集装置のメモリに格納する工程と、を含む

ことを特徴とする請求項 1 8 又は 1 9 に記載のデジタル信号処理装置。

**【請求項 2 1】**

前記周波数は、周波数間の間隔を増加しながら、前記周波数における前記装置関数の大きさの変動を減少させるように選択される

10

ことを特徴とする請求項 2 0 に記載のデジタル信号処理装置。

**【請求項 2 2】**

請求項 1 から 1 7 のいずれか 1 項に記載の方法を実行するようにプロセッサをプログラムするよう動作可能なコンピュータプログラム命令を含むコンピュータプログラム。

**【発明の詳細な説明】****【技術分野】****【0 0 0 1】**

本発明は、信号のサンプリング及び再構成に関し、特に、イノベーション率有限 ( F R I : finite rate of innovation ) 信号等の帯域制限のない信号のサンプリング及び再構成に関する。

20

**【背景技術】****【0 0 0 2】**

全サンプリングの基本的な問題は、原信号のサンプルの離散集合から当該原信号を推定することである。通常、信号には、例えば実際の信号と測定値を収集する計器のサンプリングカーネルとの畳み込みにより、当該計器による歪みが生じる。殆どの信号処理において、この歪んだ信号が離散サンプルに変換される。サンプルの信号領域の間隔により、測定の周波数領域の帯域幅が制限されることは既知である。

**【0 0 0 3】**

何らかの特定の信号収集計器は、当該計器により実行される測定に影響を及ぼす物理的特徴を有する。それらの特徴は、サンプリング前に原信号に歪みを生じさせる場合がある。この歪みの特性は、装置関数により特徴付けることができる。そのような装置関数の一例は、光学系の点広がり関数である。この装置関数は、サンプリング前の原信号に対して計器が有する歪み効果を表現する。

30

**【0 0 0 4】**

一般に、信号の測定のサンプルに基づく信号の推定精度を向上させる 2 つのアプローチが存在する。第 1 のアプローチは、サンプリングの帯域幅を増加させる ( サンプリング周波数を増加させる ) ことである。第 2 のアプローチは、装置関数の歪み効果を減少させることであり、例えば光学系では、これは点広がり関数の空間範囲を減少させることにより行われうる。

40

**【0 0 0 5】**

イノベーション率有限 ( F R I ) 信号等の特定の種類の信号に対して、信号復元問題に対する 1 つの理論的アプローチは、装置関数が指數関数再生カーネルとして既知である関数の種類に属することを想定している。この関数の種類は、そのようなカーネルのシフトされた表現の線形結合から任意の複素指數関数を再構成する、そのようなカーネルの能力によって定められる。

**【0 0 0 6】**

現実の実際の計器において、装置関数は、計器の実際の物理的制限により決定され、例えば光学系では、開口及び光学列の他の構成要素によって装置関数が定義される。従って、一般に、現実の計器の装置関数は指數関数再生カーネルではない。更に、指數関数再生

50

カーネルを使用する F R I 再構成から開発された理論的アプローチは、雑音（例えばモデル挙動からの原信号のずれ）が存在する場合に、安定性が非常に低いという欠点を有する。当然、雑音は実際のあらゆる物理的計器に伴う。従って、これらの理論的アプローチは、当該技術分野において長年既知であったが、現実世界の実際のシステムには適用できない。

#### 【発明の概要】

##### 【0007】

本開示の態様は、実際の現実世界のシステムにおける、及び測定雑音の存在下における、信号のサンプリング、周波数空間推定及び復元を対象としている。信号は、F R I 信号及びその他の種類の信号を含みうる。 10

##### 【0008】

本開示の実施形態は、信号の周波数領域推定値を提供するために装置関数の知識に基づいて当該信号の離散サンプルを修正することにより、この問題を解決する。特に、サンプルは、係数  $C_{m,n}$  の集合によりスケーリングされる。それらの係数は、基底関数  $h_n$  の集合を複素指數関数にフィッティングするように選択される。それらの基底関数の各々は、信号領域においてシフトされた、装置関数の信号領域表現により定義される。

##### 【0009】

装置関数のバージョンは、選択された周波数  $m$  における、周波数領域の装置関数の特性 (characterisation) に基づいている。これらの周波数は更に、係数  $C_{m,n}$  を選択するために使用される複素指數関数に関連付けられる。係数  $C_{m,n}$  を選択するために使用される複素指數関数は、 $e^{j\omega_m t}$  を含んでもよく、 $t$  は信号領域の変位 (displacement) を示す。例えば時間領域関数の場合、パラメータ  $t$  は時間遅延を示し、空間関数の場合、 $t$  は時間遅延ではなく空間変位を示す。 20

##### 【0010】

周波数  $m$  は、ラプラス変換の意味で複素周波数であってもよく、その場合、複素周波数の虚数部は振動成分の周波数を示し、複素周波数の実数部は信号の減衰又は増大を示す。

##### 【0011】

本開示の実施形態は、上記の周波数を選択し、且つ、装置関数の推定値に基づいて計器についての対応する係数  $C_{m,n}$  を生成することにより、信号処理装置 12 を構成する方法に関連している。 30

##### 【0012】

本発明の理解を助けるために、発明の特定の実現例をいくつか選択して以下に説明する。それらのうちの第 1 の実現例は、パルス系列の飛行時間に基づく距離計測 (range finding) に関する。パルス系列を含む信号の推定に関連するため、この例が選択されている。当業者に理解されるように、殆どの実際の信号及び特にパルス系列は、信号点の系列 (例えば、ディラックのデルタ関数の系列) のタイミング及び振幅により表されうる。従って、この例は本開示を理解するための 1 つの方法をして提供されるが、本開示の装置及び方法はあらゆる信号の信号処理に適用可能であることが理解されるだろう。

##### 【0013】

本開示は、特に F R I 信号に適用されるが、他の種類の信号に適用されてもよい。F R I 信号は、名称が示すように、単位時間毎に有限な数の自由度を有し、それらは周期的であってもよいし、あるいは非周期的であってもよい。F R I 信号の例には、ディラックのデルタ関数のストリーム、不均一なスプライン、正弦波及び区分的多項式が含まれる。 40

##### 【0014】

それらの種類の信号の各々は、「イノベーションパラメータ」により特徴付けられうる。例えばディラックのデルタ関数の系列のイノベーションパラメータは、デルタ関数の信号領域 (例えば、タイミング又は位置) における位置  $t_k$  及び振幅  $a_k$  である。ほぼ全ての信号がデルタ関数の系列としての表現に変形可能であるため、この種の F R I 信号を以下の説明の大部分の基礎として使用する。しかし、本開示の教示はあらゆる種類の信号に 50

適用可能であることが理解されるだろう。

#### 【0015】

一態様において、装置関数( $h$ )により歪みが生じたサンプル( $y_n$ )の系列から信号( $x$ )の周波数領域表現( $X$ )を推定する信号処理方法が提供される。本方法は、サンプル( $y_n$ )の系列を取得する工程と、信号領域における装置関数のシフトされたバージョンによってそれが定義される複数の基底関数を含む、基底関数( $h_n$ )の集合を、複素指數関数にフィッティングする係数( $C_{mn}$ )の集合を取得する工程と、サンプル( $y$ )の系列及び係数( $C_{mn}$ )に基づいて、信号( $x$ )の周波数領域表現( $X$ )を推定する工程と、を含み、装置関数の推定値は、複素指數関数に関連付けられた周波数における、周波数領域の装置関数の特性に基づいている。

10

#### 【0016】

一態様において、装置関数 $h$ により歪みが生じた信号 $x$ に対応する、信号 $y(t)$ のサンプル $y_n$ の系列を取得するように構成されたデータ取得器と、サンプルの番号 $n$ だけシフトされた装置関数によって定義される基底関数の集合 $h_n$ から、複素指數関数を近似するように選択される係数 $C_{mn}$ を使用して、サンプル $y_n$ の系列をスケーリングするように構成されたデータスケーラと、当該スケーリングされたサンプルに基づいて、信号 $x$ の周波数領域表現 $X$ を提供するデータ提供器と、を備えるデジタル信号処理装置が更に提供され、装置関数は、複素指數関数に関連付けられた周波数における、周波数領域の装置関数の特性に基づいている。

20

#### 【0017】

信号のサンプルは、信号領域においてサンプル間間隔又はサンプル周期により分離されてもよい。各基底関数は、信号領域において整数 $n$ のサンプル間間隔により他の基底関数に対してシフトされてもよく、それらの例において、フィッティングは、複数の基底関数により定義される空間への射影を含みうる。いくつかの例において、各基底関数は、信号領域において非整数のサンプル間間隔によりシフトされてもよく、それらの例において、フィッティングは、メリット関数を減少させることにより実行されうる。

#### 【0018】

係数( $c_{mn}$ )は、複数の基底関数( $h_n$ )のうちの、それぞれ対応する1つの基底関数の周波数領域表現( $H_n$ )を含んでもよい。複素指數関数は、信号領域の振動成分を含んでもよく、装置関数( $h$ )が特徴付けられる周波数は、振動成分の周波数を含む。複素指數関数は、信号領域の振動成分のみで構成されてもよい。これは、特に雑音に対して口バストな信号推定を提供することがわかっている。

30

#### 【0019】

いくつかの可能な例において、係数は、選択された周波数における基底関数 $h_n$ の周波数領域表現 $H_n$ の逆数を含む。いくつかの可能な例において、係数は、基底関数 $h_n$ の周波数領域表現 $H_n$ の反転バージョンを含む。係数は、信号領域における装置関数の自己相関の $z$ 変換によりスケーリングされてもよい。

#### 【0020】

選択される周波数は、周波数領域において等間隔に位置してもよく、いくつかの例において、周波数は、周波数間の間隔を増加させながら、当該周波数における装置関数の大きさの変動を減少させるように選択される。これにより、雑音に対する復元力(resilience)が改善することがわかっている。いくつかの可能な例において、信号は $K$ の自由度を有し、 $K$ は整数であり、 $K$ が整数である場合、 $n = 0, 1, \dots, P$ 及び $P - 2K - 1$ である。

40

#### 【0021】

いくつかの可能な例において、推定される信号は、イノベーション率有限(FRI)信号という種類に属し、周波数は、この種類の信号のイノベーションパラメータの最尤推定器の性能に基づいて選択される。これは、クラメール・ラオ限界を減少させることにより達成されうる。

#### 【0022】

50

いくつかの可能な例において、本方法は、複素指數関数の係数 ( $c_{mn}$ ) 及び基底関数 ( $h_n$ ) により提供される表現の誤差を取得する工程と、当該誤差に基づいて、信号の周波数領域表現 ( $X$ ) を再推定するかどうかを判定する工程と、を含む。信号の周波数領域表現 ( $X$ ) を再推定するかどうかの判定は、原信号における雑音の推定値を取得する工程と、推定された雑音と複素指數関数の表現における誤差とに基づく比較を実行する工程と、を含んでもよい。

#### 【0023】

いくつかの可能な例において、信号の周波数領域表現の再推定は、信号 ( $x$ ) の周波数領域の推定表現 ( $X$ ) のエネルギーを最小化するように構成されるフィルタを判定する工程と、当該フィルタに基づいて周波数領域表現を調節する工程と、を含む。これは、消滅フィルタ (annihilating filter) への近似により提供されうる。いくつかの可能な例において、フィルタに基づいて調節する工程は、当該フィルタの根を使用して、信号領域における信号の位置を表すパラメータの推定値を取得する工程を含む。10

#### 【0024】

消滅フィルタを使用する方法が使用される必要はなく、例えばいくつかの可能な例において、信号の周波数領域表現の再推定は、行列ペンシル問題から固有値を導出することにより、信号領域における信号の位置を表すパラメータの推定を取得する工程を含む。

#### 【0025】

いくつかの可能な例において、信号は画像を含み、本方法は、複素指數関数に関連付けられた周波数に基づいて、画像の周波数領域表現をスケーリングする工程と、画像の周波数領域表現のエネルギーを最小化するように構成されるフィルタ係数  $b_{kj}$  の集合を判定する工程と、当該フィルタ係数から画像内の境界を判定する工程と、を更に含む。理解されるように、画像データは、各行の周波数領域表現を推定し、その後に各列の周波数領域表現を推定することにより処理されてもよい。20

#### 【0026】

いくつかの可能な例において、画像処理方法は、画像の共同位置合わせ (co-registration) のために使用されてもよく、それらの可能な例において、本方法は、境界と第2の画像について取得された境界とに基づいて、画像と第2の画像とを共同位置合わせするための変換を決定する工程を含む。画像解像度を向上させる方法であって、複数の画像の各々について少なくとも1つの境界を特定する工程と、境界毎に、各境界と選択された基準境界とを共同位置合わせするための変換を決定する工程と、複数の画像及び変換に基づいて、合成画像を決定する工程と、を含む方法が更に提供される。合成画像を決定する工程は、複数の画像のうちの少なくとも1つの画像からのサンプル及び当該画像に関連付けられた変換に基づいて、合成画像における画素の値を決定する工程を含んでもよい。30

#### 【0027】

一態様において、信号収集計器を備える信号収集デバイスを較正する方法であって、計器の伝達関数の推定値を取得する工程と、周波数領域において等間隔に位置する周波数の集合を選択する工程と、選択された周波数における伝達関数のサンプルに基づく係数 ( $C_{mn}$ ) を、デバイスのメモリに格納する工程と、を含む方法が提供される。これらの周波数は、周波数間の間隔を増加させながら当該周波数における装置関数の大きさの変動を減少させるように選択されてもよい。いくつかの可能な例において、信号収集デバイスは、イノベーション率有限 (FRI) 信号を収集するように適合しており、この種類の信号のイノベーションパラメータの最尤推定器の性能に基づいて、周波数が選択される。40

#### 【0028】

付録1において説明するように、周波数は、それらの周波数に基づいて判定されるクラメール・ラオ限界を減少させるように選択されてもよい。

#### 【図面の簡単な説明】

#### 【0029】

添付の図面を参照して、ほんの一例として本開示の実施形態を以下で説明する。

【図1】図1は、信号処理装置を備える距離計測装置を概略的に示す図である。

10

20

30

40

50

【図2】図2は、信号をサンプリングする処理を示す図である。

【図3】図3は、図1の信号処理装置12を更に詳細に示す距離計測装置を概略的に示す図である。

【図4】図4は、図3に示すような信号処理装置12の動作の1つの方法を示す図である。

【図5】図5は、図3の信号処理装置12及び/又は図4に示す方法を使用して実現可能な画像処理方法及び装置を示す図である。

【図6】図6は、画像の解像度を向上させる方法を示す図である。

【図7】図7は、図6に示す方法の例を更に示す図である。

【発明を実施するための形態】

10

【0030】

図1は、信号の飛行時間(time of flight)に基づいて距離を判定する距離計測装置2を示す。

【0031】

距離計測装置2は、信号4を物体6に向け、当該物体から反射した信号8を受信し、装置2における送出信号4の送信と反射信号8の受信との間の時間遅延に基づいて、装置2と物体6との間の距離を判定するように構成される。

【0032】

距離計測装置2は、送出信号4を物体6へ送信するように構成される信号提供器10を備える。信号提供器10は更に、当該送出信号をタイミング推定器に提供する。

20

【0033】

距離計測装置2は、反射(到来)信号を検出する計器を更に備える。ADC18は、計器16により受信された信号をデジタルサンプルに変換するために、検出計器16と接続される。

【0034】

ADC18は、信号処理装置12(DSP)に受信信号のサンプルを提供するために接続される。DSP12は、サンプルを処理し、処理したサンプルをタイミング推定器14に提供するように構成される。タイミング推定器14は、到来した反射信号のタイミングを推定し、送出信号と反射信号との間の遅延を判定するように構成される。これにより、距離計測装置は、信号の飛行時間に基づいて物体6までの距離を判定できる。

30

【0035】

図2に示すように、計器により受信される反射信号8は、時間領域信号 $x(t)$ を含む。検出計器16は、例えば遅延及び減衰を生じさせることで、この到来した信号に歪みを生じさせる。この歪みは、例えば計器16のインパルス応答である装置関数によって表現されうる。検出計器によって信号 $x(t)$ に歪みが生じた信号 $y(t)$ は、歪んだ信号の離散的表現 $y(n)$ を提供するためにADC18によってサンプリングされる。

【0036】

距離計測装置2と物体6との間の距離を判定するために、距離計測装置2は、信号 $y(n)$ の量子化表現に基づいて、送出信号4の送信と反射信号8の受信との間の遅延を判定する。この測定の分解能は、装置関数によって生じる歪み及びADCの分解能によって制限される。従って、本例における距離推定の問題は、例えば原信号のサンプルの離散集合から原信号を復元する方法である、上述した全サンプリングの基本的な問題に帰着する。

40

【0037】

パルス系列に基づく距離計測の例は、本開示を理解するのに有用であり、パルス列を含む多くの実際の信号がデルタ関数の系列として表されうることが、当業者には理解されるだろう。従って、本例は距離推定との関連で説明されるが、原理はあらゆる信号に適用可能であり、特に、デルタ関数の系列として表されうる信号に適用可能である。

【0038】

図3は、図1及び図2を参照して上述した距離計測装置の更に詳細な例を示す。図3に示す装置は、信号の測定値を取得する計器、測定信号のサンプルの系列を提供するADC

50

18、信号処理装置12及びタイミング推定器を備える。

【0039】

信号処理装置12は、ADCからサンプルを受信し、計器により測定された信号の周波数領域表現の推定値をタイミング推定器に提供するように構成される。当該信号の信号領域表現は、この周波数領域表現から導出可能である。従って、タイミング推定器14は、信号処理装置からの出力に基づいて、送信信号と当該信号領域表現との間の時間領域遅延を推定できる。

【0040】

信号処理装置12は、図3の距離計測装置の残りの部分とは別に提供されてもよい。信号処理装置12及びその動作方法は、他の状況に適用されてもよい。この信号処理装置12及びその動作を以下で更に詳細に説明する。

10

【0041】

信号処理装置12は、ADCから信号のサンプル $y(n)$ を取得するデータ取得器22を備える。データ取得器22は、データスケーラ30と接続され、データスケーラ30は、係数提供器20と接続される。データスケーラ30は、信号処理装置からの出力を提供するデータ提供器34と更に接続される。信号処理装置12は、データ提供器34、係数提供器20及びデータ取得器22と接続されるデータ調整器32を更に備える。

【0042】

データ取得器22は、信号のサンプルを格納するためのメモリ24と、ADC18等のデジタルサンプルの供給元からメモリ24にデータが提供されるようにする入力インターフェース26とを備える。データ取得器22は、データスケーラ30及びデータ調整器32がメモリ24から信号のサンプルを読み出せるようにする連結器28を更に備える。

