

(12) 按照专利合作条约所公布的国际申请

(19) 世界知识产权组织
国际局

(43) 国际公布日
2022 年 1 月 20 日 (20.01.2022)



(10) 国际公布号
WO 2022/012155 A1

- (51) 国际专利分类号:
G05B 13/04 (2006.01)
- (21) 国际申请号: PCT/CN2021/094741
- (22) 国际申请日: 2021 年 5 月 20 日 (20.05.2021)
- (25) 申请语言: 中文
- (26) 公布语言: 中文
- (30) 优先权:
202010674050.3 2020 年 7 月 14 日 (14.07.2020) CN
- (71) 申请人: 江南大学(JIANGNAN UNIVERSITY) [CN/CN]; 中国江苏省无锡市蠡湖大道 1800 号, Jiangsu 214122 (CN)。
- (72) 发明人: 陶洪峰(TAO, Hongfeng); 中国江苏省无锡市蠡湖大道 1800 号, Jiangsu 214122 (CN)。 魏强(WEI, Qiang); 中国江苏省无锡市蠡湖大道 1800 号, Jiangsu 214122 (CN)。 周龙辉(ZHOU,

Longhui); 中国江苏省无锡市蠡湖大道 1800 号, Jiangsu 214122 (CN)。 刘巍(LIU, Wei); 中国江苏省无锡市蠡湖大道 1800 号, Jiangsu 214122 (CN)。 王瑞(WANG, Rui); 中国江苏省无锡市蠡湖大道 1800 号, Jiangsu 214122 (CN)。

(74) 代理人: 苏州市中南伟业知识产权代理事务所(普通合伙)(CENTRAL SOUTH WELL INTELLECTUAL PROPERTY OFFICE); 中国江苏省苏州市吴中区石湖西路 188 号吴中万达广场 A 座苏州大学国家科技园 2303, Jiangsu 215000 (CN)。

(81) 指定国(除另有指明, 要求每一种可提供的国家保护): AE, AG, AL, AM, AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BN, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DJ, DK, DM, DO, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT, HN, HR, HU, ID, IL, IN, IR, IS, IT, JO, JP, KE, KG, KH, KN, KP, KR, KW, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LU, LY, MA, MD, ME, MG, MK, MN, MW, MX,

(54) Title: ROBUST ITERATIVE LEARNING CONTROL METHOD FOR SERIES INVERTED PENDULUMS IN FINITE FREQUENCY RANGE

(54) 发明名称: 一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法

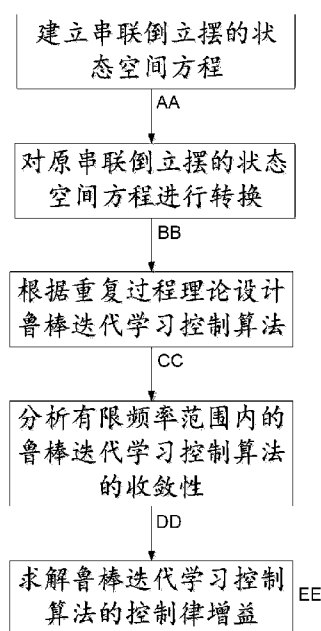


图 1

- AA Establish a state space equation of series inverted pendulum
- BB Convert a state space equation of original series inverted pendulum
- CC Design a robust iterative learning control algorithm according to a repetitive process theory
- DD Analyze the convergence of the robust iterative learning control algorithm in a finite frequency range
- EE Solve for a control law gain of the robust iterative learning control algorithm

(57) Abstract: A robust iterative learning control method for series inverted pendulums in a finite frequency range, relating to the field of iterative learning control. The method comprises: establishing a state space equation of series inverted pendulums; converting a state space equation of original series inverted pendulums; designing a robust iterative learning control algorithm according to a repetitive process theory; analyzing the convergence of the robust iterative learning control algorithm in a finite frequency range; and solving for a control law gain of the robust iterative learning control algorithm. The provided algorithm ensures that a frequency domain of a system is stable, has a robust control performance, and ensures the convergence of an output error in time domain and frequency domain ranges in the presence of the external interference.

(57) 摘要: 一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法, 涉及迭代学习控制领域, 方法包括: 建立串联倒立摆的状态空间方程; 对原串联倒立摆的状态空间方程进行转换; 根据重复过程理论设计鲁棒迭代学习控制算法; 分析有限频率范围内的鲁棒迭代学习控制算法的收敛性; 求解鲁棒迭代学习控制算法的控制律增益。所提算法将保证系统频域稳定并且具有鲁棒控制性能, 同时在外界干扰存在时确保输出误差在时域和频域范围内的收敛性。

MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PA, PE, PG, PH, PL,
PT, QA, RO, RS, RU, RW, SA, SC, SD, SE, SG, SK, SL,
ST, SV, SY, TH, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US,
UZ, VC, VN, WS, ZA, ZM, ZW。

(84) 指定国 (除另有指明, 要求每一种可提供的地区
保护): ARIPO (BW, GH, GM, KE, LR, LS, MW, MZ,
NA, RW, SD, SL, ST, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), 欧亚 (AM,
AZ, BY, KG, KZ, RU, TJ, TM), 欧洲 (AL, AT, BE, BG,
CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR, HU,
IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, MK, MT, NL, NO, PL, PT,
RO, RS, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI,
CM, GA, GN, GQ, GW, KM, ML, MR, NE, SN, TD, TG)。

本国际公布:

— 包括国际检索报告 (条约第21条(3))。

一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法

技术领域

本发明涉及迭代学习控制领域，尤其是一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法。

背景技术

串联倒立摆是一个高阶次、强耦合、多变量的不稳定复杂系统，可以直观地反应非线性、稳定性和鲁棒性等控制问题，是对控制理论进行检验的一个良好装置。串联倒立摆是由若干个结构相同的倒立摆子系统串联而成，其中倒立摆子系统具有重要的工程应用背景。单级倒立摆的稳定控制在火箭飞行过程中的姿态控制中具有广泛应用。同时倒立摆与双足机器人的行走有相似性。日常生活中重心在上、支点在下的问题都与倒立摆有极大的相似性，故其稳定控制在实际中有广泛的应用，如海上钻井平台的稳定控制、卫星发射架的稳定控制、火箭姿态控制、飞机安全着陆、化工过程控制等。因此，由若干个倒立摆子系统组合而成的串联倒立摆具有很好的工程应用背景。

目前针对串联倒立摆的控制方法主要有：专家控制，模糊控制和神经网络控制等。专家控制的主体由知识库和推理机构组成，涉及到知识库的自动更新与规则自动生成，因此专家控制在实时性和信息的并行处理方面有很大的局限性。模糊控制具有较强的鲁棒性能和容错性能，但是由于其模糊的特性会导致系统的控制精度和动态品质的降低。神经网络控制具有较强的自适应能力，但是其必须要有已知的具体工程应用数据样本，同时还需要足够长的时间来进行在线或离线学习训练，因此其收敛速度缓慢。上述控制方法在系统的实时性和精确性上均存在较大局限，难以解决串联倒立摆的轨迹跟踪问题。