20

【0043】

係数提供器20は、係数 $C_{mn}$ を格納し、且つ、データスケーラに当該係数を提供するように構成されたメモリ21を備える。係数 $C_{mn}$ は、例えば次式のように、基底関数の集合の線形結合を定義することによって複素指數関数を近似するように選択される。

$$\sum_n C_{mn} h_n(t) \cong \exp\{\alpha_m t\} \quad (1)$$

30

【0044】

基底関数 $h_n(t)$ は、信号領域における装置関数のシフトされたバージョン $h_n$ により定義される。ここで、 $n$ は、例えばサンプル周期の数 $n$ による信号領域におけるシフトを示し、周波数 $m$ は、虚数部が振動成分の周波数を示し、実数部が信号の減衰又は増大(減少又は増加)を示す複素周波数であってもよい。

【0045】

図3に示す例において、係数提供器20は、以下の関係式に従って選択される係数 $C_{mn}$ を備える。

$$C_{mn} = \frac{\exp\{\alpha_m n\}}{H(\alpha_m)} \quad (2)$$

40

ここで、 $H(m)$ は、周波数 $m$ における装置関数の周波数領域バージョン $h_n$ を含む。周波数 $m$ は、それらの周波数における装置関数の大きさ $|H(m)|$ の変動を減少させる一方で周波数間の間隔を増加させるように選択される。上述のように、パラメータ $n$ は、信号領域におけるシフトに関連する。

【0046】

データスケーラ30は、データ取得器22を介して信号のサンプル $y(n)$ を取得する

50

ように構成される。データスケーラ30は、係数 $C_{mn}$ を使用してそれらのサンプルをスケーリングし、以下の関係式に従って、スケーリングされたサンプルの総和を求ることで信号の周波数領域表現 $X(m)$ を推定するように構成される。

$$X(\alpha_m) = \sum_n C_{mn} y_n \quad (3)$$

#### 【0047】

データスケーラ30は、信号の周波数領域表現の当該推定値 $X(m)$ をデータ提供器に提供するように構成される。本段階での完全性のために、当該推定値 $X(m)$ は以下のように記述されうることを示すことができる（付録1を参照）。

$$X(\alpha_m) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m - \zeta_m \quad (4)$$

ここで、

$$u_k = \exp\left\{\lambda \frac{t_k}{T}\right\}, \quad x_k = a_k \exp\left\{\alpha_0 \frac{t_k}{T}\right\},$$

10

20

であり、 $a_k$ 及び $t_k$ は、信号のイノベーションパラメータである（例えば、信号を表すデルタ関数系列のタイミング $t_k$ 及び振幅 $a_k$ ）。 $\zeta_m$ は、以下に定義する推定値の誤差を表す。パラメータ $\alpha_0$ 及び $\lambda$ は、以下の関係式に従って複素平面における周波数 $m$ を定義する複素パラメータである。

$$m = 0 + m$$

ここで、 $m$ は $0 \leq m \leq K - 1$ の整数であり、 $K$ は信号の自由度の数を定義する。

#### 【0048】

データ提供器34は、データを格納するためのメモリ35と、データスケーラ30及びデータ調整器32がメモリ35との間でデータの読み出し及び書き込みを行えるようにする連結器36とを備える。データ提供器34は、データが出力として例えばタイミング推定器に提供されるようにする出力インターフェース38を更に備える。

30

#### 【0049】

データ調整器32は、データ取得器から測定雑音の推定値 $E$ を取得し、データ提供器から推定値 $X(m)$ を取得するように構成される。データ調整器32は、以下の関係式に従って信号の周波数領域表現の推定値 $X(m)$ における誤差 $\zeta_m$ を推定するように更に構成される。

$$\zeta_m = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \epsilon_m \left( \frac{t_k}{T} \right) \quad (5)$$

40

ここで、推定される信号は、 $K$ 個のデルタ関数から成る系列と考えられてもよく、 $t_k$ は、信号領域におけるそれらのデルタ関数の位置（例えば、それらのタイミング）を表し、 $a_k$ は、それらの振幅を表す。振幅 $a_k$ は、上記の式4において定義された関係式に従って、周波数領域表現 $X(m)$ から（例えば、 $\zeta_m = 0$ を設定し、且つ、 $X(m)$ の現在の推定値に基づいて上記の式4を解くことによって）推定可能である。

#### 【0050】

式5におけるパラメータ $m$ は、指數関数 $e \times p \{ m \}$ と、係数 $C_{mn}$ によりスケーリングされた、信号領域における装置関数のシフトされたバージョン $h_n(t)$ から組み

50

立てられたモデルとの間のミスマッチを表す。すなわち、次式で表される。

$$\mathcal{E}_m(t) = \left| \exp\{\alpha_m t\} - \sum_n C_{mn} h_n(t) \right| \quad (6)$$

#### 【0051】

データ調整器32は、誤差の推定値  $\epsilon_m$  と測定雑音の推定値  $E$  とを比較し、当該比較に基づいて、信号を再推定するかどうかを判定するように構成される。

#### 【0052】

信号が再推定される場合、データ調整器32は、例えば畳み込み積分  $F^* X$  を0に向けて調節するフィルタ  $F$  の係数を選択することにより、周波数領域推定表現  $X(m)$  のエネルギーを減少するフィルタ  $F$  を判定することで信号を再推定するように動作可能である。これは、Y.Hua及びT.K.Sakar、「Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Undamped Sinusoids in Noise」、IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing、vol.38、814～824ページ、1990年5月において定義される行列ペンシル法を使用して、あるいは、M.Vetterli、P.Mariliano.及びT.Blu.、「Sampling signals with finite rate of innovation」、IEEE Transactions on Signal Processing、vol.50、1417～1428ページ、2002年6月において定義される消滅フィルタ法を使用して実行されうる。

#### 【0053】

データ調整器32は、フィルタ  $F$  の  $z$  変換の根  $u_k$ （例えば、 $F$  の  $z$  変換が0の値になる複素平面内の点）を取得し、以下の関係式に基づいて  $K$  個のデルタ関数から成る系列のタイミング  $t_k$  の新しい推定値を判定するように構成される。

$$u_k = \exp\left\{\lambda \frac{t_k}{T}\right\} \quad (7)$$

ここで、 $T$  は、サンプリング周期であり、 $\lambda$  は、複素平面における周波数  $m$  の間隔を表す。データ調整器32は、タイミング  $t_k$  の新しい推定値に基づいて、振幅  $a_k$  の新しい推定値を判定するように更に構成される。

#### 【0054】

データ調整器32は、以下の関係式に従って、既存の推定値  $X(m)$  を調節することにより、信号の周波数領域表現を再推定するように更に構成される。

$$X(\alpha_m)^{i+1} = X(\alpha_m)^i + \sum_{k=0}^{K-1} a_k^i \mathcal{E}_m\left(\frac{t_k}{T}\right) \quad (8)$$

ここで、上付き文字は反復回数を表し、例えば  $X(m)^{i+1}$  は、(  $i+1$  ) 番目の反復における再推定された信号の周波数領域表現を表し、 $X(m)^i$  は、 $i$  番目の反復における既存の推定を表す。データ調整器32は、パラメータ  $a_k$ 、 $t_k$  が収束するまで、フィルタ  $F$  及び信号の周波数領域表現の再推定値  $X$  を判定する処理を反復するように構成される。収束基準は、連続する反復の間に推定されたパラメータ  $a_k$ 、 $t_k$  における絶対変動若しくは相対変動に基づいて、及び / 又は、原信号における測定雑音の推定値（例えば、反復の間の調節が、推定された測定雑音を下回るかの判定）に基づいて、選択可能である。

#### 【0055】

図4を参照して、信号処理装置12の動作を以下で説明する。

10

20

30

40

50

動作において、データスケーラ30は、データ取得器22からサンプル $y_n$ の系列を取得し(100)、係数提供器20から係数 $C_{mn}$ を取得する(102)。データスケーラ30は、当該係数を使用してサンプルをスケーリングすることで(104)、上記の式3のように信号の周波数領域表現の推定値を提供する。

#### 【0056】

データ調整器32は、データ取得器から原信号における測定雑音の推定値を取得する(106)。その後、データ調整器32は、式5で定義された関係に従って $X(m)$ から取得された推定振幅 $a_k$ を使用して、モデルミスマッチをスケーリングすることで(110)、 $X(m)$ の推定値における誤差の推定値 $\epsilon_m$ を判定する。

#### 【0057】

データ調整器32は、推定測定雑音と上記の式5で定義された誤差の推定値 $\epsilon_m$ とを比較する(112)。測定雑音がモデルミスマッチに関連する誤差を上回る場合、データ調整器32は推定値を調整せず、データ提供器34は推定値 $X(m)$ を提供する(114)。

10

#### 【0058】

データ調整器32は、上記の式6で定義されたように、係数 $C_{mn}$ 及び基底関数 $h_n$ により提供される、複素指数関数の表現における誤差に基づいて、「モデルミスマッチ(model mismatch)」の推定値を取得する(108)。

#### 【0059】

データ調整器32は、例えば畳み込み積分 $F^*X$ を0に向けて調節するフィルタFの係数を選択することにより、周波数領域推定表現Xのエネルギーを減少するフィルタFを判定する(116)ことで、振幅 $a_k$ を取得する。データ調整器32は、当該フィルタのz変換の根と、タイミング $t_k$ を生じさせる $u_k$ (式7を参照)と振幅 $a_k$ とを判定する(118)ことで、Xを再推定する。これは、付録1において説明され、且つ、Y.Hua及びT.K.Sakar、「Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Undamped Sinusoids in Noise」、IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing、vol.38、814～824ページ、1990年5月において定義されるような行列ペンシル法を使用して実行されてもよい。

20

#### 【0060】

その後、 $t_k$ 及び $a_k$ の値は、図3を参照して上述したように、収束が試験される(122)。値が収束した場合、データ提供器は、信号の周波数領域表現の推定値Xを提供する。値が収束していない場合、ステップ116、118、120及び122が繰り返される。

30

#### 【0061】

信号 $x(t)$ の周波数領域推定値 $X(m)$ は、信号領域における信号 $x(t)$ を推定するために使用されてもよく、それにより、タイミング推定器14は送信信号と反射信号との間の時間遅延を判定できる。この推定は、イノベーションパラメータを特定するために行列ペンシル問題の固定値を判定することにより、「消滅」フィルタ法若しくはそれに対する近似を使用することにより、又は、付録1において定義されるProny法の他の何らかの適用により、実行されうる。

40

#### 【0062】

理解されるように、これまでに説明した例は、画像が同様の方法で処理されうるようないくつかの時間領域信号、空間信号に関するものである。パルス列をディラックのデルタ関数のタイミング及び振幅により特徴付けることができるのと同様に、画像は、画素の位置及び強度、又は、画像の境界の位置、振幅及び傾斜により定義されうるため、画像がFRI信号として扱わてもよい。図3及び図4を参照して説明した信号処理装置12及び方法は、画像のイノベーションパラメータの判定に同様に適用されてもよい。

#### 【0063】

2次元画像における領域間の境界の定義に関する1つの特定の例を図5に示す。

図5は、画像処理装置の一例を示す。図5に更に示されているのは、原画像と、装置関

50

数により及び画素へのサンプリングにより修正された画像の第2のバージョンとである。図5の例において、画像の第2のバージョンの画素値は、原信号のサンプル $y(n)$ に対応する。

#### 【0064】

図5の装置は、図3及び図4を参照して上述した信号処理装置12を備える。信号処理装置12は境界判定器と接続され、境界判定器144は補間器と接続される。

#### 【0065】

信号処理装置12は、画素値を受信し、図4を参照して説明した方法に従って当該画素値を処理して、画像の周波数領域表現を提供するように構成される。図3及び図4において説明した例と同様に、画像の周波数領域表現は、撮像(imaging)の装置関数が特徴付けられた周波数 $m$ に基づいている。当然、これらは水平成分及び垂直成分を含みうるため、周波数領域表現は $X(m_x, m_y)$ で表記することができる。

#### 【0066】

境界判定器144は、画像における局所周波数により値 $X(m_x, m_y)$ をスケーリングすることで、スケーリングされた周波数領域画像データ $I(x, y)$ を次式のように提供するように構成される。

$$I(\alpha_{mx}, \alpha_{my}) = (\alpha_{mx} + j\alpha_{my})X(\alpha_{mx}, \alpha_{my}), \quad (9)$$

ここで、

$$\alpha_{mx} = \frac{j2\pi x p}{M}, \quad \alpha_{my} = \frac{j2\pi y q}{N}$$

であり、 $j$ は、-1の平方根を示し、 $M$ 及び $N$ は、 $x$ 方向及び $y$ 方向における画像の大きさをそれぞれ表し、 $p$ 及び $q$ は、インデックスである。

#### 【0067】

境界判定器144は、以下により定義される式を解くか又は(例えば、最良のフィッティングの意味で)その近似解を見つけることにより、量 $I$ を0に向けて減少させる係数 $b$ の集合を判定するように更に構成される。

$$b_{pq} * I_{pq} = 0 \quad (10)$$

ここで、 $*$ は畳み込みを示す。これは、量 $I$ を消滅させるフィルタを見つけることに類似し、上述したような及び付録1で説明するような消滅フィルタ又は行列ペンシル法を使用して対処されてもよい。境界判定器144は、 $b_{pq}$ が判定されると、 $f(x, y) = 0$ である場合の画像内の位置 $(x, y)$ として境界を特定するために、以下の連立方程式を解くように構成される。

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^L b_{pq} \exp\{-\alpha_{mx}\} \exp\{-\alpha_{my}\} = 0 \quad (11)$$

ここで、

$$\alpha_{mx} = \frac{j2\pi x p}{M}, \quad \alpha_{my} = \frac{j2\pi y q}{N}$$

である。

#### 【0068】

10

20

30

40

50

この連立方程式において、M及びNは、原画像の大きさであり、jは、-1の平方根を示す。この結果の検証は、H.Pan、T.Blu及びP.L.Dragotti、「Sampling Curves with Finite Rate of Innovation」、in Proc. of Sampling Theory and Application Conference、Singapore、2011年5月において見つけられる。これは、画像における境界を特定する1つの特定の方法を提供する。しかし、理解されるように、画像がFRI信号を含む場合、当該画像の構造（境界等）の位置を定義するために画像のイノベーションパラメータを使用でき、このため、推定値X( $m_x, m_y$ )を使用して境界を復元する他の方法が、例えば画像のイノベーションパラメータの判定に基づいて更に使用されてもよい。

#### 【0069】

補間器146は、境界判定器から境界データを取得し、画像のサンプルy(n)に基づいて複数の境界の間を補間するように構成される。その後、補間された画像は、境界から取得された情報と初期画像データ値とを組み込むことで、画像の強調（enhanced）バージョンを提供する。10

#### 【0070】

画像強調を提供するために境界間を補間することに加えて、本開示の実施形態は、画像を合成して解像度を向上させる方法を含む。図6及び図7を参照して、1つのそのような方法を説明する。

#### 【0071】

図6及び図7に示すように、本方法において、第1の画像812が取得され（702）、図3、図4及び図5を参照して説明したように、画像の周波数空間表現X1( $m_x, m_y$ )が推定される。第1の境界が、上記の式9～11に基づいて当該第1の画像812において特定される（704）。20

#### 【0072】

第2の画像810が更に取得され（706）、当該画像の周波数空間表現X2( $m_x, m_y$ )が推定され、第2の境界が当該第2の画像において識別される（708）。これは第1の画像と同様の方法で実行可能であるが、第1の境界及び第2の境界は同様の方法で取得される必要がなく、同時に取得される必要もないことが理解されるだろう。

#### 【0073】

第1の境界と第2の境界とを共同位置合わせするために、アフィン変換等の変換が判定される（710）。これは、例えば2つの境界間の差に基づくメリット関数を減少させる（例えば最小化する）変換を見つけることにより実行される。30

#### 【0074】

当該変換から、画像の画素位置の集合806が判定されることで、第1の画像812及び第2の画像810よりも高い解像度を有する画素位置の集合806が提供される（714）。その後、当該変換が第1の画像データ812に適用されることで、変換された第1の画像データ802が提供される。

#### 【0075】

変換された第1の画像データ802及び第2の画像データ810は、変換された第1の画像データ802及び第2の画像データ810から補間することによって合成されて（716）、新しい画素位置の集合806における合成画像データ820が判定される。40

#### 【0076】

2つの画像の共同位置合わせに関連して本方法を説明したが、当然、これはあらゆる数の画像に適用されうる。

#### 【0077】

本開示の理解を助けるために、図2の信号処理装置12の機能を機能要素に名目上細分化している。しかし、それらの機能要素は物理的に別個の構造として提供される必要はなく、機能のいくつか又は全ての態様は共通の物理的構造において提供されてもよく、機能のいくつか又は全ての態様は更に細分化されてもよいことが理解されるだろう。1つの特定の例として、信号処理装置12は単一のプロセッサにより提供されてもよく、データ提供器34及びデータ取得器22は、チップにより読み出し可能及び/又は書き込み可能で50

あるレジスタ又はバッファ等のメモリ要素を備えててもよい。例えばデータ提供器 34 及びデータ取得器 22 は、プロセッサの内蔵キャッシュ等のメモリキャッシュであってもよい。更に、上記機能は、特定用途向け集積回路 (ASIC)、フィールドプログラマブルゲートアレイ (FPGA) 又はデジタル論理ゲートのアセンブリ等の何らかの適切なプロセッサにより提供されてもよい。いくつかの実施形態において、上記機能はコンピュータプログラムにより提供される。コンピュータプログラムは、信号処理装置の機能を提供するようにプロセッサをプログラムするように動作可能なプログラム命令を含む。このコンピュータプログラムは、一時的又は非一時的な形態で格納可能である。

#### 【0078】

図 1 は、本開示の一実施形態が使用される方法の一例を紹介している。この特定の例は距離計測に関するものであり、パルスの系列を含む信号の推定に関するものであるためにこの例が選択されている。当業者には理解されるように、あらゆる信号は、単一の点の系列（例えば、ディラックのデルタ関数の系列）により表されうる。従って、本例は本開示を理解する 1 つの方法として提供されるが、本開示の装置及び方法は他の多くの状況における信号処理に適用可能であることが理解されるだろう。パルス系列の推定は一例にすぎない。装置関数の例には、フィルタのインパルス応答及び光学系の点広がり関数が含まれる。

10

#### 【0079】

図 1 の距離計測の例では、光信号又は音響（例えば、超音波）信号等の種々の信号を使用できる。しかし、本開示との関連で理解されるように、ADC の時間分解能、並びに送出信号及び反射信号の速度（例えば、光信号の場合の光の速度）によって、測定の精度が制限される。

20

#### 【0080】

装置関数は、単位インパルスに対する応答により特徴付けられてもよく、別 の方法は、例えば既知の周波数の正弦波を使用して、既知の周波数及び振幅の信号に対する計器の応答を測定することである。検出計器を特徴付ける他の方法は、当業者には理解されるだろう。

#### 【0081】

上記の説明において、パラメータ  $n$  は信号領域におけるサンプルにインデックスを付けるために使用され、信号領域の例におけるシフトを示すために使用される。信号が時間領域信号である場合、パラメータ  $n$  は時間遅延に関連し、信号が空間的に変動する信号である場合、パラメータ  $n$  は空間変位に関連する。

30

#### 【0082】

遅延  $n$  は、整数のサンプルを含んでもよく、その場合、係数  $C_{mn}$  は、シフトされた基底関数上への指數関数  $e^{j\omega_m n}$  の直交射影から取得されてもよい。しかし、いくつかの実施形態において、遅延  $n$  は整数及び非整数のサンプルを含んでもよい。これらの可能な例において、係数  $C_{mn}$  は、次式のようなモデルミスマッチを表すメリット関数の減少に基づくフィッティング手順から取得可能である。

$$\mathcal{E}_m(t) = \left| \exp\{\alpha_m t\} - \sum_n C_{mn} h_n(t) \right|$$

40

#### 【0083】

これらの係数  $C_{mn}$  を選択する 1 つの方法は、上記の式 2 で定義される関係に従うことである。しかし、他の数値解及び解析解が使用されてもよい。例えば次式が使用されてもよい。

$$C_{mn} = \frac{H(-\alpha_m)}{\hat{a}_H(\exp\{\alpha_m\})} \exp\{\alpha_m n\}$$

ここで、

$$\hat{a}_H(\exp\{\alpha_m\}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_H[l] \exp\{-\alpha_m l\}$$

10

は、 $z = e \times p \{ m \}$ において評価された装置関数

$$a_H = \langle h(t-l), h(t) \rangle$$

の信号領域表現の自己相関の $z$ 変換である。

**【0084】**

係数 $C_{mn}$ は、他の方法で選択されてもよい。例えば、特定の位置において（例えば、選択された許容範囲内で0になる）特定の値を有するようにモデルミスマッチを制約することに基づいて、係数が選択されてもよい。本アプローチの1つの例は、 $t$ が整数である指数関数 $e \times p \{ m t \}$ をモデル $C_{mn} h_n$ が正確に補間することを保証することである。本アプローチを用いる場合、係数を次式のように定義できる。

20

$$C_{mn} = \frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp\{\alpha_m l\} h(l)} \exp\{\alpha_m n\}$$

モデルミスマッチにより判定されるメリット関数を減少させる他の係数が更に使用されてもよい。一般に、それらの係数の例は装置関数の周波数領域表現を含む。

**【0085】**

30

周波数 $m$ は、それらの周波数における装置関数の大きさ $H(m)$ の変動を減少させる一方で周波数間の間隔を増加させるように選択されると説明されている。これは、種々の方法で達成される。いくつかの実施形態において、信号は、イノベーション率有限(FRI)信号という種類に属し、周波数 $m$ は、この種類の信号のイノベーションパラメータの最尤推定器の性能に基づいて選択される。これを達成する1つの方法は、クラメール・ラオ限界を減少させる（例えば、最小化する）周波数 $m$ を選択することであり、これは付録1の式16により定義される。これらの周波数を選択するために、他の方法が使用されてもよい。係数 $C_{mn}$ の1つ以上の集合を、係数提供器20に格納できる。更に、例えばデータ調整器がアクセスするために、モデルミスマッチ $_m(t)$ もメモリに格納されてもよい。

40

**【0086】**

距離計測の例では、原信号は時間領域信号であるため、周波数領域及び信号領域への言及はその文脈で理解される必要がある。他の例は画像処理に関連しており、その場合、信号は空間領域信号であるため、信号領域及び周波数領域への言及はその文脈で理解される必要がある。当業者には理解されるように、周波数領域と信号領域との間のリンクは、フーリエ級数、フーリエ変換、ラプラス変換、 $z$ 変換又は他の何らかの周波数変換等の変換の選択肢のうちのいずれか1つにより提供される。

**【0087】**

特に、本開示の信号処理方法及び装置は、ニューロン信号の推定、地震学又は画像処理において使用されてもよい。本開示の例は、各チャネルが図3を参照して説明したような

50

信号処理装置 12 を含むマルチチャネルデータ収集装置を提供する。

**【0088】**

計器により収集され、且つ、当該計器による信号の収集に関連付けられた装置関数により歪みが生じた信号のサンプル系列から、信号の周波数領域表現を推定する信号処理方法が開示されたことが理解されるだろう。本方法は、本明細書中で説明される種々の方法のうちのいずれか 1 つで適用されうることが更に理解されるだろう。例えば、本方法は、サンプルの系列を取得する工程と、信号領域における装置関数のシフトされたバージョンによってそれが定義される複数の基底関数を含む、基底関数の集合を、複素指数関数にフィッティングする係数の集合を取得する工程と、サンプルの系列及び係数に基づいて、信号の周波数領域表現を推定する工程とを含みうる。装置関数は、複素指数関数に関連付けられた周波数における、周波数領域における装置関数の特性に基づいている。本方法のこれらの特徴の各々は、本明細書中で説明される方法のうちのいずれか 1 つ以上で実現され、一般化され又は更に改良されてもよい。10

**【0089】**

従って、説明される実施形態は例示として理解されるべきであることが理解されるだろう。更なる実施形態が考えられる。いずれか 1 つの実施形態に関して説明されるあらゆる特徴は、単独で使用されてもよく、説明される他の特徴と組み合わせて使用されてもよく、何らかの他の実施形態又は何らかの他の実施形態の何らかの組み合わせの 1 つ以上の特徴と組み合わせて使用されてもよいことが理解されるべきである。更に、添付の特許請求の範囲において定義される本発明の範囲から逸脱することなく、上述されなかった均等物及び変形が使用されてもよい。20

**【0090】**

図面全体を参照すると、概略的な機能ブロック図は本明細書中で説明するシステム及び装置の機能を示すために使用されることが理解されるだろう。しかし、機能はそのように分割される必要がなく、説明され且つ以下でクレームされる以外のハードウェアの何らかの特定の構造を示すと理解されるべきでないことが理解されるだろう。図面に示す要素のうちの 1 つ以上の要素の機能は、更に細分化されてもよいし、及び / 又は本開示の装置全体に分散されてもよい。いくつかの実施形態において、図面に示す 1 つ以上の要素の機能は、単一の機能ユニットに一体化されてもよい。

**【0091】**

いくつかの例において、1 つ以上のメモリ要素は、本明細書中で説明される動作を実現するために使用されるデータ及び / 又はプログラム命令を格納できる。本開示の実施形態は、本明細書中で説明され、及び / 又はクレームされる方法のうちのいずれか 1 つ以上を実行するようにプロセッサをプログラムするよう動作可能なプログラム命令と、本明細書中で説明され、及び / 又はクレームされるデータ処理装置を提供するように動作可能なプログラム命令との少なくともいずれかを含む有形の非一時的な格納媒体を提供する。30

**【0092】**

本明細書中で概略を示す動作及び装置は、論理ゲートのアセンブリ等の固定論理、あるいはプロセッサにより実行されるソフトウェア及び / 又はコンピュータプログラム命令等のプログラム可能論理により提供されてもよい制御器及び / 又はプロセッサを使用して実現されてもよい。他の種類のプログラム可能論理は、プログラム可能プロセッサ、プログラム可能デジタル論理（例えば、フィールドプログラマブルゲートアレイ（FPGA）、消去可能プログラム可能読み出し専用メモリ（E PROM）、電気的消去可能プログラム可能読み出し専用メモリ（EEPROM）、特定用途向け集積回路 ASIC、あるいは他の何らかの種類のデジタル論理、ソフトウェア、コード、電子的命令、フラッシュメモリ、光ディスク、CD-ROM、DVD-ROM、磁気カード又は光カード、電子的命令を格納するのに適した他の種類の機械読み取り可能媒体、あるいはそれらの何らかの適切な組み合わせを含む。40

**【0093】**

[付録 1 ]

以下は、本発明が考査されてもよい方法の詳細な説明である。種々の特徴が必須又は必要であると説明されうるが、これは、例えば対象となっている特定の数学的状況により求められる他の条件に起因して、説明される特定の例に対してのみ当てはまる場合がある。従って、それらの記載は、本発明を何らかの方法で限定するものであると解釈されなければならない。

#### 【0094】

Starang-Fixの近似：

任意のカーネルを用いるFRIのサンプリング

Jose Antonio Uriagu、Thierry Blu、及びPier Luigi Dragotti

#### 【0095】

10

<要約>

近年、イノベーション率有限(FRI)信号として知られる特定の種類の帯域制限のない信号のサンプリング及び正確な再構成のための複数の新しい方法が開発された。[1]において使用されるサンプリングカーネルは指數関数再生カーネルと呼ばれ、一般化Strang-Fix条件を満たす。これらは、カーネルとそのシフトされたバージョンとの適切な線形結合が多項式又は指數関数を正確に再生することを保証する。

#### 【0096】

本稿の第1の目的は、雑音を含むサンプルからFRI信号を推定する場合に正しい指數関数再生カーネルを選択する方法に対する明確な指針を提供することである。次に、サンプリングカーネルを選択できる状況から離れ、あらゆるカーネルを扱うことができるという意味で汎用である新しい方法を開発する。そのために、正確な指數関数再生条件を満たすことは非常に困難な制約であることに注目し、指數関数再生の考えをあらゆるカーネルと共に使用し、且つ、雑音に対するロバスト性の高い再構成方法を開発するために、再生式における制御誤差を許容する。

20

#### 【0097】

数値的結果は、本稿の種々の目的を実証し、特に、近似指數関数再生方法が従来の完全復元方法を使用する場合に取得される結果より安定性の高い再構成結果を生じることを示す。

#### 【0098】

30

<索引用語>

サンプリング、イノベーション率有限、雑音、MOMS、行列ペンシル

#### 【0099】

<EDICSカテゴリ：DSP - SAMPL>

I. 序論

大部分のデジタル収集システムは、アナログ信号からデジタル信号への変換を含み、サンプリング定理は、連続時間の世界と離散時間の世界との間を橋渡しする。通常、収集処理はFigure 1のようにモデル化され、平滑化関数  $(t)$  はサンプリングカーネルと呼ばれ、一般に、収集デバイスによる歪みをモデル化する。フィルタリングされた連続時間信号  $y(t) = x(t) * (-t/T)$  は、 $f_s = 1/T$  のレートで均一にサンプリングされる。この設定に従うと、測定は次式により与えられる。

40

$$y_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) dt = \left\langle x(t), \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle$$

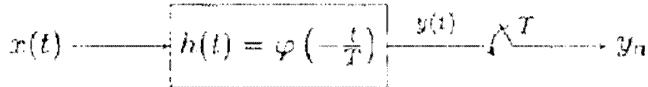


Figure 1 従来のサンプリング方式。連続時間入力信号  $x(t)$  は  $h(t)$  を用いてフィルタリングされ、  
T秒毎にサンプリングされる。サンプルは、 $y_n = (x * h)(t)|_{t=nT}$  により与えられる。

10

### 【0100】

サンプリングの基本的な問題は、サンプル  $y_n$  の集合を使用して元の連続時間波形  $x(t)$  を復元することである。信号が帯域制限される場合、シャノンによる解は周知である。最近、特定の種類の帯域制限のない信号をサンプリングして完全に再構成できることが [2], [1], [3] において示されている。そのような信号は、有限の個数の自由パラメータにより完全に説明されるため、イノベーション率有限 (FRI) 信号と呼ばれる。完全再構成は、消滅フィルタ法 [4] としても既知である Prony 法の変形を使用して達成される。当該フレームワーク内でサンプリング可能な信号は、ディラック等のパルスのストリーム [2], [1], [3], [5]、区分的多項式信号、区分的正弦波信号 [6] 及び 2 次元信号の種類 [7], [8], [9], [10] を含む。雑音が存在する場合、FRI 再構成技術は不安定になり、雑音に対する復元力を向上させる方法が [11], [12], [13], [14], [15], [10] において提示されている。

20

### 【0101】

FRI 信号を完全再構成するために、FRI に関するオリジナル論文において最初に提案された sinc 関数及びガウス関数 [2]、SOS (Sum of Sines) のファミリー等のコンパクトサポートカーネル [3]、並びに多項式再生カーネル及び指数関数再生カーネル [1], [16] 等の種々のサンプリングカーネルを使用できることに注目する。これらは全て、雑音を含まない設定において完全再構成が可能であり、雑音が存在する場合は挙動が変化する。従って、当然、性能の低下の原因となる要素を理解し、雑音に対する復元力が最も高いカーネルを設計する方法に関する正確な指針を提供することが試みられる。

30

### 【0102】

本稿では、指数関数再生カーネルのファミリー [1]を中心として、安定性が最も高いカーネルを設計する方法に関する指針を提供する。指数関数再生カーネルを中心とするには 2 つの理由がある。第 1 に、それらは、雑音を含む測定値を処理する際に適切な特性であるコンパクトサポートを有することができる。第 2 の更に重要な理由は、Figure 1 の設定を使用して FRI サンプリングにおいて従来使用してきたコンパクトサポートカーネルが指数関数再生カーネルのファミリーの特定の例であることである。これを付録 B において証明する。

### 【0103】

40

我々の貢献は 2 つに分けられる。最初に、雑音を含む環境において FRI 信号をサンプリングし、且つ、再構成する場合に最も効果的な指数関数再生カーネルを設計する方法を説明する。FRI 復元は雑音内のパラメータの集合を推定することに等しいため、この FRI 推定問題のクラメール・ラオ限界を最小化する指数関数再生カーネルのファミリーを見つけることにより、この最適な設計を達成する。第 2 の貢献において、要求に最も適合する方法でカーネルを作成できる状況から離れ、収集デバイスを制御できない場合について考える。この新しいシナリオにおいて、あらゆる可能なカーネルを扱うことができるという意味で汎用である FRI サンプリングに対する新しい方法を開発する。入力の正確なパラメータを見つけようとする既存の技術と異なり、雑音が存在する場合も高精度が可能な近似復元を実行する方法を説明する。新しい方法の利点は、あらゆるサンプリングカーネル

50

ネルに適用可能であることである。更に、新しい方法は、完全再構成を理論上達成できるが実際は非常に不安定である多項式スプライン等の、カーネルに対する従来の完全復元フレームワークの代わりに使用できる。この新しい近似フレームワークを完全復元方法の代わりに使用することにより、「不安定な」カーネルを使用する場合でも、雑音を含む設定におけるFRI信号の信頼性の高い再構成が可能であることを示す。

#### 【0104】

本稿の概要は次のようである。第II節において、雑音を含まない例を紹介し、その例において、原型的なFRI信号であるディラックの系列をサンプリングして完全再構成する。指數関数再生カーネル[1]及び一般化Strang-Fix条件[17]についても説明する。第III節において、収集処理に雑音が存在する場合の更に現実的な設定を扱う。当問題に対してディラックの系列を回復し、且つ、クラメール・ラオ限界を計算する実用的な技術を説明する。第IV節において、雑音に対する復元力が最も高い指數関数再生カーネルのファミリーを設計する。第V節において、近似FRIフレームワークを提示し、あらゆるカーネルを用いてFRI信号をサンプリングする基本的な考えを開発する。再構成段階を適切に定義することにより、この新しいフレームワークを用いることで既存のカーネルの再構成精度向上できることを更に示す点が興味深い。第VI節において、本稿の種々の目的を証明するシミュレーション結果を提示する。最後に、第VII節において結論を示す。

#### 【0105】

##### II. イノベーション率有限信号のサンプリング

本節において、FRI信号のサンプリングの理論の概要を説明する。特に、サンプルからディラックのストリームを完全再構成する方法を説明する。なお、更に高度な信号の再構成は常に本例に帰着させることができる。

#### 【0106】

##### A. ディラックのストリームの完全再構成

理解を容易にするために、入力  $x(t)$  は、 $t_k \in [0, T]$  及び  $k = 0, \dots, K-1$  である異なる瞬間  $t_k$  に位置し、振幅  $a_k$  を有する  $K$  個のディラックのストリームであると考える。信号は全体で  $2K$  の自由度を有し、次式として示すことができる。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \delta(t - t_k). \quad (1)$$

#### 【0107】

次に、Figure 1の収集モデルに基づいて、カーネル  $\varphi(t)$  を用いて入力をフィルタリングし、以下の測定値を取得する。

$$y_n = \left\langle x(t), \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right), \quad (2)$$

ここで、 $n = 0, 1, \dots, N-1$  である。ここで、サンプリング周期  $T$  が  $= NT$  を満たすと仮定する。更に、 $\varphi(t)$  はコンパクトサポートであり、 $m = 0, \dots, P$ 、且つ、 $m < C$  である適切な係数  $c_{m,n}$  に対し次式を満たすと更に仮定する。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \varphi(t - n) = e^{\alpha_m t}, \quad (3)$$

(3)を満たすカーネルを次数  $P+1$  の指數関数再生カーネルと呼ぶ。第II-B節において、これを詳細に説明する。本稿の残りの部分において、 $\alpha_0, \dots, \alpha_C$  である  $m = 0 + m$  の形式のパラメータに解析を限定する。これを選択した理由は、本節において後で明らかになる。

#### 【0108】

入力をサンプリングした後、入力を測定値  $y_n$  の集合から一義的に回復できることを示す。

10

20

30

40

50

す必要がある。そのために、最初に、サンプル  $y_n$  と (3) の係数  $c_{m,n}$  を線形結合して、 $m = 0, \dots, P$  に対する新しい測定値を取得する。

$$s_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n, \quad (4)$$

その後、信号  $x(t)$  はディラックのストリーム (1) であるとし、(4) と (2) とを合成することにより、次式を得られる [1]。

$$\begin{aligned} s_m &= \left\langle x(t), \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j \alpha_m \frac{t}{T}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k e^{j \alpha_m \frac{t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m, \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$x_k = a_k e^{j \alpha_0 \frac{t_k}{T}} \text{ 及び } u_k = e^{j \lambda \frac{t_k}{T}}$$

である。なお、値  $s_m$  は信号  $x(t)$  の (指數関数) モーメントであり [6]、指數関数  $\{e^{j \alpha_m \frac{t}{T}}\}_{m=0}^P$

により張られる部分空間上に  $x(t)$  を射影することに等しい。 $m = 0, \dots, P$  である  $m = t_0 + m$  の形式のパラメータを使用することは、値  $s_m$  が幕和 (power sum) の級数の形式を有するために必要であり、これは復元段階において重要な点である。

#### 【0109】

$k = 0, \dots, K-1$  とする未知数 ( $u_k, x_k$ ) の新しい対は、スペクトル推定の分野 [4] では Prony 法としても知られる消滅フィルタ法 [2], [1], [12] を使用して測定値  $s_m$  から回復可能である。 $m = 0, \dots, K$  である  $h_m$  が  $z$  変換

$$\hat{h}(z) = \sum_{m=0}^K h_m z^{-m} = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - u_k z^{-1})$$