发明内容

本发明人针对上述问题及技术需求，提出了一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法。基于提升技术将重复运行的多维串联倒立摆系统转换为等效系统，然后为了进一步表示有界扰动与系统输出误差之间的联系，设计鲁棒迭代学习控制律将被控系统转换为一类连续离散重复过程模型。基于重

复过程理论, 通过线性矩阵不等式表示鲁棒迭代学习控制算法。所提算法将保证系统频域稳定并且具有鲁棒控制性能, 同时在外界干扰存在时确保输出误差在时域和频域范围内的收敛性。

本发明的技术方案如下:

一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法, 包括如下步骤:

第一步: 建立串联倒立摆的状态空间方程;

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(p, t) = \hat{A}_1 \mathbf{x}_k(p-1, t) + \hat{A}_2 \mathbf{x}_k(p, t) + \hat{A}_3 \mathbf{x}_k(p+1, t) + \hat{B} u_k(p, t) + \hat{E} v_k(p, t) \\ y_k(p, t) = \hat{C} \mathbf{x}_k(p, t) + \hat{F} w_k(p, t) \end{cases} \quad (17)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aml}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(J + ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aml}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(J + ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{(M+m)J + Mml^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J + ml^2}{(M+m)J + Mml^2} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mgl}{(M+m)J + Mml^2} & 0 & \frac{-2aml}{(M+m)J + Mml^2} & \frac{-mlb}{(M+m)J + Mml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m^2 l^2 g}{(M+m)J + Mml^2} & 0 & \frac{-2a(J + ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} & \frac{-b(J + ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} \end{bmatrix}, \\ \hat{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式(17)中 k 表示迭代周期, p 表示控制节点序号, t 代表连续时间, 串联倒

立摆系统工作于 $t \in [0, T]$ 的重复时间周期内； $x_k(p, t) \in R^n$ ， $u_k(p, t) \in R^m$ 和 $y_k(p, t) \in R^l$ 分别表示串联倒立摆系统第 p 个节点的状态、输入和输出信号； $v_k(p, t) \in R^i$ 和 $w_k(p, t) \in R^j$ 分别表示串联倒立摆系统第 p 个节点的状态端外部有界扰动和输出端外部有界扰动信号，并且扰动信号可导； $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E}$ 和 $\hat{F}$ 分别表示适当维数的系统矩阵； m 表示摆杆质量， l 表示摆杆质心到转动轴心的距离， J 表示摆杆的转动惯量， M 表示小车质量， a 表示弹簧劲度系数， b 表示小车摩擦系数；串联倒立摆系统第 p 个节点的状态会受到前后节点状态的影响，其中 $0 \leq p \leq \alpha - 1$ ， α 表示串联倒立摆系统的总节点数，为已知的任意正整数；不失一般性，假设串联倒立摆系统满足边界条件 $x_k(p, 0) = 0$ ，并且 $x_k(-1, t) = 0$ ， $x_k(\alpha, t) = 0$ ；

第二步：对原串联倒立摆的状态空间方程进行转换；

对于原串联倒立摆的状态空间方程(17)，利用提升技术，定义关于输入、输出、状态和扰动信号的超级矢量 $U_k(t)$ ， $Y_k(t)$ ， $X_k(t)$ ， $V_k(t)$ ， $W_k(t)$ 为如下形式：

$$\begin{aligned} U_k(t) &= [u_k(0, t)^T, u_k(1, t)^T, u_k(2, t)^T, \dots, u_k(\alpha-1, t)^T]^T, \\ Y_k(t) &= [y_k(0, t)^T, y_k(1, t)^T, y_k(2, t)^T, \dots, y_k(\alpha-1, t)^T]^T, \\ X_k(t) &= [x_k(0, t)^T, x_k(1, t)^T, x_k(2, t)^T, \dots, x_k(\alpha-1, t)^T]^T, \\ V_k(t) &= [v_k(0, t)^T, v_k(1, t)^T, v_k(2, t)^T, \dots, v_k(\alpha-1, t)^T]^T, \\ W_k(t) &= [w_k(0, t)^T, w_k(1, t)^T, w_k(2, t)^T, \dots, w_k(\alpha-1, t)^T]^T. \end{aligned} \quad (18)$$

则原串联倒立摆的状态空间方程(17)转换成等效系统：

$$\begin{cases} \dot{X}_k(t) = AX_k(t) + BU_k(t) + EV_k(t) \\ Y_k(t) = CX_k(t) + FW_k(t) \end{cases} \quad (19)$$

其中，

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & \hat{A}_3 & & 0 \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 \\ 0 & & & \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \end{bmatrix}, B = \text{diag}\{\hat{B}, \dots, \hat{B}\}, C = \text{diag}\{\hat{C}, \dots, \hat{C}\},$$

$$E = \text{diag}\{\hat{E}, \dots, \hat{E}\}, F = \text{diag}\{\hat{F}, \dots, \hat{F}\}$$

第三步：根据重复过程理论设计鲁棒迭代学习控制算法；

定义等效系统输出跟踪误差为

$$e_k(t) = Y_r(t) - Y_k(t)$$

其中 $Y_r(t)$ 为期望输出信号的超级矢量，且为连续可导的期望输出轨迹；

针对等效系统(19)设计如下形式的迭代学习控制律

$$U_k(t) = U_{k-1}(t) + \Delta U_k(t) \quad (20)$$

在式(20)中， $U_k(t)$ 是当前周期的输入量； $U_{k-1}(t)$ 是前一个周期的输入量； $\Delta U_k(t)$ 是控制系统周期更新的修正量，为了便于分析，定义中间变量 $\eta_k(t)$ ， $\mathcal{G}_k(t)$ 和 $\zeta_k(t)$ 为

$$\begin{aligned} \eta_k(t) &= \int_0^t [X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)] d\tau, \\ \mathcal{G}_k(t) &= \int_0^t [V_k(\tau) - V_{k-1}(\tau)] d\tau, \\ \zeta_k(t) &= W_k(t) - W_{k-1}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(19)、式(20)和式(21)得到：

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_k(t) &= \int_0^t [\dot{X}_k(\tau) - \dot{X}_{k-1}(\tau)] d\tau \\ &= X_k(t) - X_{k-1}(t) \\ &= A\eta_k(t) + B \int_0^t \Delta U_k(\tau) d\tau + E\mathcal{G}_k(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e_k(t) &= e_{k-1}(t) - C[X_k(t) - X_{k-1}(t)] - F[W_k(t) - W_{k-1}(t)] \\ &= -C\dot{\eta}_k(t) + e_{k-1}(t) - F\zeta_k(t) \\ &= -CA\eta_k(t) - CB \int_0^t \Delta U_k(\tau) d\tau - CE\mathcal{G}_k(t) + e_{k-1}(t) - F\zeta_k(t) \end{aligned} \quad (23)$$