を有するフィルタを示すとすると、すなわち、その根は探される値  $u_k$  に対応する。その場合、 $h_m$  は観察された級数  $s_m$  を消滅させることになる。

$$h_m * s_m = \sum_{i=0}^K h_i s_{m-i} = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m \underbrace{\sum_{i=0}^K h_i u_k^{-i}}_{\hat{h}(u_k)} = 0. \quad (6)$$

#### 【0110】

更に、位置  $t_k$  は別個であるとすると、当該フィルタの 0 は値  $u_k$  を一意に定義する。恒等式 (6) は行列とベクトルの形式で以下のように書くことができる。

$$S h = 0 \quad (7)$$

これは、テブリツ行列  $S$  がランク不足であることを示す。上記の式を解くことにより、フィルタ係数  $h_m$  を見つけ、

$$\hat{h}(z)$$

の根を計算することにより  $u_k$  を回復する。 $u_k$  が与えられる場合、

$$u_k = e^{j \lambda \frac{t_k}{T}}$$

であるため、位置  $t_k$  が取得される。アルゴリズム 1 における消滅フィルタ法の主要なステップを詳述する。

#### 【0111】

10

20

40

50

なお、 $\lambda_k$  が純虚数である場合、 $u_k$  は周期

$$2\pi \frac{T}{\text{Im}\{\lambda_k\}}$$

の繰り返しであり、位置  $t_k$  は、一義的に回復するために、 $k = 0, \dots, K-1$  とする  
 $0 \leq t_k \leq 2\pi \frac{T}{\text{Im}\{\lambda_k\}}$

を満たす必要がある。最後に、例えば(5)において最初の  $K$  個の連続する式を解くことにより、重み  $a_k$  を判定する。なお、少なくとも未知数と同数の式が存在する場合のみ問題を解くことができ、これは、 $P \geq 2K-1$  を意味する。これは、指數関数再生カーネルの次数  $P+1$  が入力信号  $x(t)$  の自由度の数に従って選択される必要があることを示す。

10

---

#### アルゴリズム 1 消滅フィルタ：総最小二乗法

---

$K$  個のディラックから成る系列(1)からイノベーションパラメータ  $(t_k, a_k)$  を抽出する

1: (2) の  $N$  個のサンプル  $y_n$  から、 $m = 0, \dots, P$  についてシーケンス  $s_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n$  を計算する。

2: 指數関数モーメント  $s_m$  を使用して連立方程式(6)を作成する。

3: テブリツツ行列  $S$  の SVD を実行し、且つ、最小固有値に対応する固有ベクトルを選択することで、 $m = 0, \dots, K$  について消滅フィルタ係数  $h_m$  を抽出する。

4:  $z$  変換  $h(z) = \sum_{k=0}^K h_k z^{-k}$  の根  $u_k = e^{\lambda_k \frac{T}{2}}$  を計算し、を  $\{t_k\}_{k=0}^{K-1}$  取得する。

5:  $N$  個の式  $y_n - \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right)$  の最小二乗平均解として  $\{a_k\}_{k=0}^{K-1}$  を計算する。

測定値  $y_n$  が雑音を含む場合、第III節で説明する方法を使用して雑音を除去する必要がある。

20

#### 【0 1 1 2】

以上で提案した全ての FRI 再構成方法 ([2], [1], [12], [3]) は、この同一の方法を使用する。特に、形式(2)の  $N$  個のサンプルは、ベクトル  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^\top$  を形成すると考えられる。その場合、それらは(4)のように係数  $c_{m,n}$  と線形結合される。これは、ベクトル  $y$  に  $s = C y = (s_0, s_1, \dots, s_P)^\top$  となる適切な重み行列  $C$  を乗算することに等しい。 $s$  は  $P+1$  個の新しい測定値を有するベクトルであり、 $C$  は位置  $(m, n)$  に係数  $c_{m,n}$  を有する  $(P+1) \times N$  行列である。値  $s$  は、 $k = 0, \dots, K-1$  とするイノベーションパラメータ  $(a_k, t_k)$  を含む冪和の級数の形式で常に表すことができる。その場合、それらは消滅フィルタ法を使用して  $s$  から回復可能である。 $C$  の選択はサンプリングカーネルに依存し、雑音を含まない設定では完全再構成が常に達成されるが、本稿において説明される雑音を含む非理想的な状況において、 $C$  の役割は非常に重要になる。

30

#### 【0 1 1 3】

##### B. 指數関数再生カーネル

指數関数再生カーネルは、そのシフトされたバージョンの線形結合と共に、複素パラメータ  $\alpha_m$  を用いる形式  $e^{\alpha_m t} \varphi_m(t)$  の関数を再生できるあらゆる関数  $\varphi(t)$  である。これは、適切に選択された係数  $c_{m,n}$  と  $C$  対して、以下のように数学的に表現できる。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \varphi(t-n) = e^{\alpha_m t}, \quad (8)$$

40

ここで、 $m = 0, \dots, P$  であり、 $\varphi_m \in C$  である。(8) が当てはまる指數関数再生カーネルは、いわゆる一般化 Strang-Fix 条件 [17] を満たす(付録 A を参照)。特に、式(8)は、以下のとき、及び、そのときに限り成立する。

$$\varphi(\alpha_m) \neq 0 \text{ 及び } \varphi(\alpha_m + 2j\pi l) = 0, \quad (9)$$

ここで、 $m = 0, \dots, P$ 、

$i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

であり、

$$\hat{\varphi}(\alpha_m)$$

は、 $s = \alpha_m$  における  $(t)$  の両側ラプラス変換を表す。

【0 1 1 4】

更に、(8) の係数  $c_{m,n}$  は次式により与えられる。

$$c_{m,n} = \langle e^{\alpha_m t}, \hat{\varphi}(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m t} \hat{\varphi}(t-n) dt = c_{m,0} e^{\alpha_m n}, \quad (10)$$

ここで、関数

$$\hat{\varphi}(t)$$

は、 $(t)$  を有する正規双直交集合を形成し、すなわち、

$$\hat{\varphi}(t)$$

が

$$\langle \hat{\varphi}(t-n), \hat{\varphi}(t-m) \rangle = \delta_{m,n}$$

を満たし、

$$c_{m,0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m x} \hat{\varphi}(x) dx$$

である。

【0 1 1 5】

あらゆる指數関数再生カーネルは、

$$\varphi(t) = \gamma(t) * \beta_{\vec{\alpha}}(t)$$

[1], [18], [19]として書くことができ、ここで、 $(t)$  は任意の関数であり、分布であつてもよく、

$$\beta_{\vec{\alpha}}(t)$$

は E スプラインである。フーリエ変換

$$\hat{\beta}_{\vec{\alpha}}(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega - \alpha}$$

を有する関数  $(t)$  は、 $C$  である一次基底指數スプラインと呼ばれる[18]。そのような関数の時間領域表現は、 $t \in (0, 1)$  の場合は  $(t) = e^{-t}$  であり、それ以外の場合は 0 である。従って、関数  $(t)$  は、コンパクトサポートであり、そのシフトされたバージョンの線形結合は、指數関数  $e^{-t}$  を再生する。高次の基底指數スプライン(Eスプライン)は、一次基底指數スプラインの畳み込みを介して取得可能であり、例えば

$$\beta_{\vec{\alpha}}(t) = (\beta_{\alpha_0} * \beta_{\alpha_1} * \dots * \beta_{\alpha_P})(t)$$

であり、ここで、

$$\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_P)$$

は次数  $P + 1$  の E スプラインである。これはフーリエ領域において以下のように書くこともできる。

$$\hat{\beta}_{\vec{\alpha}}(\omega) = \prod_{m=0}^P \frac{1 - e^{\alpha_m - j\omega}}{j\omega - \alpha_m}, \quad (11)$$

## 【0116】

最高次の E スプラインの長さは  $P + 1$  であり、その正則性は  $P$  と共に増加する（すなわち、それらは  $P - 1$  個の連続する導関数を有する）。これらの関数は、スパン  $\{e^{\alpha_0 t}, e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_P t}\}$

において、あらゆる指数関数を再生できる[1], [18]。 $m = 0, \dots, P$  に対して  $\beta_m(t) = 0$  である場合は常に、関数

$$\beta_\delta(t)$$

は B スプラインに帰着し、指数関数を再生しないが  $P$  次までの多項式を再生することにも注目する。 10

## 【0117】

本稿では、実数値のサンプリングカーネルが扱われる。従って、

$$\gamma(t)$$

及び

$$\beta_\delta(t)$$

は実数値である必要がある。この第 2 の条件（すなわち、

$$\beta_\delta(t)$$

20

が実数値であること）は、指数関数  $\beta_m$  が実数であるか又は複素共役対である場合に満たされることに注目する。更に、指数関数パラメータを  $m = 0, \dots, P$  である  $\beta_m = \beta_0 + m$  の形式に制限する。これらの条件は、 $\gamma(t)$  及び  $\beta_m$  がいずれも実数であるか、あるいは  $= j\beta_0$  が純虚数であることを示す。後者の場合、 $\text{Im}\{\beta_0\} = -P\beta_0 / 2$  である。

## 【0118】

III. 雑音が存在する場合の F R I 信号のサンプリング

「雑音」、又は更に一般的にはモデルミスマッチが、データ収集において存在し、第II-A 節において提示した解決策を非現実的にする。従って、次式で表す測定値を使用できると仮定する。 30

$$\tilde{y}_n = y_n + \epsilon_n = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right) + \epsilon_n. \quad (12)$$

ここで、 $n = 0, \dots, N - 1$  であり、 $\epsilon_n$  は、平均 0 及び標準偏差  $\sigma$  の i.i.d. ガウス確率変数である。サンプルが雑音により破損する場合、式(4)の測定値  $s_m$  の集合が変化し、完全再構成がもはやできなくなる。その場合、 $m = 0, \dots, P$  として次式で示す雑音を含むモーメントを有する。

$$\hat{s}_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \tilde{y}_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n}_{s_m} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \epsilon_n}_{b_m} = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m + b_m. \quad (13)$$

40

ここで、 $k = 0, \dots, K - 1$  であり、

$$x_k = a_k e^{\alpha_k \frac{t_k}{T}}$$

及び  $u_k = e^{\lambda \frac{t_k}{T}}$

## 【0119】

次に、雑音を含むサンプルから F R I 信号を復元するために本稿において使用したアルゴリズムのうちのいくつかを再確認する。また、雑音が存在する場合にどの F R I 信号を回復できるかの精度を解析するために、クラメール・ラオの下限 ( C R B ) を導入する。 50

これは、不偏推定量に適用する平均二乗誤差（MSE）に対する下限である[20]。

### 【0120】

A. 雑音を含むFRIを再構成するための実用的な方法

第II-A節で説明したように、FRI信号の回復処理は、新しい測定値の集合の計算(4)に基づいている。サンプル(2)が雑音により破損する場合、式(4)の測定値 $s_m$ は(13)になる。その結果、

$$\hat{S} = S + B$$

であり、Bが(13)からのエントリ $b_m$ を有するテブリツ行列であるため、(7)は満たされない。[12]において使用される手順の背景にある考えは、

制約 $\|h\|^2 = 1$ の下で

$$\|Sh\|^2$$

を最小化する解を見つけることである。これは、特異値分解(SVD)を使用して解決できる従来の総最小二乗(TLS)問題である。アルゴリズムは、Crozowの反復アルゴリズム[12],[21]を使用することにより、TLSを適用前に

$$\hat{S}$$

の雑音を除去することで更に改善されてもよい。同様の精度を達成する他の方法が存在する。1つのそのような方法は、行列ペンシル問題[22],[23]を解くことに基づき、[11]においてFRIに対して導入された。これは、[3],[16]等の他のFRIに関する出版物において使用されており、本稿のシミュレーションにおいても使用される。

### 【0121】

乱れが白色である場合、すなわち、雑音Bの共分散行列が、を定数係数とし、且つ、Iを単位行列として、 $R_B = E \{ B^H B \} = I$ を満たす場合、上記の全ての方法は効果的に動作する。そのような場合、雑音は、

$$\hat{S}$$

のSVD分解の主値に対して同様の影響を有する[24],[11]。これは、これまでに再確認した回復手順が最も適切である理由を説明する。しかし、多くのFRIカーネルに対して、白色ガウス雑音の仮定は成立しない。その結果、テブリツ雑音行列Bのエントリは不均一な変動を有するか又は相関性を有するようにさえなる場合がある。SVDが適切に動作するために、雑音を「事前に白色化」することが必要である。これは、スペクトル推定の分野において様々な著者により（例えば、[24]においてDE Moorにより）提案される周知の方法である。本稿のシミュレーションにおいて、 $R_A = E \{ A^H A \} = I$ 、且つ、 $A = B W$ であるように、重み行列 $W = R_B^{-1/2}$ [25]を使用することからなる一般的な方法を使用する。従って、白色雑音によって特徴付けられた

$$\hat{S}W$$

のSVD分解を実行する。

### 【0122】

B. 性能の測定

FRI信号は、各自のイノベーションパラメータにより完全に特徴付けられる。例えばK個のディラックのストリームは、位置 $t_k$ 及び振幅 $a_k$ から完全に判定可能である。従って、ベクトル $= (t_0, \dots, t_{K-1}, a_0, \dots, a_{K-1})^T$ を導入し、(12)により与えられる雑音を含むN個のサンプル

$$\hat{y} = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{N-1})^T$$

のベクトルから $\hat{y}$ を推定することを目的とする。簡略にするために、サンプリング周期は

10

20

30

40

50

$T = 1$  であると仮定する。この推定問題の C R B を判定する方法は、 $\mathbf{e}_n$  が共分散行列  $\mathbf{R} = E \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^H \}$  を有する平均 0 のガウス雑音であり、 $\mathbf{e}$  が値  $\mathbf{v}_n$  を有する長さ N のベクトルであると仮定して、[12]において与えられた。この設定において、未知パラメータ

$$\hat{\Theta}(\tilde{\mathbf{y}}) = (\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_{K-1}, \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{K-1})^T$$

のあらゆる不偏推定値は、次式により下限を示される共分散行列を有する。

$$\text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{\mathbf{y}})) \geq (\Phi_{\mathbf{y}}^T \mathbf{R}^{-1} \Phi_{\mathbf{y}})^{-1}, \quad (14)$$

ここで、行列  $\Phi_{\mathbf{y}}$  は (15) により与えられる<sup>(1)</sup>。

$$\Phi_{\mathbf{y}} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_0 \varphi'(t_0) & \dots & a_{K-1} \varphi'(t_{K-1}) & \varphi(t_0) & \dots & \varphi(t_{K-1}) \\ a_0 \varphi'(t_0 - 1) & \dots & a_{K-1} \varphi'(t_{K-1} - 1) & \varphi(t_0 - 1) & \dots & \varphi(t_{K-1} - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 \varphi'(t_0 - (N-1)) & \dots & a_{K-1} \varphi'(t_{K-1} - (N-1)) & \varphi(t_0 - (N-1)) & \dots & \varphi(t_{K-1} - (N-1)) \end{array} \right). \quad (15)$$

((注釈 1) 行列は、における各パラメータに関して

$\tilde{\mathbf{y}}_n$

の導関数を計算することにより取得可能である。すなわち、| の左側の  $\mathbf{y}$  の列は

$\frac{\partial \mathbf{y}_n}{\partial a_k}$

であり、| の右側の  $\mathbf{y}$  の列は

$\frac{\partial \mathbf{y}_n}{\partial t_k}$

である。)

【0 1 2 3】

以上は、雑音を含むサンプル

$\tilde{\mathbf{y}}$

を与えた場合に種々の F R I 復元技術[12], [11]の性能を測定する正しい方法であるが、F R I 再構成方法が実際はモーメント

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{y}}$$

のシーケンスに対して作用することに注目する。従って、測定値

$\bar{\mathbf{s}}$

(サンプル数より少ない場合がある) に関連する C R B が実際に達成可能な最良の性能を示すため、この C R B を見つけることが有用である。この新しい例において、限界は[26]により与えられる。

$$\text{cov}(\hat{\Theta}(\bar{\mathbf{s}})) \geq (\Phi_s^H \mathbf{R}_b^{-1} \Phi_s)^{-1}. \quad (16)$$

ここで、 $\Phi_s$  は以下の形式をとる。

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} a_0 \alpha_0 e^{\alpha_0 t_0} & \dots & a_{K-1} \alpha_0 e^{\alpha_0 t_{K-1}} & | & e^{\alpha_0 t_0} & \dots & e^{\alpha_0 t_{K-1}} \\ a_0 \alpha_1 e^{\alpha_1 t_0} & \dots & a_{K-1} \alpha_1 e^{\alpha_1 t_{K-1}} & | & e^{\alpha_1 t_0} & \dots & e^{\alpha_1 t_{K-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 \alpha_P e^{\alpha_P t_0} & \dots & a_{K-1} \alpha_P e^{\alpha_P t_{K-1}} & | & e^{\alpha_P t_0} & \dots & e^{\alpha_P t_{K-1}} \end{pmatrix} \quad (17)$$

また、 $R_b = E \{ b b^H \}$  である。ここで $(\cdot)^H$  はエルミート転置であり、 $b$  は雑音を含む $P+1$  個の値 $b_m$  のベクトルである。

【0124】

10

更に、サンプルに加えられる雑音 $e_n$  は、分散 $\sigma^2$  を有する加法性白色ガウス雑音であると仮定したため、フィルタリングされた雑音の共分散行列は、 $R_b = E \{ b b^H \} = \sigma^2 C C^H$  である。そのため、公式(14)及び(16)の間には、行列 $C$ を介して表される直接的な関係が存在する。これを確認するために、

$$\hat{s} = C(y + e) = s + b$$

であること、及び $s = C_y$  あることに注目する。更に、雑音 $e_n$  が AWGN であるため、次式が成立することが既知である。

$$\text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{y})) \geq (\Phi_y^H R_b^{-1} \Phi_y)^{-1} = \sigma^2 (\Phi_y^H \Phi_y)^{-1}$$

20

そのため、次式が成立する。

$$\text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{s})) \geq (\Phi_s^H R_b^{-1} \Phi_s)^{-1} = \sigma^2 (\Phi_y^H C^H (C C^H)^{-1} C \Phi_y)^{-1} = \sigma^2 (\Phi_y^H C^\dagger C \Phi_y)^{-1}$$

ここで、

$$C^\dagger = C^H (C C^H)^{-1}$$

は $C$  の左側擬似逆行列である。モーメントの数 $P+1$  がサンプル数 $N$  と等しい場合、双方の公式は等価である。これは、

$$C^\dagger C = C^{-1} C = I_N$$

30

から容易にわかる。係数の行列 $C$  が正方行列であり可逆である場合、各公式を使用して予測される CRB は一致する。サンプル自体に基づいて推定を向上させるサンプルの線形結合が存在しないため、これは直感的に最適な構成である。 $P+1 < N$  の場合にモーメントを介してイノベーションパラメータを回復することは、次に最適な構成である。

【0125】

$C$  の条件が十分に適切である場合、FRI アルゴリズムは限界(16)に到達することを実験的に確認した。従って、次の目的は、 $P$  のあらゆる選択に対して(16)を最小化する適切な条件の $C$  を生じるカーネルを設計することである。(2)

40

((注釈2) 本節の範囲を超える過剰に多くの技術的詳細を説明しなくても、条件 $P-1 = N$  がブロック型のサンプリングのみに適用され、例えば $N$  個のサンプルを使用して周期信号をサンプリングする場合のみに適用されることがわかる。この条件は、サンプル数が無限である無限長信号には適用できず、順次再構成アルゴリズムは、サンプル数が変化する可能性のあるブロックに対して作用する。)

【0126】

#### IV. 最適な指数関数再生カーネル

上述したように、指数関数再生カーネルはあらゆる関数

$$\varphi(t) = \gamma(t) * \beta_\alpha(t)$$

50

[1], [18] であり、ここで、 $\beta_\alpha(t)$  は任意であり、

$$\beta_\alpha(t)$$

は E スプラインである。本節において、これらのカーネルを用いる F R I 復元技術を可能な限り安定化するために、 $m = 0, \dots, P$  である指數関数パラメータ  $\alpha_m = -j(m + P/2)$  及び関数  $\beta_\alpha(t)$  を選択する方法のルールを見つけてたい。最適なパラメータを探すことは、係数の行列 C の最適化につながる。従って、最初に、C が満たす必要のある特性を判定し、その後、正しい C をもたらすカーネルを設計する。

### 【0127】

#### A. C の正しい選択

F R I 再構成段階の第 1 のステップは、サンプル  $y$  のベクトルをモーメント  $s = Cy$  のベクトルに変換することである。従って、最初の目的は、適切な条件の C を取得することである。なお、本ステップの妥当性は[3]において既に強調されている。更に、行列 C は、 $n = 0, \dots, N-1$  及び  $m = 0, \dots, P$  である場合に、位置  $(m, n)$  の要素  $c_{m,n} = c_{m,0} e^{\alpha_m n}$  によって次式のように構成される。

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{1,0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{P,0} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & e^{\alpha_0} & \cdots & e^{\alpha_0(N-1)} \\ 1 & e^{\alpha_1} & \cdots & e^{\alpha_1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\alpha_P} & \cdots & e^{\alpha_P(N-1)} \end{pmatrix}}_V$$

ここで、D は対角行列であり、V はヴァンデルモンド行列である。従って、安定した C を有するために、D の対角要素の絶対値が同一であること、すなわち  $|c_{m,0}| = 1$  であることが求められる。更に、V の要素が次式のように純虚数であることが求められる。

$m = 0, \dots, P$  に対して

$$e^{\alpha_m} = e^{j\frac{\pi}{L}(2m+P)}$$

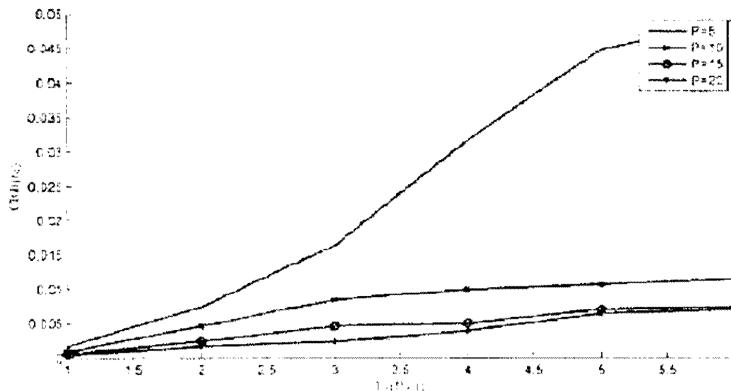
すなわち、 $\alpha_m = 0$  及び  $0 = 2\pi/L$ 。  
【0128】

明らかに、純虚数  $\alpha_m$  はヴァンデルモンド行列 V の条件を改善する[27]。従って、(18)において最良の L を見つけるという問題のみが残る。C の条件が適切である場合に F R I アルゴリズムが C R B (16) に達することができることが実験からわかっているため、L を決定する 1 つの方法は、単一のディラックの位置に対して (16) を最小化する値を選択することである。P 及び L の種々の選択に対して、Figure 2 に示すように、 $L = P + 1$  の場合に最小化が常に達成されることがわかる。

10

20

30



10

Figure 2 CRB対L<sub>o</sub> 式(18)においてLを変化させる場合の |c<sub>m,0</sub>| = 1, m = 0, ..., P を満たす係数に対する種々のCRB値(16) ( $\sigma = 1$ )を示す。任意のPの値に対して、L = P + 1 の場合にCRBは最小化される(なお、全ての線は単調増加している)。

### 【0129】

この選択は、指數関数が単位円全体を範囲に含むことを保証し、これは幕和の級数のパラメータを復元する場合に最良の構成であることが既知であるため[28]、このことはある程度まで当然である。最後に、(16)を最小化することに加えて、P + 1 = N 及び L = P + 1 とする場合、(16)におけるモーメントに基づくCRBが(14)におけるサンプルに基づく限界と一致することが更に保証され、最良の可能な性能が達成される。この状況において、行列Cは正方のユニタリ行列になる。これは、条件数が1であるため、最も安定する数値変換である。

20

### 【0130】

要約すると、最良の指數関数再生カーネルは、m = 0, ..., P とする場合、

$$\alpha_m = j \frac{\pi}{P+1} (2m - P)$$

の形式の指數を用いて指數関数を再生し、且つ、|c<sub>m,0</sub>| = 1 を有する必要がある。最後に、カーネルの次数は可能な限り P + 1 = N であるべきである。次節において、そのようなカーネルを取得する方法を示す。

### 【0131】

30

#### B. 指數関数MOMS

前節の解析を用いて、最高次及び最小サポート(eMOMS)の最適な指數関数再生カーネルを設計する。m = 0, ..., P に対して |c<sub>m,0</sub>| = 1 であること、及び、指數関数パラメータは以下の形式であることを必要とする。

$$\alpha_m = j\omega_m = j \frac{\pi}{P+1} (2m - P) \quad m = 0, \dots, P, \quad (19)$$

しかし、以下の方法はあらゆる値のPに対して使用できるため、Pに関する仮定を行わない。

### 【0132】

40

あらゆる指數関数再生カーネル(t)を

$$\varphi(t) = \gamma(t) * \beta_\alpha(t)$$

と書くことができるることを考慮することにより、|c<sub>m,0</sub>| = 1 が満たされるように(t)を設計する。(3)を使用することで次式が得られることに注目する。

$$e^{\alpha_m t} = c_{m,0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\alpha_m n} \varphi(t - n)$$

その結果、

$$\begin{aligned} 1 &= c_{m,0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\alpha_m(n-t)} \varphi(t-n) \\ &\stackrel{(a)}{=} c_{m,0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\alpha_m + j2\pi k) e^{j2\pi k t} \\ &\stackrel{(b)}{=} c_{m,0} \hat{\varphi}(\alpha_m), \end{aligned}$$

となり、ここで、(a)はポアソンの和公式(3)から得られ、(b)は一般化Strang-Fix条件(9)の適用から得られる。

((注釈3) ポアソンの和公式：

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

)

従って、あらゆる指數関数再生カーネルに対して、

$$c_{m,0} = \hat{\varphi}(\alpha_m)^{-1}$$

であることがわかる。|c<sub>m,0</sub>| = 1 とすることは、

$$|\hat{\varphi}(\alpha_m)| = 1$$

を必要とすることと等価であることが認識される。最後に、

$$\hat{\varphi}(\alpha_m) = \hat{\gamma}(\alpha_m) \hat{\beta}_{\bar{\alpha}}(\alpha_m)$$

であることを使用し、且つ、 $\omega_m = j \alpha_m$ においてラプラス変換を評価することにより、

$$\hat{\gamma}(\omega_m)$$

に対する以下の条件に到達する。

$$|\hat{\varphi}(\omega_m)| = |\hat{\gamma}(\omega_m) \hat{\beta}_{\bar{\alpha}}(\omega_m)| = 1 \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow |\hat{\gamma}(\omega_m)| = |\hat{\beta}_{\bar{\alpha}}(\omega_m)|^{-1},$$

この場合、各関数のフーリエ変換を扱うことになる。

【0133】

(20)を満たす全ての許容できるカーネルの中で、最短サポートP+1を有するカーネルに関心を有する。従って、元のEスプライン

$$\beta_{\bar{\alpha}}(t)$$

の種々の導関数の線形結合により与えられるカーネルについて考える。すなわち、

$$\varphi(t) = \sum_{\ell=0}^P d_\ell \beta_{\bar{\alpha}}^{(\ell)}(t), \quad (21)$$

ここで、

$$\beta_{\bar{\alpha}}^{(\ell)}(t)$$

は

$$\beta_{\vec{\alpha}}(t)$$

の第1番目の導関数であり、

$$\beta_{\vec{\alpha}}^{(0)}(t) = \beta_{\vec{\alpha}}(t)$$

であり、且つ、 $d_1$  は係数の集合である。これは、( t ) がディラックのデルタとその次数 P までの導関数との線形結合であると述べると同様である[19]。これらのカーネルは、依然として指數関数  $e \times p \{ c_m t \}$  を再生でき、[29]において紹介された最高次最小サポート ( M O M S ) カーネルの変形である。そのため、それらを指數関数 M O M S ( 又は e M O M S ) と呼ぶ。それらは、[30]において提示された一般化 E スプラインの限界ファミリーの特定の例である。この公式の利点は 2 つある。第 1 に、変更されたカーネル ( t ) は、

$$\beta_{\vec{\alpha}}(t)$$

と同様に最小サポート  $P + 1$  のカーネルである。第 2 に、 $|c_{m,0}| = 1$  を達成するためには、制約 ( 20 ) を満たす係数  $d_1$  を見つけるだけでよい。次式により与えられる、( 21 ) のフーリエ変換

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{\beta}_{\vec{\alpha}}(\omega) \sum_{\ell=0}^P d_\ell(j\omega)^\ell$$

を使用する場合、結果として得られる多項式

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sum_{\ell} d_\ell(j\omega)^\ell$$

が、 $m = 0, 1, \dots, P$  に対して点

$$(\omega_m, |\hat{\beta}_{\vec{\alpha}}(\omega_m)|^{-1})$$

の集合を補間するように係数  $d_1$  を選択することにより、( 20 ) を満たしうることがわかる。

#### 【 0 1 3 4 】

$c_{m,0}$  が全ての  $m$  に対して絶対値 1 を有するということを満たすカーネルを設計すると、位相の曖昧さが残る。位相を決定することは、更なる自由度を導入して、( 21 ) における E スプラインに対して時間シフト を使用することと同等である。指數関数 M O M S が  $|c_{m,0}| = 1$  であり、且つ、パラメータ ( 19 ) が連続時間関数であるためには、 $m = 0, 1, \dots, P$  に対して、 $|c_{m,0}| \geq 1$  以上、且つ、 $P$  以下の整数である場合に、 $|c_{m,0}| = |c_{m,0}| e \times p \{ j_m \}$  であることを示すことが可能である。

#### 【 0 1 3 5 】

Figure 3 には、上述した手順を実現することにより取得されるカーネルのうちのいくつかを提示している。興味深いことには、付録 B に示すように、これらの特定の関数は、ディリクレ (Dirichlet) カーネルの 1 周期と常に等しい。また、 $P + 1 = N$  の場合、この指數関数再生カーネルのファミリーを使用して派生するシナリオは、入力、すなわち、等価的にはサンプリングカーネルを周期化する場合に [2] の元の F R I 公式に収束することを指摘する。

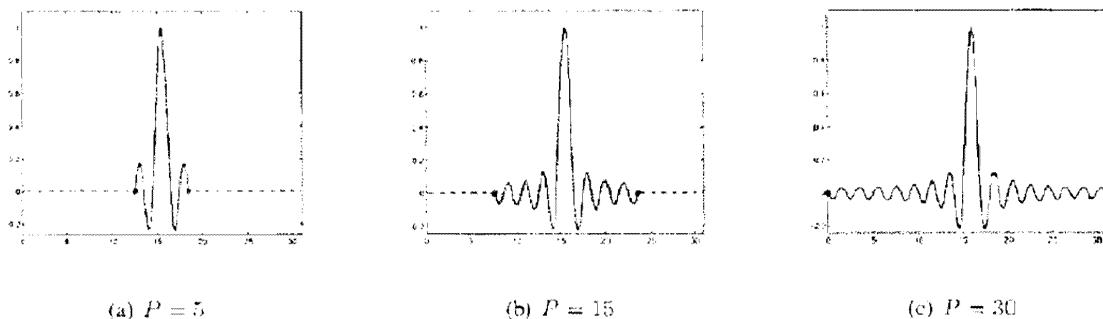


Figure 3 指数関数MOMSの例。サポート  $P+1 \leq N = 31$  個のサンプルを有する30個の可能なカーネルのうちの3つを示す。それらは、 $P$ が偶数である場合の周期  $P+1$ 、又は  $P$ が奇数である場合の周期2( $P+1$ )のディリクレカーネルの1周期と一致する(付録Bを参照)。それらは全て、 $\Delta = [(P+1)/2]$ を中心とする連続時間関数であるように  $c_{m,0}$  の位相を選択することによって形成される。それらは、 $T=1$  の場合のサンプリング間隔の中央に配置して示されている。

【 0 1 3 6 】

## V. イノベーション率有限信号の汎用サンプリング

前節において、雑音を含む F R I サンプリングに対して最適な指標関数再生カーネルを設計する方法を示した。しかし、多くの実際の状況において、サンプリングカーネル ( $t$ ) を選択する自由はない。

【 0 1 3 7 】

F R I 設定における重要な点は、 $(t)$ が指指数関数を再生する能力であり、これにより、信号再構成問題をスペクトル線推定理論におけるProny法に帰着できる。本節では、この条件を緩め、指指数関数再生特性(3)が必ずしも成立しなくてもよいあらゆる関数 $(t)$ について考える。それらの関数に対して、指指数関数の再生が正確なものではなく近似であるように係数 $c_{m,n}$ を見つけることは依然として可能である。この近似再生及び対応する係数 $c_{m,n}$ を使用することで、それらのカーネルを使用して取得されたサンプルからF R I 信号を回復することを提案する。

【 0 1 3 8 】

この新しいアプローチは、複数の利点を有する。第1に、あらゆるカーネル ( $t$ ) と共に使用できるという点で汎用である。実際、以下の節において示すように、この新しい定式化はカーネルの正確な知識すら必要としない。第2の、この新しい方法を用いる F R I 信号の再構成は正確なものにはならないが、多くの場合、適切な反復アルゴリズムにより再構成誤差を任意に小さくできることを示す。最後に、F R I に関する文献において提案されるいくつかの不安定なカーネルの雑音に対する復元力を増加するために本方法を使用できる。例えば多項式スプライン又はガウス関数等のカーネルは、条件が非常に悪い再構成手順の原因となる。指數関数の近似再生に基づいて適切に選択された係数  $c_{m,n}$  から形成された行列に元の  $C$  を置換することにより、同一のカーネルを用いて安定性がはるかに高い再構成が達成されることを示す。

[ 0 1 3 9 ]

## A. 指数関数の近似再構成

指数関数  $e^{-n}$  を近似するために、関数  $\phi(t)$  及びその整数シフトを使用したいと仮定する。特に、次式のように係数  $c_n$  を見つけたい。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi(t-n) \cong e^{\alpha t}. \quad (22)$$

【 0 1 4 0 】

この近似は、(t)が一般化Strang-Fix条件(9)を満たす場合のみ正確である。他の何らかの関数の場合、(22)に最もよくフィッティングする係数  $c_n$ を見つけることが特に有用である。そのような係数を見つけるために、 $c_n = c_0 e^{-n}$ を直接使用し(4)、1周期関数

$$g_\alpha(t) = c_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(t-n)} \varphi(t-n). \quad (23)$$

を使用する。

((注釈4)正確な指數関数再生係数は  $c_n = c_0 e^{-\alpha n}$  を常に満たす。以下、本節を通して導出する異なる近似係数の集合も、同一の形式を有すると予想する。)

#### 【0141】

この場合、 $(t)$ の整数シフトを用いて指數関数  $e^{-t}$  を近似することは、定数1により  $g_\alpha(t)$  を近似することに変換可能であることがわかる。これは、 $c_n = c_0 e^{-\alpha n}$  を減算し、且つ、 $e^{-t}$  を左側に移動させることにより、(23)の右側の形式に(22)を書き直すことができるためである。

#### 【0142】

ポアソンの和公式の結果、 $g_\alpha(t)$  のフーリエ級数展開が次式により得られることがわかる。

$$g_\alpha(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{j2\pi lt} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_0 \varphi(\alpha + j2\pi l) e^{j2\pi lt}$$

また、本稿の近似問題が次式に帰着することがわかる。

$$g_\alpha(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_0 \varphi(\alpha + j2\pi l) e^{j2\pi lt} \approx 1. \quad (24)$$

#### 【0143】

これは、一般化Strang-Fix条件(9)と指數関数の近似との間の関係を更に深く示している。 $(t)$ が一般化Strang-Fix条件(9)を満たす場合、

$$l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

に対して

$$\varphi(\alpha + j2\pi l) = 0$$

であり、(24)は、

$$c_0 \varphi(\alpha) \approx 1$$

の場合に正確に成立する。それ以外の場合、

$$l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

に対して項

$$\varphi(\alpha - j2\pi l)$$

は0にならず、

$$g_\alpha(t) \not\approx 1$$

になる係数  $c_0$ のみを見つけられる。しかし、値

$$\hat{\varphi}(\alpha + j2\pi l)$$

が 0 に近いほど、(22) における近似が改善する。

【0144】

一般に、(t) は任意の関数であってもよく、(22) が成立するために異なる係数  $c_n$  の集合を見つけることができる。使用する係数に関係なく、 $g(t)$  のフーリエ級数展開を使用することにより、本開示の近似の精度を判定できる。実際、係数  $c_n = c_0 e^{-n}$  を用いる関数

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi(t - n)$$

10

による  $f(t) = e^{-t}$  の近似の誤差は、次式に等しい。

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= f(t) - s(t) = e^{\alpha t} [1 - g(t)] \\ &= e^{\alpha t} \left[ 1 - c_0 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\alpha + j2\pi l) e^{j2\pi lt} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