将式(20)中的迭代学习更新律定义为如下形式：

$$\Delta U_k(t) = K_1 \dot{\eta}_k(t) + K_2 \dot{e}_{k-1}(t) \quad (24)$$

其中，

$$K_1 = \begin{bmatrix} \hat{K}_2 & \hat{K}_3 & & 0 \\ \hat{K}_1 & \hat{K}_2 & \hat{K}_3 & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \hat{K}_1 & \hat{K}_2 & \hat{K}_3 \\ 0 & & & \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{bmatrix}, K_2 = \text{diag} \{\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3\} \quad (25)$$

其中 $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$, $\hat{K}_3$, $\hat{K}$ 分别对应将迭代学习更新律与等效系统(19)结合, 得到被控系统的重复过程模型为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_k(t) = \bar{A}\eta_k(t) + \bar{B}e_{k-1}(t) + \bar{E}g_k(t) \\ e_k(t) = \bar{C}\eta_k(t) + \bar{D}e_{k-1}(t) + \bar{F}g_k(t) + \bar{G}\zeta_k(t) \end{cases} \quad (26)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + BK_1, \quad \bar{B} = BK_2, \quad \bar{C} = -CA - CBK_1, \\ \bar{D} &= I - CBK_2, \quad \bar{E} = E, \quad \bar{F} = -CE, \quad \bar{G} = -F \end{aligned} \quad (27)$$

I 表示单位矩阵;

重复过程模型(26)从系统误差 $e_{k-1}(t)$ 到系统误差 $e_k(t)$ 之间的传递函数为:

$$G(j\omega) = \bar{C}(j\omega I - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

为了进一步表示系统外部有界扰动与系统输出之间的关系, 将式(26)转换成如下形式的连续离散重复过程模型:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_k(t) \\ e_k(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \eta_k(t) \\ e_{k-1}(t) \end{bmatrix} + \tilde{B} \begin{bmatrix} g_k(t) \\ \zeta_k(t) \end{bmatrix} \\ e_{k-1}(t) = \tilde{C} \begin{bmatrix} \eta_k(t) \\ e_{k-1}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (28)$$

其中,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \bar{E} & 0 \\ \bar{F} & \bar{G} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0 \quad 1] \quad (29)$$

则连续离散重复过程模型(28)从系统外部有界扰动 $\begin{bmatrix} g_k(t) \\ \zeta_k(t) \end{bmatrix}$ 到系统误差 $e_{k-1}(t)$ 之

间的传递函数为:

$$G_{wz}(j\omega) = \tilde{C}(j\omega I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

ω 表示系统工作频率;

第四步: 分析有限频率范围内的鲁棒迭代学习控制算法的收敛性;

本申请的控制目标是设计鲁棒迭代学习控制律使得具有外部有界扰动的等效系统(19)在有限频率范围内鲁棒稳定；首先应保证在无外部有界扰动情况下等效系统(19)的稳定性；

在无外部有界扰动情况下，重复过程稳定和误差收敛需要满足三个条件：

条件一：重复过程模型(26)的矩阵 $\bar{A}$ 的所有特征值都具有严格的负实部；

条件二：重复过程模型(26)的矩阵 $\bar{D}$ 的谱半径严格小于1；

条件三：重复过程模型(26)传递函数的矩阵 $G(j\omega) = \bar{C}(j\omega I - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$, $\forall \omega \geq 0$, 其特征值的模严格小于1；

在无外部有界扰动情况下，重复过程模型(26)在有限频率范围内稳定和误差收敛的结论为：

对于重复过程模型(26)，若存在对称正定矩阵 $Q > 0$, $P > 0$, $Z > 0$ 和 $W_1 > 0$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\bar{A}^T Z + Z \bar{A} < 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} - W_1 & 0 & 0 \\ N_{21} - W_1^T & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & W_1^T \bar{B} & \bar{C}^T \\ 0 & \bar{B}^T W_1 & -I & \bar{D}^T \\ 0 & \bar{C} & \bar{D} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

则无扰动的等效系统(19)在迭代学习更新律(24)的作用下，输出跟踪误差在低、中频段范围内沿时间和批次方向单调收敛；

对于重复过程模型(26)，若存在对称正定矩阵 $Q > 0$, $P > 0$, $Z > 0$ 和 $W_1 > 0$ ，以及标量 $\tau > 0$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\bar{A}^T Z + Z \bar{A} < 0 \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} - \tau W_1 - \tau W_1^T & N_{12} + \tau W_1^T \bar{A} - W_1 & \tau W_1^T \bar{B} & 0 \\ N_{21} + \tau \bar{A}^T W_1 - W_1^T & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & W_1^T \bar{B} & \bar{C}^T \\ \tau \bar{B}^T W_1 & \bar{B}^T W_1 & -I & \bar{D}^T \\ 0 & \bar{C} & \bar{D} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

则无扰动的等效系统(19)在迭代学习更新律(24)作用下，输出跟踪误差在高频段范围内沿时间和批次方向单调收敛；

在无扰动结论的基础上进一步扩展带有外部有界扰动的等效系统(19)在有限频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能的结论；

若连续离散重复过程模型(28)从外部有界扰动到系统输出误差之间的传递

函数 $G_{wz}(s)$ 满足

$$\|G_{wz}(s)\|_{\infty} < \gamma \quad (34)$$

则称连续离散重复过程模型具有鲁棒性能， γ 为其性能指标，且 γ 取值越小，表明连续离散重复过程模型的抑制干扰的性能越好；

广义有界实引理内容为：

给定标量 $\gamma > 0$ ，对于给定系统的传递函数 $G(s)$ 及其频率响应 $G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B$ ，以下不等式等价：

(i) 频率响应不等式

$$G(j\omega)^* G(j\omega) < \gamma^2, \quad \forall \omega \in \Omega$$

(ii) 线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

其中 $Q > 0$ ， $P = P^T > 0$ ， $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，系统的频率范围以及不同频率范围内 Ψ 取值如表 1 所示

表 1 系统的频率范围

	低频	中频	高频
Ω	$ \omega \leq \varpi_l$	$\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$	$ \omega \geq \varpi_h$
Ψ	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \varpi_l^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & j\frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2} \\ -j\frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2} & -\varpi_1 \varpi_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varpi_h^2 \end{bmatrix}$

注释：设 $N = \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix}$ ，则

$$N = \begin{cases} \begin{bmatrix} -Q & P \\ * & \varpi_l^2 Q \end{bmatrix}, & |\omega| \leq \varpi_l \\ \begin{bmatrix} -Q & j\frac{\varpi_1 + \varpi_2}{2} Q + P \\ * & -\varpi_1 \varpi_2 Q \end{bmatrix}, & \varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2 \\ \begin{bmatrix} Q & P \\ * & -\varpi_h^2 Q \end{bmatrix}, & |\omega| \geq \varpi_h \end{cases}$$