なお、(t) のラプラス変換が十分速く減衰する場合、フーリエ級数展開の殆どの項は誤差に対する正確な限界を有するために必要ない。

20

【0145】

係数  $c_n = c_0 e^{-n}$  の自然な選択は、最小二乗近似により与えられる係数である。 $f(t)$  は二乗可積分でないが、(t - n) により張られる部分空間への  $f(t)$  の正射影を計算することにより、係数を依然として取得できる[31]。それらは次式の形式をとる。

$$c_n = \frac{\hat{\varphi}(-\alpha)}{\hat{a}_\varphi(e^\alpha)} e^{\alpha n}$$

30

ここで、

$$\hat{a}_\varphi(e^\alpha) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_\varphi(l) e^{-\alpha l}$$

は、 $z = e^{-\alpha}$  において評価された

$$a_\varphi(l) = \langle \varphi(t - l), \varphi(t) \rangle$$

の  $z$  変換である。

【0146】

40

最小二乗近似は、(t) の正確な知識を必要とするという欠点を有する。しかし、上述のように、(t) のラプラス変換が十分速く減衰する場合、項

$$\hat{\varphi}(\alpha + j2\pi l)$$

は

$$l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

の場合に 0 に近いと仮定できる。この場合、(25) における誤差は

$$c_0 = \hat{\varphi}(\alpha)^{-1}$$

を選択することにより容易に最小化されることがわかる。この第2の種類の近似を定数最小二乗 (constant least-squares) と呼ぶ。その簡潔さに加えて、

$$c_n = \hat{\varphi}(\alpha)^{-1} e^{\alpha n}$$

を選択することの第2の利点は、における ( $t$ ) のラプラス変換の知識のみが必要であることである。 $m = 0, \dots, P$  である指數関数  $e^{-\alpha t}$  の近似再生を必要とする F R I 設定の場合、この簡略化された公式では、 $m = 0, \dots, P$  である  $s_m$  における ( $t$ ) のラプラス変換の知識のみが必要である。

#### 【0147】

最後に、第3の興味深い係数選択方法は、 $s(t)$  が

$$t = l \in \mathbb{Z}$$

において  $f(t)$  を正確に補間することを保証する係数を選択することである [32], [18]。これらの係数は以下の通りである。

$$c_n = \frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha l} \varphi(l)} e^{\alpha n}$$

なお、補間係数を使用するためには、整数の瞬間ににおける ( $t$ ) に関する情報のみが必要である。以上の結果を表1に要約する。

表1  
近似再生(22)用の係数

| 種類     | 係数  |
|--------|---|
| 最小二乗近似 | $c_n = \frac{\hat{\varphi}(-\alpha)}{\hat{a}_\varphi(\alpha)} e^{\alpha n}$     |
| 定数最小二乗 | $c_n = \hat{\varphi}(\alpha)^{-1} e^{\alpha n}$                                 |
| 補間     | $c_n = \frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha l} \varphi(l)} e^{\alpha n}$ |

#### 【0148】

経験上、近似するための指數関数  $e^{-t}$  が、純虚数でない指數を有する場合、最小二乗係数は、より少ない誤差 (25) を提供する。それ以外の場合、定数最小二乗係数も同様に適切である。整数の時点におけるカーネルの値を与えられた場合、補間係数は計算が非常に容易である。しかし、それらは低い近似品質を常に提供する。従って、本稿の残りの部分では、定数最小二乗係数を使用する。

#### 【0149】

上記の解析の一例をFigure 4に示す。ここでは、線形スプラインの線形結合を使用して指數関数を近似したい。まず、当該スプラインは次数0及び1の多項式を正確に再生する。これをFigure 4の(a)及び(b)に示す。同一の関数を用いて、 $m = 3, \dots, 0$  に対する4つの複素指數関数

10

20

30

40

50

$$e^{j\frac{\pi}{16}(2m-7)t}$$

を定数最小二乗係数

$$c_{m,n} = \varphi\left(\frac{\pi}{16}(2m-7)\right)^{-1} e^{\frac{\pi}{16}(2m-7)n}$$

で近似再生する。それらの実数部の近似をFigure 4の(c)～(f)に示す。いくつかの指數関数は他の指數関数より適切に近似されることがわかる。本例において、それらは低周波数を有するものである。更に高次のスプラインを使用した場合、近似品質は向上するだろう。しかし、例示するために線形スプラインを選択している。また、近似可能な指數関数の数は、スプラインの次数に依存しない。

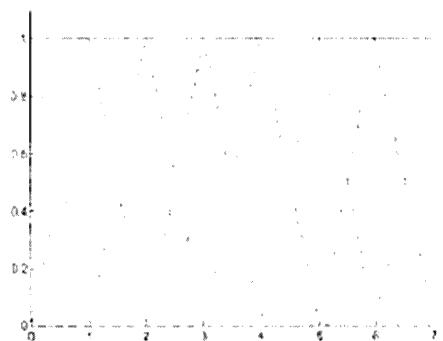
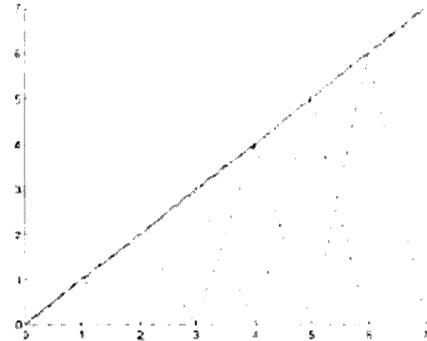
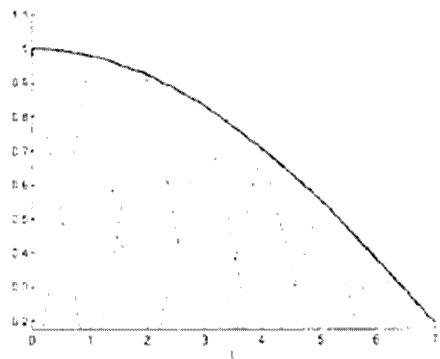
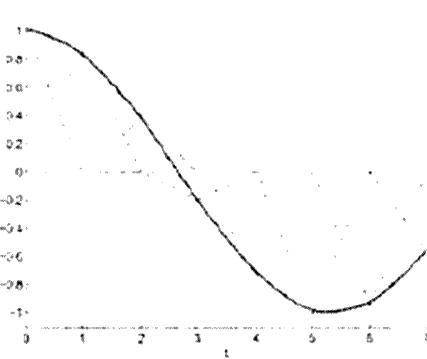
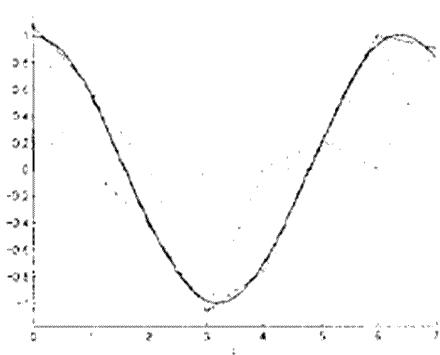
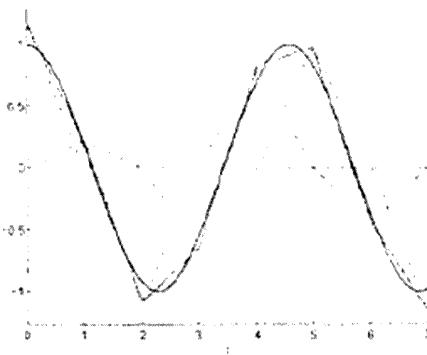
(a)  $t$  の再生(b)  $t$  の再生(c)  $\text{Re}\{e^{-j\frac{\pi}{16}t}\}$  の近似(d)  $\text{Re}\{e^{-j\frac{\pi}{8}t}\}$  の近似(e)  $\text{Re}\{e^{-j\frac{\pi}{4}t}\}$  の近似(f)  $\text{Re}\{e^{-j\frac{\pi}{2}t}\}$  の近似

Figure 4 Bスプラインカーネルの再生／近似能力。図(a)及び図(b)は、線形スプラインを用いる次数0及び1の多項式の正確な再生を示す。図(c)～図(f)は、線形スプラインを使用して、定数最小二乗係数(表1)を用いた、 $m=3, \dots, 0$ に対する4つの複素指數関数、 $e^{j(\omega_m t + \phi_m)}$ の実数部の近似を示す。スプラインの重み付け及びシフトされたバージョンを青色の破線で示し、再構成された多項式及び指數関数を赤色の実線で示し、再生される原関数を黒色の実線で示す。

## 【0150】

B . F R I の復元の近似  
ディラックのストリーム

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \delta(t - t_k)$$

及び以下のサンプルについて再度考える。

10

20

30

40

50

$$y_n = \left\langle x(t), \varphi \left( \frac{t}{T} - n \right) \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi \left( \frac{t_k}{T} - n \right). \quad (26)$$

## 【0151】

サンプル(26)からディラックの位置及び振幅を回復したいが、本例ではサンプリングカーネルについて何も仮定しない。 $m = 0, \dots, P$ 、 $\varphi_m = \varphi_0 + m$  且つ  $\varphi_0 = C$  である指数関数  $e \times p \{ \varphi_m t \}$  を近似する  $(t)$  に対する適切な係数を探す。前節から、

$$c_{m,0} = \hat{\varphi}(\alpha_m)^{-1}$$

10

である  $c_{m,n} = c_{m,0} e \times p \{ \varphi_m n \}$  を選択する場合、適切な近似が達成されることがわかっている。従って、 $\varphi_m, m = 0, \dots, P$  における  $(t)$  のラプラス変換がわかるだけでよい。また、 $P$  は  $(t)$  のサポートに関連付けられる必要がないが、 $P = 2K - 1$  を条件とするあらゆる値を使用できる。

## 【0152】

イノベーションパラメータ  $(t_k, a_k)$  を回復するために、指数関数の正確な再生の場合と同一の方法を使用するが、本例において、モーメントは次式であることがわかっている。

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n = \left\langle x(t), \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \varphi \left( \frac{t}{T} - n \right) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m - \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi_m \left( \frac{t_k}{T} \right)}_{\zeta_m} \end{aligned} \quad (27)$$

20

ここで、

$$x_k = a_k e^{\alpha_k \frac{t_k}{T}} \text{ 及び } u_k = e^{\lambda_k \frac{t_k}{T}}$$

30

である。(25)の近似誤差  $\varepsilon_m(t)$  によるモデルミスマッチが存在し、これは  $\varepsilon_m$  に等しい。これを雑音として扱い、第III節の方法を使用して信号のパラメータを回復する。モデルミスマッチは、係数  $c_{m,n}$ 、値  $\varepsilon_m$  及び  $P$ 、並びにカーネル  $(t)$  により決定される近似の品質に依存する。他の形態の雑音と比較して  $\varepsilon_m$  が無視できるほど小さい場合、手順は十分に適切である。しかし、雑音を殆ど含まない設定において、ディラックの推定は、アルゴリズム2の欄に示す反復アルゴリズムを使用して改善可能である。本アルゴリズムの基本的な考えは、ディラックの位置の推定値を与えられた場合、 $\varepsilon_m$  の近似を計算でき、それを使用してモーメント  $s_m$  の計算を改善できることである。

**アルゴリズム2 指数関数の近似を使用したK個のディラックから成る系列の復元**

- 1 : 元のデータからモーメント  $s_m^0 = \sum_n c_{m,n} y_n$  を計算し、 $\varepsilon_m^1 = s_m^0$  を設定する。
- 2 :  $s_m^i$  を使用して連立方程式 (6) を作成し、 $m = 0, \dots, M$  及び  $M \geq K$  である消滅フィルタ係数  $h_m$  を回復する。
- 3 :  $h_m$  の根から値  $a_k^i$  を計算し、 $i$  番目の反復における位置  $t_k^i$  を判定する。
- 4 : (5)において最初の  $K$  個の連続する式を解くことにより取得される  $x_k^i$  から振幅  $a_k^i$  を見つける。
- 5 : 以下の式を使用して、元のデータに基づいて計算されたモーメントからモデルミスマッチを除去することにより、次の反復  $i + 1$  におけるモーメントを再計算する。

$$s_m^{i+1} = s_m^0 + \sum_{k=0}^{K-1} a_k^i \varepsilon_m(t_k^i)$$

ここで、 $m = 0, \dots, P$  であり、 $\varepsilon_m(t)$  は近似の誤差である (25)。

- 6 : 値  $(a_k^i, t_k^i)$  が収束するまでステップ 2 ~ 5 を繰り返す。

10

**【0153】****C. パラメータ  $c_m$  を選択する方法**

第IV節において、サンプリングカーネルの設計を完全に制御できる場合、サンプルと同数のモーメントを使用する必要があり、すなわち  $P + 1 = N$  であり、指数関数パラメータは純虚数であり、且つ、

$$\alpha_m = j \frac{\pi}{P+1} (2m - P)$$

20

の形式であり、係数  $c_{m,n}$  は  $m = 0, \dots, P$  に対して  $|c_{m,0}| = 1$  である必要があると判定した。しかし、近似された FRI のシナリオでは、サンプリングカーネルは固定され、モーメントの数  $P + 1$  及び値  $c_m$  のみを選択でき、 $|c_{m,0}| = 1$  とすることができない。

**【0154】**

このことは、 $c_m$  の選択におけるトレードオフにつながる。一方で、 $c_m$  は純虚数であること、すなわち  $c_m = j \omega_m$  であること及び単位円全体に及ぶことが求められる。他方で、値

$$c_{m,0} = \hat{\varphi}(\omega_m)^{-1}$$

30

は可能な限り 1 に近い絶対数を有することが求められる。

$$|\hat{\varphi}(\omega)|$$

は通常はローパスフィルタであるため、 $m = 0, \dots, P$  の場合の条件

$$|c_{m,0}| \approx 1$$

は全ての  $c_m$  が 0 に非常に近い場合に満たされ、これは単位円に及ぶこととは対照的である。従って、次式の形式となるように指数関数パラメータを選択し、上記のトレードオフを最適化する  $P$  及び  $L$  を判定する。

$$\alpha_m = j\omega_m = j \frac{\pi}{L} (2m - P) \quad m = 0, \dots, P. \quad (28)$$

40

**【0155】**

この場合も、单一のディラックの位置を回復する場合に C R B (16) を最小化する  $P$  及び  $L$  の値を選択するという基準に従う。解析された殆どの例において、最良の  $P$  は、通常はサンプリングカーネル ( $t$ ) のサポート以上であり、 $L$  は、 $P + 1 \leq L \leq 4(P + 1)$  の範囲内であることがわかった。 $(t)$  が 6 次の B スプラインである場合の  $L$  の選択の一例を Figure 5 に示す。本例では、最初に  $L$  に対する値を判定し、パラメータ (28) を計算する。その後、 $m = 0, \dots, P$  に対して係数

50

$$c_{m,n} = \hat{\varphi}(\omega_m)^{-1} e^{j\omega_m n}$$

を計算する。ここで、

$$\hat{\varphi}(\omega)$$

は  $(t)$  のフーリエ変換である。最後に、行列  $C$  を作成し、単一のディラックについて (16) を計算する。最小値は常に  $L = 1.5(P+1)$  の近辺である。

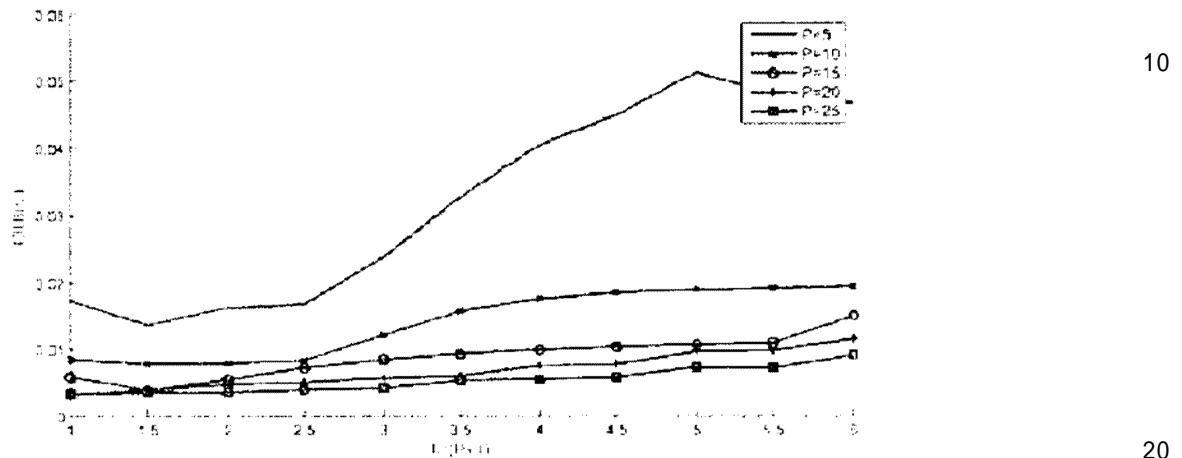


Figure 5 CRB対  $L$ 。  $L$ を変化させた場合の指数関数パラメータ(28)に対する異なるCRB値(16) ( $\sigma = 1$ )を示す。  $m = 0, \dots, P$ に対して  $c_{m,n} = \hat{\varphi}(\omega_m)^{-1} e^{j\omega_m n}$  を使用し、 $\hat{\varphi}(\omega)$  は6次のBスプラインのフーリエ変換である。なお、最小値は常に  $L = 1.5(P+1)$  の近辺である。

### 【0156】

#### VI. シミュレーション

次に、本稿の主要な貢献を実証するためのシミュレーション結果を提示する。特に、サンプリングカーネルが多項式スプラインである場合の、第IV - B 節で紹介した e M O M S カーネルの性能及び第V節で紹介した近似 F R I 復元方法の性能を示す。

### 【0157】

#### A. 実験の設定

$K$  個のディラックから成る系列を入力として有するため、 $n = 0, \dots, N - 1$  に対して

$$y_n = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right)$$

を直接計算することにより、Figure 1 の方法に従って  $N$  個のサンプルを取得する。

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log \frac{\|Y\|^2}{N_p \sigma^2}$$

として定義される目標信号対雑音比に従って選択される分散<sup>2</sup>の加法的白色ガウス雑音を用いてサンプルを破損させる。最後に、雑音を含む  $P + 1$  個のモーメントを計算し、[1]と同様に行列ペンシル法を使用して、入力のイノベーションパラメータ

$$\{a_k, t_k\}_{k=0}^{K-1}$$

を回復する。

### 【0158】

時間位置の推定における誤差は回復が最も困難なパラメータであるため、そのような誤差に主に関心がある。各ディラックについて、この誤差の標準偏差を次式に示す。

$$\Delta t_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{I-1} (\hat{t}_k^{(i)} - t_k)^2}{I}} \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (29)$$