N_{11} 、 N_{12} 、 N_{21} 、 N_{22} 需要在不同频率范围内具备不同的形式。

将连续离散重复过程模型(28)的系数矩阵(29)代入广义有界实引理的线性矩阵不等式，同时令 $\tilde{N}_{11} = \text{diag}\{N_{11}, N_{11}\}$ ， $\tilde{N}_{12} = \text{diag}\{N_{12}, N_{12}\}$ ， $\tilde{N}_{21} = \text{diag}\{N_{21}, N_{21}\}$ ， $\tilde{N}_{22} = \text{diag}\{N_{22}, N_{22}\}$ ，并取频率响应不等式中的矩阵

$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 则线性矩阵不等式写成:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

且式(35)又可以写成:

$$(\Lambda^\perp)^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Lambda^\perp < 0 \quad (36)$$

其中 $(\Lambda^\perp)^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}^T & I & 0 \\ \tilde{B}^T & 0 & I \end{bmatrix}$, 对于式(36)中的 $\Lambda^\perp$, 取 $\Lambda = \begin{bmatrix} -I & \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix}$;

其次, 取矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

则得到下列等式:

$$\Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中定义 $Q > 0$, 根据广义有界实引理中 $N_{11} = -Q$ 可得 $\tilde{N}_{11} < 0$, 又因为 $-\gamma^2 I < 0$ 所以 $\Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp < 0$;

根据投影引理 $\Lambda^{\perp T} \Upsilon \Lambda^\perp < 0, \Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp < 0$ 得到以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{sym}\{\Lambda^T \tilde{W} \Sigma\} < 0 \quad (38)$$

其中 $\tilde{W} = \text{diag}\{W_1, W_2\}$; 对式(38)使用 Schur 补引理得到:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} - \tilde{W} & 0 & 0 \\ * & \tilde{N}_{22} + \tilde{A}^T \tilde{W} + \tilde{W}^T \tilde{A} & \tilde{W}^T \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

根据广义有界实引理 $G(j\omega)^* G(j\omega) < \gamma^2$, 得到 $\rho(G(j\omega)) < \gamma$, 由于

$\rho(G(j\omega)) \leq \|G(j\omega)\|_\infty$, 则得到:

$$\|G(j\omega)\|_\infty < \gamma$$

保证了连续离散重复过程系统(28)具有鲁棒性能 γ ;

因此对于低、中频段得到下列结论:

针对式(26)的重复过程模型, 给定对称矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, $Z > 0$, $W_1 > 0$ 和 $W_2 > 0$ 以及给定标量 $\gamma > 0$ 使得式(30)和式(31)以及下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} - W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & N_{11} & 0 & N_{12} - W_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & \bar{C}^T W_2 + W_1^T \bar{B} & W_1^T \bar{E} & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{22} + \bar{D}^T W_2 + W_2^T \bar{D} & W_2^T \bar{F} & W_2^T \bar{G} & I \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

则在迭代学习更新律(24)作用下, 等效系统(19)在低、中频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛;

根据广义有界实引理中 N 矩阵 N_{11} 元素在低、中频范围内和高频范围内的取值可知, 低中频段为 $-Q$, 高频段为 Q , 不同频段取值不同, 当系统工作于高频段时 $N_{11} = Q > 0$, 相应的结论式(40)无法保证其负定, 因此引入标量 $\tau > 0$, 取下列矩阵

$$\Sigma = [\tau I \quad I \quad 0], \quad \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} I & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

则得到:

$$\Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} - \tau(\tilde{N}_{21} + \tilde{N}_{12}) + \tau^2(\tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C}) & -\tau \tilde{C}^T \\ -\tau \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

则相应高频段的结论为:

针对式(26)的重复过程模型, 给定对称矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, $Z > 0$, $W_1 > 0$ 和 $W_2 > 0$ 以及给定标量 $\tau > 0$ 和 $\gamma > 0$ 使得式(32)和式(33)以及下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & N_{12} + \tau W_1^T \bar{A} - W_1 & \tau W_1^T \bar{B} & \tau W_1^T \bar{E} & 0 & 0 \\ * & T_2 & \tau W_2^T \bar{C} & N_{12} + \tau W_2^T \bar{D} - W_2 & \tau W_2^T \bar{F} & \tau W_2^T \bar{G} & 0 \\ * & * & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & \bar{C}^T W_2 + W_1^T \bar{B} & W_1^T \bar{E} & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{22} + \bar{D}^T W_2 + W_2^T \bar{D} & W_2^T \bar{F} & W_2^T \bar{G} & I \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

其中 $T_1 = N_{11} - \tau W_1 - \tau W_1^T$, $T_2 = N_{11} - \tau W_2 - \tau W_2^T$; 则在迭代学习更新律(24)作用下, 等效系统(19)在高频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛;

第五步: 求解鲁棒迭代学习控制算法的控制律增益;

上述结论不能直接用于控制律的求解, 需要进行一定的转换才能进行求解。

根据式(30)得出式(42)

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \bar{A}^T Z + Z \bar{A} < 0 \quad (42)$$

取 $\Lambda^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ I \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} -I & \bar{A} \end{bmatrix}$, 取 $\Sigma^\perp = \begin{bmatrix} \rho_1 I \\ \rho_2 I \end{bmatrix}$, 因此 $\Sigma = \begin{bmatrix} -\rho_2 I & \rho_1 I \end{bmatrix}$, 定义 $\rho_2 < 0, \rho_1 > 0$, 则得到:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 I & \rho_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 I \\ \rho_2 I \end{bmatrix} = 2\rho_1 \rho_2 Z < 0 \quad (43)$$

运用投射引理得到如下结果:

$$\begin{bmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} -I \\ \bar{A}^T \end{bmatrix} W_1 \begin{bmatrix} -\rho_2 I & \rho_1 I \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (44)$$

将重复过程模型的系数矩阵(27)代入式(44)并在上式不等式左右两边乘以 $\text{diag}\{S_1^T, S_1^T\}$ 、 $\text{diag}\{S_1, S_1\}$, 其中 $S_1 = W_1^{-1}$, 得到如下不等式:

$$\begin{bmatrix} \rho_2 S_1^T + \rho_2 S_1 & \tilde{Z} - \rho_2 A S_1 - \rho_2 B X_1 - \rho_1 S_1^T \\ * & \text{sym}\{\rho_1 A S_1 + \rho_1 B X_1\} \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

其中 $\tilde{Z} = S_1^T Z S_1$;

将重复过程模型的系数矩阵式(27)代入式(31), 因此得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} - W_1 & 0 & 0 \\ * & N_{22} + A^T W_1 + B^T K_1 W_1 + W_1^T A + W_1^T B K_1 & W_1^T B K_2 & -A^T C^T - K_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (46)$$