ここで、

$$\hat{t}_k^{(i)}$$

は反復  $i$  における推定される時間位置であり、 $I$  は反復の総数である。固定された信号対雑音比の範囲に対して (29) を計算し、S N R 毎に  $I = 1000$  の雑音の実現を使用して結果を平均する。性能 (29) と、第III節の 2 つの異なるクラメール・ラオ限界 (C R B)、すなわちサンプルに基づく C R B (14) 及びモーメントに基づく C R B (16) により予測した分散の平方根とを比較する。  
10

#### 【0159】

##### B . 指数関数 M O M S

Figure 6 の (a) 及び (b)において、標準的な E スプライン及び第IV - B 節の指数関数 M O M S カーネルを使用して、 $N = 31$  個のサンプルから  $K = 2$  個のディラックを回復する場合のシミュレーション結果を示す。前者は、 $m = 0, \dots, P$  に対して純虚数指数

$$\alpha_m = j \frac{\pi}{2(P+1)} (2m - P)$$

20

により特徴付けられる。

#### 【0160】

考察されるあらゆる次数  $P + 1$  の場合において、e M O M S は、E スプラインより性能が優れていることがわかる。更に、e M O M S は、モーメントに基づく C R B (赤色で示され、凡例では s - C R B と表記) を常に達成する。この限界は、 $P + 1$  の値が増加するにつれてサンプルに基づく C R B (黒色で示され、凡例では y - C R B と表記) に近付き、 $P + 1 = N$  の場合、予想通り C R B と一致する。e M O M S の安定性を更に示すために、Figure 6 の (c) に、 $= N T = 1$  にわたりランダムな間隔で位置し、且つ、任意の振幅を有する  $K = 20$  個のディラックの回復を示す。信号対雑音比は 15 d B であり、 $N = 61$  個のサンプルを使用し、 $P + 1 = N$  である。  
30

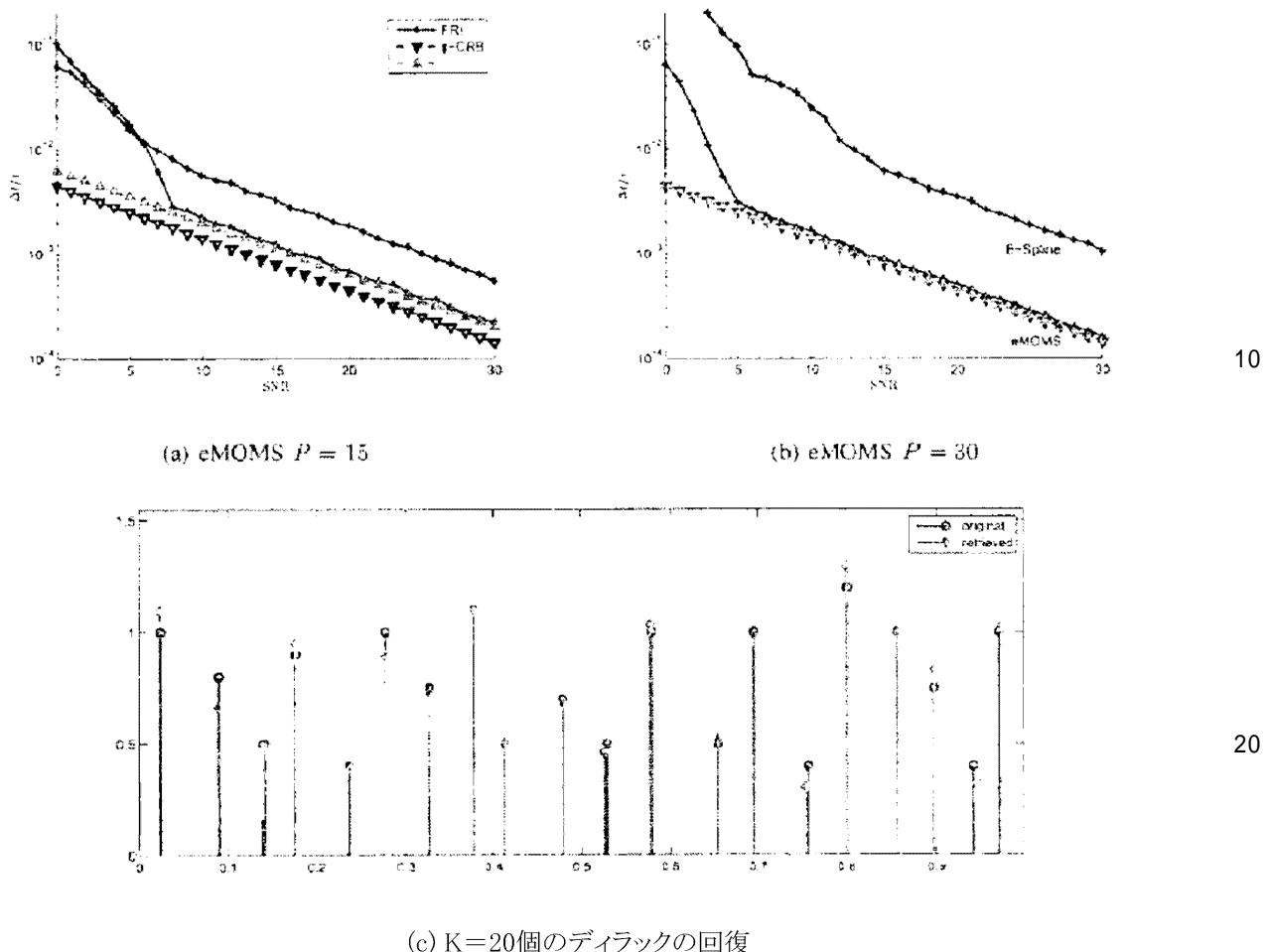


Figure 6 指数関数MOMSカーネルの性能。(a)及び(b)は、 $N=31$ 個のサンプルに雑音を付加した場合のEスプラインの性能と、異なる次数 $P+1$ の指数関数MOMSカーネルの性能とを比較する。最初の $K=2$ 個のディラックの復元を示す。eMOMSはEスプラインより性能が常に優れ、モーメントに基づくCRB(s-CRB)を達成することがわかる。この限界は、 $P+1$ の値が増加するにつれてサンプルに基づくCRB(y-CRB)に近付き、 $P+1=N$ の場合、予想通りCRBと一致する。最後に、(c)は、 $\tau=NT=1$ にわたりランダムな間隔で位置する $K=20$ 個のディラックの回復を示す。信号対雑音比は15dBであり、 $N=61$ 個のサンプル及び $P+1$ 個のモーメントを使用する。

30

#### 【 0 1 6 1 】

##### C . F R I の近似

次に、次数 $P+1$ のBスプラインカーネルを使用してサンプルを取得し、

$$\alpha_m = j \frac{\pi}{2(P_2+1)} (2m - P_2^2)$$

及び $m = 0, \dots, P_2$ である指数関数 $e \times p \{ \alpha_m t \}$ を近似する場合、の第V-B節の近似回復手順の結果を示す。定数最小二乗公式

$$c_{m,n} = \hat{\varphi}(\alpha_m)^{-1} e^{\alpha_m n}$$

を使用して係数を取得し、

$$\hat{\varphi}(s)$$

はBスプラインのラプラス変換を表す。本例では、多項式の正確な再生に基づく従来の復元方法と性能を比較する。

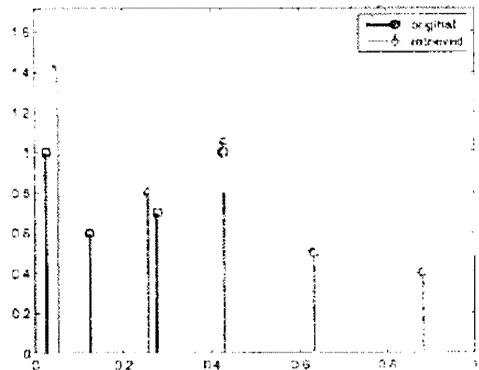
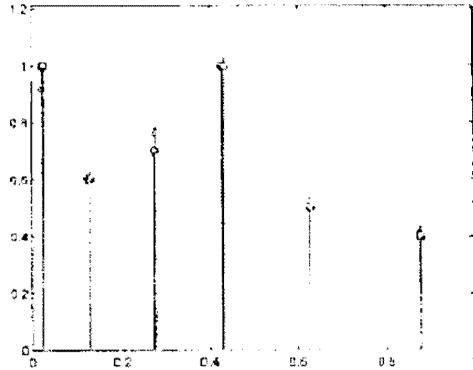
#### 【 0 1 6 2 】

Figure 7の(a)及び(b)において、SNR = 20 dBを使用し、雑音を含む $N = 3$

40

50

1 個のサンプルからの、 $N = NT$  にわたってランダムに位置する  $K = 6$  個のディラックの推定を比較する。(a) では、次数  $P + 1 = 26$  の B スプラインを用いてサンプリング及び再構成している。全てのディラックを見つけられるわけではないことがわかる。(b) では、次数  $P + 1 = 6$  の B スプラインを用いてサンプリングしているが、近似再構成の精度を向上させるために  $P_2 + 1 = 26$  個の指數関数モーメントを作成している。6 個のディラックの位置の推定の平均誤差は、(a)において適切に復元されたディラックの場合には約  $10^{-2}$  であり、(b) の近似回復の場合は  $10^{-3}$  である。

(a)  $K=6$ 個のディラックの回復, デフォルト

(b) 近似

Figure 7 Bスプラインカーネルの挙動。雑音を含む  $N = 31$  個のサンプルから  $K = 6$  個のディラックを復元する。(a) は、事前重み付けを使用して改善された[1]のデフォルトの多項式復元を示す。次数  $P + 1 = 26$  のカーネルを用いてサンプリングし、同数のモーメントを使用する。(b) は、 $m = 0, \dots, P_2$  として  $\alpha_{m,n} = \frac{\pi}{2(P_2+1)} (2m - P_2)$  を用いた近似復元を使用して取得された結果を示す。この場合、次数  $P + 1 = 6$  のカーネルを用いてサンプリングするが、 $P_2 + 1 = 26$  個のモーメントを更に作成する。双方の例における SNR は 20dB である。

### 【 0 1 6 3 】

近似方法を使用して、次数  $P + 1 = 6$  の B スプラインカーネルにより取得される  $N = 3$  1 個のサンプルから  $K = 2$  個のディラックを回復する場合の、更なる結果を示す。カーネルの次数を固定する場合でも、より多くの  $P_2 + 1$  個のモーメントを再構成することで性能を改善できる。Figure 8 の (a) ~ (d) は、 $m = 0, \dots, P_2$ 、且つ、 $L = 3/2$  ( $P_2 + 1$ ) であるパラメータ

$$\alpha_m = j \frac{\pi}{L} (2m - P_2)$$

の場合の結果を示す。モーメントの数  $P_2 + 1$  が増加するほど性能は改善し、最終的にサンプルに基づく CRB に到達する。

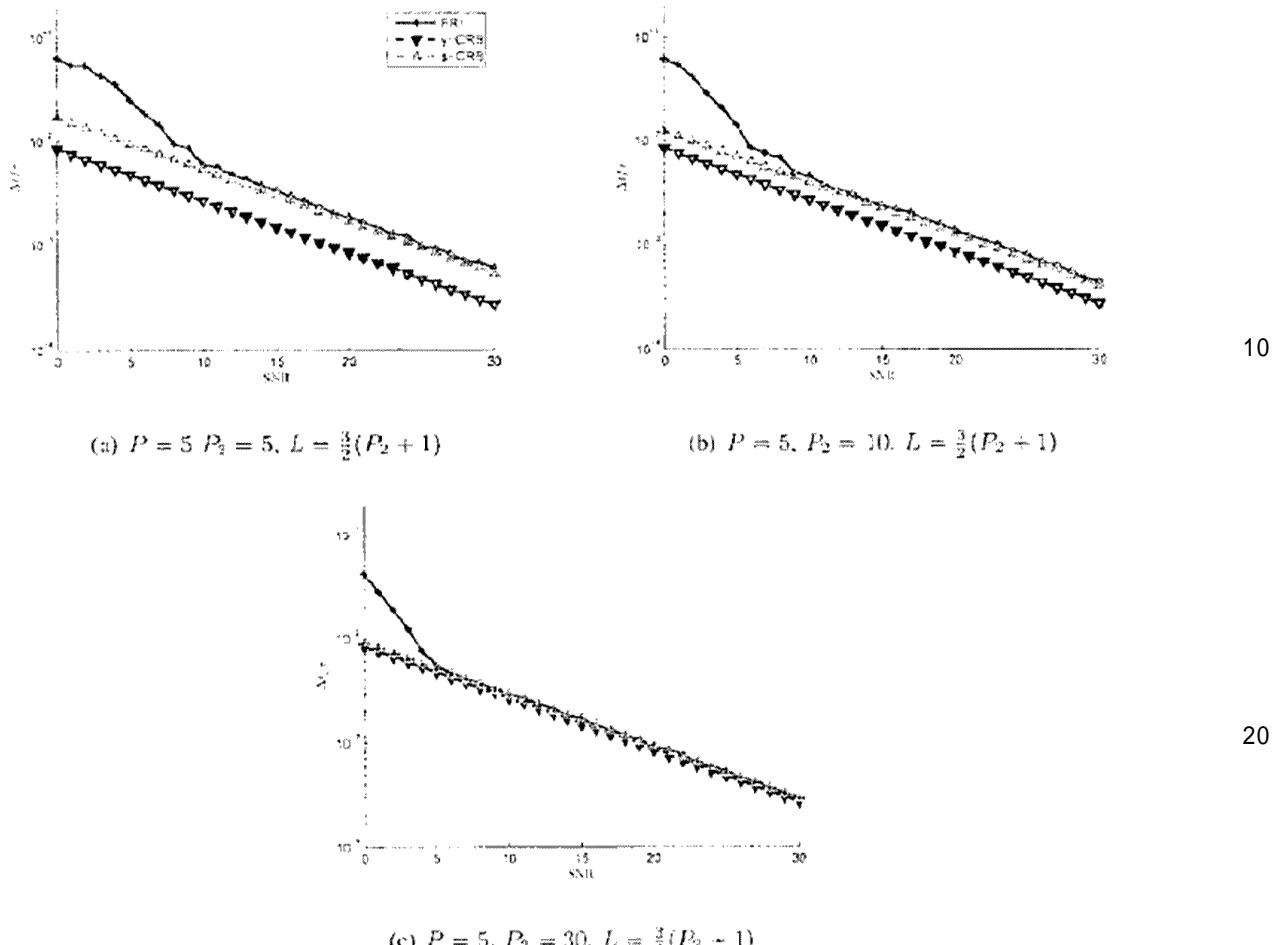


Figure 8 Bスプラインを使用する近似回復。これらの図面は、近似FRI復元を使用して回復されたK=2個のうちの最初のディラックの推定における誤差を示す。カーネルの次数P+1を固定した場合でも、あらゆる数の $P_2+1$ 個のモーメントを再構成して性能を改善できる様子を示す。実際、適切な選択  $L=3/2(P_2+1)$  を用いる場合、性能はサンプルに基づくCRBに到達するまで改善する。

#### 【0164】

#### VII. 結論

本稿では、雑音の存在下におけるFRI再構成問題を考察してきた。最初に、雑音を含まない状況における既存の結果、及び最新の文献における最も効果的な雑音の処理を再検討した。次に、前述の処理に対するロバストな代替方法を検討した。

#### 【0165】

更に詳細には、本稿の貢献は2つに分けられる。安定性が最も高い信号再構成をもたらすという意味で、最適な指數関数再生カーネルを設計する方法を見つけ出した。更に、サンプリングカーネルを完全に制御できる理想的な状況から離れ、任意の収集デバイスを用いて取得される破損したサンプルを与えられる場合について考察した。この状況において、あらゆるカーネルを扱う汎用的なFRI再構成方法を開発した。入力信号の正確なパラメータを見つけようとする元のFRIフレームワークと異なり、指數関数の近似再構成に基づく入力の近似復元を提案している。我々の新しいアプローチの利点は、あらゆるサンプリングカーネルに適用可能であるとともに、過去に使用された特定の種類のカーネルよりも安定性が高く正確な再構成を提供する点である。

#### 【0166】

#### <付録A>

#### 一般化Strang-Fix条件

指數関数再生カーネルは、そのシフトされたバージョンの線形結合と共に、

$$t^r e^{\alpha_m t}$$

の形式の多項式指数関数を生成できる任意の関数  $\psi(t)$  である。パラメータ  $\alpha_m$  は複素数であり、 $m = 0, \dots, P$  及び  $r = 0, \dots, R$  である。指数関数再生カーネルは、多項式再生カーネルのファミリーの一般化である。後者は、カーネル  $\psi(t)$  が多項式を再生できることを記述する既知のStrang-Fix条件[1]、[33]、すなわち、

$$l \neq 0 \text{ 及び } r = 0, \dots, R \text{ に対して } \hat{\psi}(0) \neq 0 \text{ 及び } \hat{\psi}^{(r)}(2\pi l) = 0$$

の場合、及びその場合に限り、

$$t^r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_r \psi(t - n)$$

という条件によって特徴付けられる。ここで、

$$\hat{\psi}(\omega)$$

は  $\psi(t)$  のフーリエ変換であり、

$$\hat{\psi}^{(r)}(\omega)$$

はその  $r$  次導関数を表す。

#### 【0167】

多項式再生カーネルと同様の方法で、指数関数再生カーネルについてのStrang-Fix条件の更に一般的な形式を導出できる。より具体的には、カーネル  $\psi(t)$  は指数関数多項式、すなわち、

$$l \neq 0 \text{ 及び } r = 0, \dots, R \text{ に対して } \hat{\psi}^{(r)}(\alpha_m) \neq 0 \text{ 及び } \hat{\psi}^{(r)}(\alpha_m + 2j\pi l) = 0$$

の場合、及びその場合に限り、

$$t^r e^{\alpha_m t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n,r} \varphi(t - n)$$

を再生できる。ここで、

$$\hat{\varphi}^{(r)}(s)$$

は  $\psi(t)$  の両側ラプラス変換の  $r$  次導関数を表す。証明は、 $t^r$  を明らかに再生する関数  $\psi(t) = \exp\{-\alpha_m t\} \varphi(t)$  を考慮することにより、多項式再生カーネルについてのStrang-Fix条件から取得される。従って、 $\psi(t)$  は、多項式再生カーネルであるため、Strang-Fix条件を満たす。更に、

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{\varphi}(\alpha_m + j\omega)$$