在式(31)中, 不等式左右两边乘以 $\text{diag}\{S_1^T, S_1^T, I, I\}$ 、 $\text{diag}\{S_1, S_1, I, I\}$, 其中 $S_1 = W_1^{-1}$, 得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix} S_1^T N_{11} S_1 & S_1^T N_{12} S_1 - S_1^T & 0 & 0 \\ * & S_1^T N_{22} S_1 + S_1^T A^T + S_1^T K_1^T B^T + A S_1 + B K_1 S_1 & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - S_1^T K_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

化简得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} - S_1^T & 0 & 0 \\ * & \tilde{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

其中 $\tilde{N}_{11} = S_1^T N_{11} S_1$, $\tilde{N}_{12} = S_1^T N_{12} S_1$, $\tilde{N}_{22} = S_1^T N_{22} S_1$;

将重复过程模型的系数矩阵 (27)代入式(40), 得到:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} - W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & N_{11} & 0 & N_{12} - W_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_1 & \Gamma_2 & W_1^T E & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_3 & -W_2^T C E & -W_2^T F & I \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

其中,

$$\Gamma_1 = N_{22} + A^T W_1 + W_1^T A + K_1^T B^T W_1 + W_1^T B K_1, \quad \Gamma_2 = -K_1^T B^T C^T W_2 - A^T C^T W_2 + W_1^T B K_2,$$

$$\Gamma_3 = N_{22} + W_2^T + W_2 - K_2^T B^T C^T W_2 - W_2^T C B K_2,$$

在式(49)左右两边乘以 $\text{diag}\{S_1^T, S_2^T, S_1^T, S_2^T, I, I, I\}$ 、 $\text{diag}\{S_1, S_2, S_1, S_2, I, I, I\}$, 其中 $S_1 = W_1^{-1}$, $S_2 = W_2^{-1}$ 得到

$$\begin{bmatrix} S_1^T N_{11} S_1 & 0 & S_1^T N_{12} S_1 - S_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & S_2^T N_{11} S_2 & 0 & S_2^T N_{12} S_2 - S_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Gamma}_1 & \hat{\Gamma}_2 & E & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Gamma}_3 & -CE & -F & S_2^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1 &= S_1^T N_{22} S_1 + S_1^T A^T + A S_1 + S_1^T K_1^T B^T + B K_1 S_1, \quad \hat{\Gamma}_2 = -S_1^T K_1^T B^T C^T - S_1^T A^T C^T + B K_2 S_2, \\ \hat{\Gamma}_3 &= S_2^T N_{22} S_2 + S_2^T + S_2 - S_2^T K_2^T B^T C^T - C B K_2 S_2, \\ \text{令 } X_1 &= K_1 S_1, \quad X_2 = K_2 S_2, \end{aligned}$$

对于低、中频段得出下列结论:

针对式(26)的重复过程模型, 给定适当维数矩阵 X_1 , X_2 , 对称矩阵 $\hat{P} > 0$, $\hat{Q} > 0$, $\hat{Z} > 0$, $S_1 > 0$ 和 $S_2 > 0$ 以及标量 $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$ 和 $\gamma > 0$ 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \rho_2 S_1^T + \rho_2 S_1 & \hat{Z} - \rho_2 A S_1 - \rho_2 B X_1 - \rho_1 S_1^T \\ * & \text{sym}\{\rho_1 A S_1 + \rho_1 B X_1\} \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} - S_1^T & 0 & 0 \\ * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & 0 & \hat{N}_{12} - S_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \hat{N}_{11} & 0 & \hat{N}_{12} - S_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T + B X_2 & E & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{S_2 - C B X_2\} & -CE & -F & S_2^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

则在迭代学习更新律(24)作用下, 等效系统(19)在低、中频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛, 迭代学习控制律的增益由 $K_1 = X_1 S_1^{-1}$, $K_2 = X_2 S_2^{-1}$ 给出;

同时相应高频段的结论为:

针对式(26)的重复过程模型, 给定适当维数矩阵 X_1 , X_2 , 对称矩阵 $\hat{P} > 0$, $\hat{Q} > 0$, $\hat{Z} > 0$, $S_1 > 0$ 和 $S_2 > 0$ 以及标量 $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$, $\gamma > 0$ 和 $\tau > 0$ 使得式(51)以及下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_{11} - \tau S_1^T - \tau S_1 & \hat{N}_{12} + \tau A S_1 + \tau B X_1 - S_1^T & \tau B K_2 & 0 \\ * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_1 & 0 & \hat{N}_{12} + \tau A S_1 + \tau B X_1 - S_1^T & \tau B X_2 & \tau E & 0 & 0 \\ * & \hat{T}_2 & -\tau C A S_1 - \tau C B X_1 & \hat{N}_{12} + \tau S_2 - \tau C B X_2 - S_2^T & -\tau C E & -\tau F & 0 \\ * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T + B X_2 & E & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{S_2 - C B X_2\} & -C E & -F & S_2^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

其中 $\hat{T}_1 = \hat{N}_{11} - \tau S_1 - \tau S_1^T$, $\hat{T}_2 = \hat{N}_{11} - \tau S_2 - \tau S_2^T$ 则在迭代学习更新律(24)作用下, 等效系统(19)在高频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛, 迭代学习控制律的增益由 $K_1 = X_1 S_1^{-1}$, $K_2 = X_2 S_2^{-1}$ 给出。

本发明的有益技术效果是:

本申请公开了一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法, 根据重复过程理论和广义有界实引理, 给出确保系统稳定和具有鲁棒控制性能的充分条件并保证了输出跟踪误差在时域和频域内的收敛性, 同时将该条件转换成相应的线性矩阵不等式对鲁棒迭代学习控制律进行求解, 本申请不仅考虑了单个倒立摆子系统时间和运行维度的系统特性, 而且能直接应用于由多个倒立摆子系统组成的串联倒立摆系统, 具有较好的控制精度, 对于控制理论的验证以及具有相似结构系统的研究具有良好的应用价值, 同时, 本申请的方法结构简单, 易于工程实现。

附图说明

图1是本申请提供的串联倒立摆的迭代学习控制方法的流程图。

图2是本申请提供的串联倒立摆整体结构图。

图3是本申请提供的小车受力分析图。

图 4 是本申请提供的摆杆受力分析图。

图 5 是本申请一实施例提供的串联倒立摆系统的输出参考轨迹。

图 6 是本申请一实施例提供的串联倒立摆系统的输出参考轨迹频谱。

图 7 是本申请一实施例提供的串联倒立摆第 3 个子系统的输出变化曲面。

图 8 是本申请一实施例提供的串联倒立摆第 3 个子系统的输入变化曲面。

图 9 是本申请一实施例提供的串联倒立摆第 3 个子系统的误差变化曲面。

图 10 是本申请一实施例提供的串联倒立摆系统的均方根误差变化效果。

具体实施方式

下面结合附图对本发明的具体实施方式做进一步说明。

本申请公开了一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法，其方法流程图如图 1 所示，串联倒立摆本身具有强耦合、非线性以及不稳定等特点，对其建立状态空间模型具有一定的难度。但是通过对系统的合理假设，将部分系统变量进行合理的近似后，就可以使用经典的牛顿力学在惯性坐标系内对串联倒立摆系统建立的状态空间模型。