であるため、 $\psi(t)$  のフーリエ変換は  $\varphi(t)$  のラプラス変換に関する。

$$\hat{\psi}(\omega)$$

にStrang-Fix条件を単に適用することにより、

$$\hat{\varphi}^{(r)}(\omega)$$

についての一般化Strang-Fix条件に達し、これで証明が完成する。

#### 【0168】

<付録B>

e M O M S のファミリーは S o S カーネル及びディリクレカーネルを含む

10

20

30

40

50

0を中心とした、サポート  $P+1$  の指指数関数再生カーネル

$$\varphi_0(t) = \varphi\left(t + \frac{P+1}{2}\right)$$

について考える。ここで、

$$\varphi(t) = \gamma(t) * \beta_{\alpha}(t)$$

とし、

$$\beta_{\alpha}(t)$$

10

は(11)により与えられるフーリエ変換を有する。 $P$ が偶数である場合に解析を制限し、以下の指指数関数パラメータを使用する。

$$\alpha_m = j\omega_m = j\frac{\pi}{P+1}(2m - P), \quad (30)$$

ここで、 $m = 0, \dots, P$ である。次に、 $\varphi_0(t)$ の周期的拡張を使用する。すなわち、

$$\varphi_{P+1}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_0(t + l(P+1))$$

20

であり、これは、以下のように書くことができる。

$$\varphi_{P+1}(t) = \frac{1}{P+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_0\left(\frac{2\pi k}{P+1}\right) e^{j\frac{2\pi k}{P+1}t}, \quad (31)$$

ここで、最後の項はポアソンの和公式の適用から得られる。 $P$ が奇数の場合は、 $2(P+1)$ にわたり周期化することにより、同様に導出可能である。また、シフトされたカーネル  $\varphi_0(t)$ のフーリエ変換は、以下のように書くことができる。

$$\hat{\varphi}_0(\omega) = \gamma(\omega) \prod_{m=0}^P \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_m}{2}\right). \quad (32)$$

30

### 【0169】

以下のように表記する場合、第IV-B節のカーネルとは異なるが依然として[30]の一般化指指数関数再生カーネルの特定のサブファミリーに対応する最高次及び最小サポート(eMOMS)の指指数関数再生カーネルが設計される。

$$\hat{\varphi}_0(\omega_m) = |\hat{\varphi}(\omega_m)| = |\hat{\gamma}(\omega_m) \hat{\beta}_{\alpha}(\omega_m)| = \eta_m, \quad (33)$$

### 【0170】

40

(31)において、フーリエ変換

$$\hat{\varphi}_0(\omega)$$

は  $k = 2 - k / (P+1)$ で評価される。(33)を考慮すると、範囲  $k = -P/2, \dots, P/2$ に対して

$$\hat{\varphi}_0(\omega_k) = \eta_k$$

であることがわかる。また、

$$\text{sinc}(t\pi) = 0$$

50

に等しい積(32)における項を見つけられないため、他のあらゆる  $k$  に対して

$$\varphi_0(\omega_k) = 0$$

であることがわかる。従って、式(31)を次式に帰着できる。

$$\varphi_{P+1}(t) = \frac{1}{P+1} \sum_{k=-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \eta_k e^{\frac{2\pi k}{P+1} t}. \quad (34)$$

### 【0171】

なお、全ての  $k$  に対して値  $\eta_k = 1$  である場合、式(34)は、周期  $P+1$  のディリクレカーネルの1周期、10

$$\varphi_{P+1}(t) = \frac{1}{P+1} \sum_{k=-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} e^{j \frac{2\pi k}{P+1} t} = \frac{1}{P+1} \frac{\sin(\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{P+1})}$$

に帰着する。これはまさに第IV-B節のeMOMSカーネルのファミリーである。

### 【0172】

最後に、(34)の1周期について考え、

$$t = \frac{x}{T}$$

20

を使用する。更に、サンプル数  $N = P+1$  を制限し、 $= N T = (P+1) T$  と表記する。その場合、SOSカーネル[3]の時間領域定義、

$$\varphi_{P+1}\left(\frac{x}{T}\right) = g(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathcal{K}} \eta_k e^{\frac{j 2\pi k}{N} x}$$

を得る。この場合、サンプル数  $N$  は奇数である必要があり、インデックスの集合は、

$$\mathcal{K} = \left\{ -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \right\}$$

30

である。

### 【0173】

## 参考文献

- [1] P. L. Dragotti, M. Vetterli, and T. Blu, "Sampling Moments and Reconstructing Signals of Finite Rate of Innovation: Shannon Meets Strang-Fix," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, pp. 1741–1757, May 2007.
- [2] M. Vetterli, P. Marziliano, and T. Blu, "Sampling signals with finite rate of innovation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 1417–1428, June 2002.
- [3] R. Tur, Y. C. Eldar, and Z. Friedman, "Innovation Rate Sampling of Pulse Streams with Application to Ultrasound Imaging," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, pp. 1827–1842, April 2011.
- [4] P. Stoica and R. L. Moses, *Introduction to Spectral Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.
- [5] A. Hormati and M. Vetterli, "Compressive Sampling of Multiple Sparse Signals Having Common Support Using Finite Rate of Innovation Principles," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 18, pp. 331–334, May 2011. 10
- [6] J. Berent, P. L. Dragotti, and T. Blu, "Sampling Piecewise Sinusoidal Signals With Finite Rate of Innovation Methods," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, pp. 613–625, February 2010.
- [7] I. Maravic and M. Vetterli, "Exact Sampling Results for Some Classes of Parametric Non-Bandlimited 2-D Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, pp. 175–189, January 2004.
- [8] P. Shukla and P. L. Dragotti, "Sampling Schemes for Multidimensional Signals with Finite Rate of Innovation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, pp. 3670–3686, July 2007.
- [9] H. Pan, T. Blu, and P. L. Dragotti, "Sampling Curves with Finite Rate of Innovation," *Proceedings of the Ninth International Workshop on Sampling Theory and Applications (SampTA'11), Singapore*, May 2011.
- [10] C. Chea, P. Marziliano, and A. C. Kot, "2D Finite Rate of Innovation Reconstruction Method for Step Edge and Polygon Signals in the Presence of Noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, pp. 2851–2859, June 2012. 20
- [11] I. Maravic and M. Vetterli, "Sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation in the presence of noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 2788–2805, August 2005.
- [12] T. Blu, P. L. Dragotti, M. Vetterli, P. Marziliano, and L. Coulot, "Sparse Sampling of Signal Innovations," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 31–40, 2008.
- [13] V. Y. F. Tan and V. K. Goyal, "Estimating signals with finite rate of innovation from noisy samples: A stochastic algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 5135–5146, October 2008.
- [14] A. Erdozain and P. M. Crespo, "A new stochastic algorithm inspired on genetic algorithms to estimate signals with finite rate of innovation from noisy samples," *Signal Processing*, vol. 90, pp. 134–144, January 2010. 30
- [15] A. Erdozain and P. M. Crespo, "Reconstruction of aperiodic FRI signals and estimation of the rate of innovation based on the state space method," *Signal Processing*, vol. 91, no. 8, pp. 1709–1718, 2011.
- [16] J. A. Urigüen, P. L. Dragotti, and T. Blu, "On the exponential reproducing kernels for sampling signals with finite rate of innovation," *Proceedings of the Ninth International Workshop on Sampling Theory and Applications (SampTA'11), Singapore*, May 2011.
- [17] I. Khalidov, T. Blu, and M. Unser, "Generalized L-Spline Wavelet Bases," in *Proceedings of the SPIE Conference on Mathematical Imaging: Wavelet XI*, vol. 5914, (San Diego CA, USA), pp. 59140F–1–59140F–8, July 31–August 3, 2005.
- [18] M. Unser and T. Blu, "Cardinal Exponential Splines: Part I—Theory and Filtering Algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 1425–1438, April 2005.
- [19] A. Ron, "Factorization theorems for univariate splines on regular grids," *Israel J. Math.*, vol. 70, no. 1, pp. 48–68, 1990.
- [20] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993. 40

- [21] J. A. Cadzow, "Signal Enhancement - A Composite Property Mapping Algorithm," *Acoustics, Speech and IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 36, pp. 49-62, January 1988.
- [22] Y. Hua and T. K. Sakar, "Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Undamped Sinusoids in Noise," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, pp. 814-824, May 1990.
- [23] B. D. Rao, "Model based processing of signals: A state space approach," *Proceedings of the IEEE*, vol. 3930, pp. 283-309, February 1992.
- [24] B. De Moor, "The Singular Value Decomposition and Long and Short Spaces of Noisy Matrices," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 2826-2838, September 1993.
- [25] Y. C. Eldar and A. V. Oppenheim, "MMSE Whitening and Subspace Whitening," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, pp. 1846-1851, July 2003. 10
- [26] E. Ollila, "On the Cramér-Rao bound for the constrained and unconstrained complex parameters," *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, pp. 414-418, July 2008.
- [27] L. Berman and A. Feuer, "On perfect conditioning of vandermonde matrices on the unit circle," *Electronic Journal of Linear Algebra*, vol. 16, pp. 157-161, July 2007.
- [28] G. H. Golub, P. Milanfar, and J. Varah, "A stable numerical method for inverting shape from moments," *SIAM Journal on Scientific Computing (SISC)*, vol. 21, pp. 1222-1243, December 1999.
- [29] T. Blu, P. Thevenaz, and M. Unser, "MOMS: maximal-order interpolation of minimal support," *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 10, pp. 1069-1080, July 2001.
- [30] M. Unser, "Cardinal Exponential Splines: Part II—Think Analog, Act Digital," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 1439-1449, April 2005. 20
- [31] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "Polynomial Spline Signal Approximations: Filter Design and Asymptotic Equivalence with Shannon's Sampling Theorem," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, pp. 95-103, January 1992.
- [32] M. Unser, "Sampling-50 years after Shannon," in *Proceedings of the IEEE*, pp. 569-587, April 2000.
- [33] G. Strang and G. Fix, "Fourier analysis of the finite element variational method," *Constructive Aspect of Functional Analysis*, pp. 796-830, 1971.

【図1】

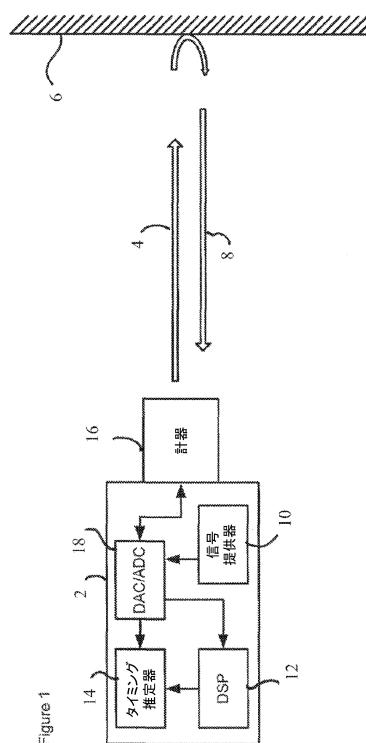


Figure 1

【図2】

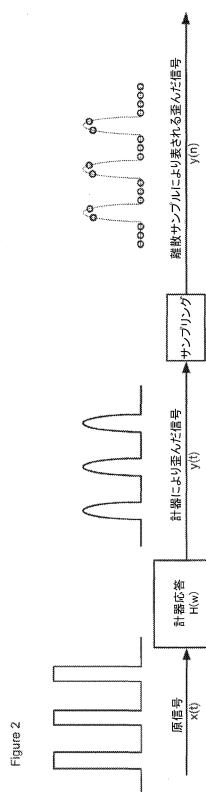


Figure 2

【図3】

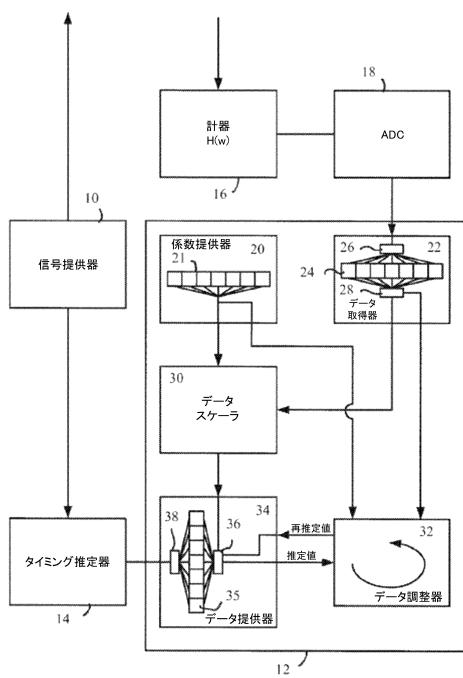
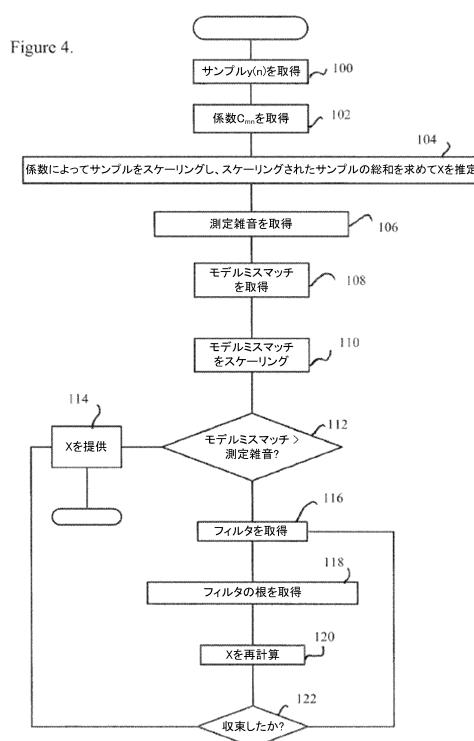


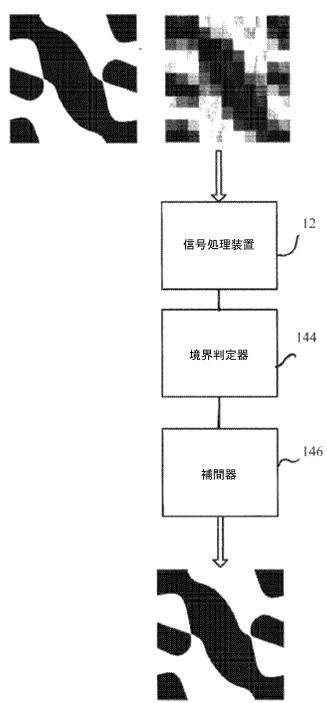
Figure 3.

【図4】

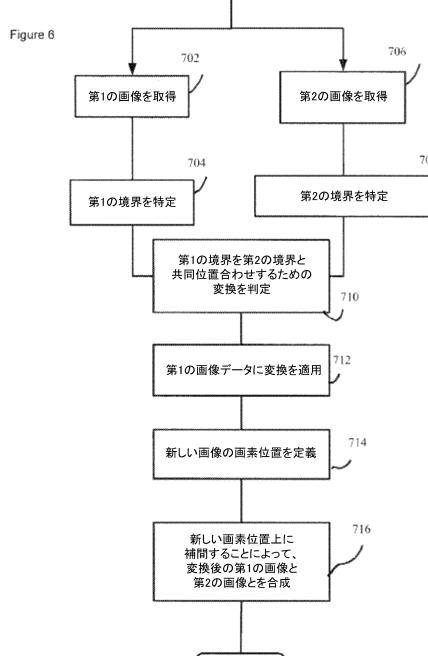


【図5】

Figure 5

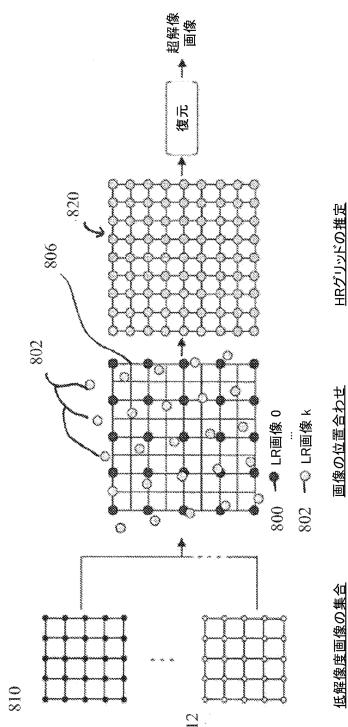


【図6】



【図7】

Figure 7.



---

 フロントページの続き

|                         |                   |
|-------------------------|-------------------|
| (51)Int.Cl.             | F I               |
| G 0 1 S 15/10 (2006.01) | G 0 1 S 15/10     |
| G 0 6 T 5/50 (2006.01)  | G 0 6 T 5/50      |
| H 0 4 N 1/387 (2006.01) | H 0 4 N 1/387 101 |

(74)代理人 100076428  
弁理士 大塚 康徳

(74)代理人 100115071  
弁理士 大塚 康弘

(74)代理人 100112508  
弁理士 高柳 司郎

(74)代理人 100116894  
弁理士 木村 秀二

(74)代理人 100130409  
弁理士 下山 治

(74)代理人 100134175  
弁理士 永川 行光

(72)発明者 ウリグエン，ホセ アントニオ  
スペイン国 ビルバオ イー-48009，コルドン デ ラレゲニ 33

(72)発明者 ドラゴッティ，パイパー ルイギ  
イギリス国 ロンドン エスダブリュ19 8ジェイエイチ，ヘイドン パーク ロード 69

(72)発明者 ブルー，スリー アルパート ジャン-ルイス  
中華人民共和国 ホンコン，タイ ポ エヌ.ティー.，ラム スエン，タイ イエン シ  
エ 28シー 1/2エフ

審査官 東 治企

(56)参考文献 ONATIVIA JON , SEQUENTIAL LOCAL FRI SAMPLING OF INFINITE STREAMS OF DIRACS , 2013 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING (ICASSP) ,米国 , INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS , 2013年 5月26日 , PAGE(S):5440 - 5444  
Jose Antonio Uriagu , ON THE EXPONENTIAL REPRODUCING KERNELS FOR SAMPLING SIGNALS WITH FINITE RATE OF INNOVATION , Proceeding of the 9th International Workshop on SampTA , 2011年 5月 , pages 1-4 , URL , [http://www.commsp.ee.ic.ac.ul/~pld/publications/UriaguDB\\_SampTA2011.pdf](http://www.commsp.ee.ic.ac.ul/~pld/publications/UriaguDB_SampTA2011.pdf)  
Pier Luigi Dragotti , Sampling and Reconstruction driven by Sparsity Models: Theory and Applications , 電子情報通信学会2012年総合大会講演論文集 基礎・境界 , 社団法人電子情報通信学会 , 2012年 3月 6日 , SS-40~SS-43  
Ronen Tur , Innovation Rate Sampling of Pulse Streams With Application to Ultrasound Imaging , IEEE Transactions on Signal Processing , IEEE , 2011年 4月 , Vol.59, No.4 , pp.1827-1842

(58)調査した分野(Int.Cl. , DB名)

G 0 1 S 7 / 0 0 - 7 / 4 2  
G 0 1 S 1 3 / 0 0 - 1 3 / 9 5  
G 0 6 F 1 7 / 1 4  
G 0 6 T 3 / 0 0 - 5 / 5 0  
IEEE Xplore