在建立串联倒立摆的状态空间方程的步骤之前，方法还包括：

对串联倒立摆进行建模之前，对串联倒立摆系统作如下假设：

- (1) 摆体是严格的刚体，运动过程中不会变形，
- (2) 小车与导轨间的摩擦力与相对速度成正比，忽略空气阻力及其他摩擦力，
- (3) 外力对串联倒立摆系统的作用无时滞。

串联倒立摆系统包括多个通过弹簧串联的一级倒立摆，根据牛顿力学先对第 P 个节点的一级倒立摆单独进行动力学分析，利用隔离法将第 P 个节点的一级倒立摆分为小车和摆杆两个部分，对两个部分分别进行受力分析。串联倒立摆的物理量参数如表 2 所示。

表 2 串联倒立摆系统物理量参数表

符号	含义	单位
p	控制节点序号	无
L_p	第 P 个节点小车相对初始位置的位移	m
θ_p	第 P 个节点摆杆与竖直向上方向的夹角	rad
m	摆杆质量	kg
l	摆杆质心到转动轴心的距离	cm

J	摆杆的转动惯量	$kg \times m^2$
M	小车质量	kg
a	弹簧劲度系数	N / m
b	小车摩擦系数	$N / m / sec$
F	作用于串联倒立摆系统上的控制力	N
F_N	摆杆与小车水平方向的相互作用力	N
F_f	小车与导轨间的摩擦力	N
F_{p-1}	第 $p-1$ 个节点对第 p 个节点的作用力	N
F_{p+1}	第 $p+1$ 个节点对第 p 个节点的作用力	N
F_T	摆杆与小车竖直方向的相互作用力	N
G_m	摆杆的重力	N

结合图 2-图 4 所示，对小车进行受力分析，在水平方向上，由牛顿力学分析得到小车的运动方程为：

$$M\ddot{L}_p = F - F_{p-1} - F_{p+1} - F_N - F_f \quad (1)$$

由假设得到：

$$F_f = b\dot{L}_p \quad (2)$$

对摆杆进行受力分析，在水平方向上得到：

$$F_N = m \frac{d^2}{dt^2} (L_p - l \sin \theta_p) \quad (3)$$

将式(3)求导展开得到：

$$F_N = m\ddot{L}_p + ml(\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p - ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p \quad (4)$$

同时根据串联倒立摆整体结构得到：

$$\begin{aligned} F_{p-1} &= a(L_p - L_{p-1}) \\ F_{p+1} &= a(L_p - L_{p+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)、式(4)和式(2)代入式(1)得到：

$$M\ddot{L}_p = F - a(L_p - L_{p-1}) - a(L_p - L_{p+1}) - m\ddot{L}_p - ml(\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p + ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - b\dot{L}_p \quad (6)$$

将式(6)化简合并得到系统第一运动方程式(7)

$$(M + m)\ddot{L}_p + b\dot{L}_p + ml(\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p - ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - aL_{p-1} + 2aL_p - aL_{p+1} = F \quad (7)$$

对摆杆进行受力分析，根据力矩平衡方程得到：

$$F_T l \sin \theta_p + F_N l \cos \theta_p = J \ddot{\theta}_p \quad (8)$$

在摆杆竖直方向上受力分析得到:

$$F_T - G_m = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta_p) \quad (9)$$

展开式(9)得到:

$$F_T - mg = -ml \ddot{\theta}_p \sin \theta_p - ml (\dot{\theta}_p)^2 \cos \theta_p \quad (10)$$

将式(4)和式(10)代入式(8)得到系统第二运动方程式(11)

$$\begin{aligned} mgl \sin \theta_p - ml^2 \ddot{\theta}_p \sin^2 \theta_p - ml^2 \ddot{\theta}_p \cos^2 \theta_p - ml^2 (\dot{\theta}_p)^2 \cos \theta_p \sin \theta_p \\ + ml^2 (\dot{\theta}_p)^2 \cos \theta_p \sin \theta_p + ml \ddot{L}_p \cos \theta_p = J \ddot{\theta}_p \end{aligned} \quad (11)$$

为实现串联倒立摆在平衡点附近微小的角度内重复摆动,同时对串联倒立摆系统变量进行如下近似处理:

$$\begin{cases} \cos \theta_p = 1 \\ \sin \theta_p = \theta_p \end{cases} \quad (12)$$

同时:

$$\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - (\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p = \frac{d}{d\theta_p} (\dot{\theta}_p \cos \theta_p) = \ddot{\theta}_p \quad (13)$$

将周期变量 k 和时间变量 t 加入第一运动方程式(7)和第二运动方程式(11)中并根据式(12)和式(13)简化得到串联倒立摆的运动方程为:

$$\begin{cases} ml \ddot{L}_k(p, t) = (J + ml^2) \ddot{\theta}_k(p, t) - mgl \theta_k(p, t) \\ F_k(p, t) = (M + m) \ddot{L}_k(p, t) + b \dot{L}_k(p, t) - ml \ddot{\theta}_k(p, t) \\ \quad - aL_k(p-1, t) + 2aL_k(p, t) - aL_k(p+1, t) \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)的第一个方程得到:

$$\ddot{L}_k(p, t) = \frac{J + ml^2}{ml} \ddot{\theta}_k(p, t) - g \theta_k(p, t) \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)的第二个方程得到:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_k(p,t) = & \frac{aml}{J(M+m)+Mml^2} L_k(p-1,t) + \frac{-2aml}{J(M+m)+Mml^2} L_k(p,t) \\
& + \frac{-mlb}{J(M+m)+Mml^2} \dot{L}_k(p,t) + \frac{(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2} \theta_k(p,t) \\
& + \frac{aml}{J(M+m)+Mml^2} L_k(p+1,t) + \frac{ml}{J(M+m)+Mml^2} F_k(p,t)
\end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)回代式(15)的第一个方程得到:

$$\begin{aligned}
\ddot{L}_k(p,t) = & \frac{a(J+ml^2)}{J(M+m)+Mml^2} L_k(p-1,t) + \frac{-2a(J+ml^2)}{J(M+m)+Mml^2} L_k(p,t) \\
& + \frac{-(J+ml^2)b}{J(M+m)+Mml^2} \dot{L}_k(p,t) + \frac{m^2 l^2 g}{J(M+m)+Mml^2} \theta_k(p,t) \\
& + \frac{a(J+ml^2)}{J(M+m)+Mml^2} L_k(p+1,t) + \frac{J+ml^2}{J(M+m)+Mml^2} F_k(p,t)
\end{aligned}$$

取 $\dot{\theta}_k(p,t) = \dot{\theta}_k(p,t)$, $\dot{L}_k(p,t) = \dot{L}_k(p,t)$ 同时设置如下形式状态变量:

$$\begin{aligned}
x_k(p,t) &= [\theta_k(p,t) \quad \dot{\theta}_k(p,t) \quad L_k(p,t) \quad \dot{L}_k(p,t)]^T \\
y_k(p,t) &= [\theta_k(p,t) \quad \dot{\theta}_k(p,t) \quad L_k(p,t) \quad \dot{L}_k(p,t)]^T \\
x_k(p-1,t) &= [\theta_k(p-1,t) \quad \dot{\theta}_k(p-1,t) \quad L_k(p-1,t) \quad \dot{L}_k(p-1,t)]^T \\
x_k(p+1,t) &= [\theta_k(p+1,t) \quad \dot{\theta}_k(p+1,t) \quad L_k(p+1,t) \quad \dot{L}_k(p+1,t)]^T \\
u_k(p,t) &= F_k(p,t)
\end{aligned}$$

并在系统每个倒立摆子系统节点中引入状态端外部有界扰动 $v_k(p,t)$ 和输出端外部有界扰动信号 $w_k(p,t)$, 则得到串联倒立摆的状态空间方程:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(p,t) = \hat{A}_1 \mathbf{x}_k(p-1,t) + \hat{A}_2 \mathbf{x}_k(p,t) + \hat{A}_3 \mathbf{x}_k(p+1,t) + \hat{B} u_k(p,t) + \hat{E} v_k(p,t) \\ y_k(p,t) = \hat{C} \mathbf{x}_k(p,t) + \hat{F} w_k(p,t) \end{cases} \quad (17)$$

针对式(17)所描述的串联倒立摆, 选取各项结构参数值分别为:

$$\begin{aligned}
M &= 1(\text{kg}), \quad m = 0.2(\text{kg}), \quad l = 0.3(\text{m}), \quad a = 1(\text{N} / \text{m}), \\
b &= 0.3(\text{N} / \text{m} / \text{sec}), \quad g = 9.8(\text{m} / \text{s}^2), \quad J = 0.006(\text{kg} \cdot \text{m}^2).
\end{aligned}$$

同时取串联倒立摆各子系统的状态初值 $x_k(p,0) = 0$, $u_k(p,0) = 0$ 。根据式(17)系统各个参数矩阵为

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.38 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 28 & 0 & -4.76 & -0.71 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.4 & 0 & -1.9 & -0.29 \end{bmatrix}, \hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

设定串联倒立摆包含6个子系统节点,根据串联倒立摆系统的特点,定义每个子系统各个节点具有相同的参考轨迹,考虑分别定义每个节点摆杆摆动角度的参考轨迹为:

$$\theta_d(p,t) = 0.3[\sin(\frac{\pi}{2}t)], p=1,2,\dots,6.$$

倒立摆的参考轨迹角度在STM32F103C8T6单片机内进行设定,参考轨迹在时域中的曲线如图5所示,绘制相应的频谱曲线如图6所示,由图6可知参考轨迹的有效谐波在0到10HZ之间全部衰减,因此可以直接选取该频段为系统运行的低频范围,即 $\omega_l = 4\pi = 62.832$,对应于系统运行的低频范围。同时,假设每个倒立摆子系统的状态端外界扰动为

$$v_k(p,t) = 0.01\sin(kt), p=1,2,\dots,6.$$

以及输出端外界扰动为

$$w_k(p,t) = 0.01\sin(kt), p=1,2,\dots,6.$$

给定系统的鲁棒性能指标 $\gamma=0.9$,并求解式(51)、式(52)和式(53)的线性矩阵不等式可得迭代学习更新律(24)中的矩阵增益为

$$\hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0069 & 0.1036 & 0.1313 \\ -0.0003 & -0.0003 & -0.9989 & 0.0007 \\ -0.4454 & -2.2279 & -0.3458 & -2.2456 \\ 0.0078 & 0.0104 & -1.0026 & -0.0018 \end{bmatrix}, \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} -4.0293 & -25.7593 & -0.6535 & -3.5950 \\ -11.8332 & -0.2593 & 1.9986 & 0.2967 \\ 0.8053 & 4.3229 & 0.6494 & 4.2062 \\ -1.4960 & -0.0274 & 1.8369 & -0.3019 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K}_3 = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0069 & 0.1036 & 0.1313 \\ -0.0003 & -0.0003 & -0.9989 & 0.0007 \\ -0.4454 & -2.2279 & -0.3458 & -2.2456 \\ 0.0078 & 0.0104 & -1.0026 & -0.0018 \end{bmatrix}, \hat{K} = \begin{bmatrix} 2.2013 & 0.0920 & 0.0000 & -0.0002 \\ 0.0920 & 0.2644 & -0.0001 & -0.0011 \\ 0.0000 & -0.0001 & 2.2013 & 0.1766 \\ -0.0002 & -0.0011 & 0.1766 & 0.7907 \end{bmatrix}.$$

上述迭代学习控制器算法通过一块STM32F103C8T6芯片实现。整体系统由STM32F103C8T6单片机、MG513编码器、直流电机、倒立摆机械机构和WDD35D4角传感器等几部分组成。利用WDD35D4角传感器作为摆杆摆动角度

权 利 要 求 书

1、一种串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法，其特征在于，所述方法包括如下步骤：

第一步：建立串联倒立摆的状态空间方程；

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(p, t) = \hat{A}_1 \mathbf{x}_k(p-1, t) + \hat{A}_2 \mathbf{x}_k(p, t) + \hat{A}_3 \mathbf{x}_k(p+1, t) + \hat{B} u_k(p, t) + \hat{E} v_k(p, t) \\ y_k(p, t) = \hat{C} \mathbf{x}_k(p, t) + \hat{F} w_k(p, t) \end{cases} \quad (17)$$

其中，

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aml}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(J+ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aml}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(J+ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{(M+m)J + Mml^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J+ml^2}{(M+m)J + Mml^2} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mgl}{(M+m)J + Mml^2} & 0 & \frac{-2aml}{(M+m)J + Mml^2} & \frac{-mlb}{(M+m)J + Mml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m^2 l^2 g}{(M+m)J + Mml^2} & 0 & \frac{-2a(J+ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} & \frac{-b(J+ml^2)}{(M+m)J + Mml^2} \end{bmatrix}, \\ \hat{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式(17)中 k 表示迭代周期， p 表示控制节点序号， t 代表连续时间，串联倒立摆系统工作于 $t \in [0, T]$ 的重复时间周期内； $\mathbf{x}_k(p, t) \in R^n$ ， $u_k(p, t) \in R^m$ 和

$y_k(p,t) \in R^l$ 分别表示串联倒立摆系统第 p 个节点的状态、输入和输出信号；
 $v_k(p,t) \in R^l$ 和 $w_k(p,t) \in R^l$ 分别表示串联倒立摆系统第 p 个节点的状态端外部有界扰动和输出端外部有界扰动信号，并且扰动信号可导； $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E}$ 和 $\hat{F}$ 分别表示适当维数的系统矩阵； m 表示摆杆质量， l 表示摆杆质心到转动轴心的距离， J 表示摆杆的转动惯量， M 表示小车质量， a 表示弹簧劲度系数， b 表示小车摩擦系数；串联倒立摆系统第 p 个节点的状态会受到前后节点状态的影响，其中 $0 \leq p \leq \alpha - 1$ ， α 表示串联倒立摆系统的总节点数，为已知的任意正整数；假设串联倒立摆系统满足边界条件 $x_k(p,0)=0$ ，并且 $x_k(-1,t)=0$ ， $x_k(\alpha,t)=0$ ；

第二步：对原串联倒立摆的状态空间方程进行转换；

对于所述原串联倒立摆的状态空间方程(17)，利用提升技术，定义关于输入、输出、状态和扰动信号的超级矢量 $U_k(t)$ ， $Y_k(t)$ ， $X_k(t)$ ， $V_k(t)$ ， $W_k(t)$ 为如下形式：

$$\begin{aligned} U_k(t) &= [u_k(0,t)^T, u_k(1,t)^T, u_k(2,t)^T, \dots, u_k(\alpha-1,t)^T]^T, \\ Y_k(t) &= [y_k(0,t)^T, y_k(1,t)^T, y_k(2,t)^T, \dots, y_k(\alpha-1,t)^T]^T, \\ X_k(t) &= [x_k(0,t)^T, x_k(1,t)^T, x_k(2,t)^T, \dots, x_k(\alpha-1,t)^T]^T, \\ V_k(t) &= [v_k(0,t)^T, v_k(1,t)^T, v_k(2,t)^T, \dots, v_k(\alpha-1,t)^T]^T, \\ W_k(t) &= [w_k(0,t)^T, w_k(1,t)^T, w_k(2,t)^T, \dots, w_k(\alpha-1,t)^T]^T. \end{aligned} \quad (18)$$

则所述原串联倒立摆的状态空间方程(17)转换成等效系统：

$$\begin{cases} \dot{X}_k(t) = AX_k(t) + BU_k(t) + EV_k(t) \\ Y_k(t) = CX_k(t) + FW_k(t) \end{cases} \quad (19)$$

其中，

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & \hat{A}_3 & & 0 \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 \\ 0 & & & \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \end{bmatrix}, \quad B = \text{diag}\{\hat{B}, \dots, \hat{B}\}, \quad C = \text{diag}\{\hat{C}, \dots, \hat{C}\}, \\ E &= \text{diag}\{\hat{E}, \dots, \hat{E}\}, \quad F = \text{diag}\{\hat{F}, \dots, \hat{F}\} \end{aligned}$$

第三步：根据重复过程理论设计鲁棒迭代学习控制算法；

定义所述等效系统输出跟踪误差为

$$e_k(t) = Y_r(t) - Y_k(t)$$

其中 $Y_r(t)$ 为期望输出信号的超级矢量，且为连续可导的期望输出轨迹；

针对所述等效系统(19)设计如下形式的迭代学习控制律

$$U_k(t) = U_{k-1}(t) + \Delta U_k(t) \quad (20)$$

在式(20)中， $U_k(t)$ 是当前周期的输入量； $U_{k-1}(t)$ 是前一个周期的输入量； $\Delta U_k(t)$ 是控制系统周期更新的修正量，为了便于分析，定义中间变量 $\eta_k(t)$ ， $\mathcal{G}_k(t)$ 和 $\zeta_k(t)$ 为

$$\begin{aligned} \eta_k(t) &= \int_0^t [X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)] d\tau, \\ \mathcal{G}_k(t) &= \int_0^t [V_k(\tau) - V_{k-1}(\tau)] d\tau, \\ \zeta_k(t) &= W_k(t) - W_{k-1}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(19)、式(20)和式(21)得到：

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_k(t) &= \int_0^t [\dot{X}_k(\tau) - \dot{X}_{k-1}(\tau)] d\tau \\ &= X_k(t) - X_{k-1}(t) \\ &= A\eta_k(t) + B \int_0^t \Delta U_k(\tau) d\tau + E\mathcal{G}_k(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e_k(t) &= e_{k-1}(t) - C[X_k(t) - X_{k-1}(t)] - F[W_k(t) - W_{k-1}(t)] \\ &= -C\dot{\eta}_k(t) + e_{k-1}(t) - F\zeta_k(t) \\ &= -CA\eta_k(t) - CB \int_0^t \Delta U_k(\tau) d\tau - CE\mathcal{G}_k(t) + e_{k-1}(t) - F\zeta_k(t) \end{aligned} \quad (23)$$

将式(20)中的迭代学习更新律定义为如下形式：

$$\Delta U_k(t) = K_1 \dot{\eta}_k(t) + K_2 \dot{e}_{k-1}(t) \quad (24)$$

其中，

$$K_1 = \begin{bmatrix} \hat{K}_2 & \hat{K}_3 & & 0 \\ \hat{K}_1 & \hat{K}_2 & \hat{K}_3 & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \hat{K}_1 & \hat{K}_2 & \hat{K}_3 \\ 0 & & & \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{bmatrix}, K_2 = \text{diag} \{ \hat{K}, L, \hat{K} \} \quad (25)$$

其中 $\hat{K}_1$ ， $\hat{K}_2$ ， $\hat{K}_3$ ， $\hat{K}$ 分别对应将所述迭代学习更新律与所述等效系统(19)结合，

得到被控系统的重复过程模型为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{\eta}_k(t) = \bar{A}\eta_k(t) + \bar{B}e_{k-1}(t) + \bar{E}g_k(t) \\ e_k(t) = \bar{C}\eta_k(t) + \bar{D}e_{k-1}(t) + \bar{F}g_k(t) + \bar{G}\zeta_k(t) \end{cases} \quad (26)$$

其中，

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + BK_1, \quad \bar{B} = BK_2, \quad \bar{C} = -CA - CBK_1, \\ \bar{D} &= I - CBK_2, \quad \bar{E} = E, \quad \bar{F} = -CE, \quad \bar{G} = -F \end{aligned} \quad (27)$$

I 表示单位矩阵；

所述重复过程模型(26)从系统误差 $e_{k-1}(t)$ 到系统误差 $e_k(t)$ 之间的传递函数为：

$$G(j\omega) = \bar{C}(j\omega I - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

为了进一步表示系统外部有界扰动与系统输出之间的关系，将式(26)转换成如下形式的连续离散重复过程模型：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_k(t) \\ e_k(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \eta_k(t) \\ e_{k-1}(t) \end{bmatrix} + \tilde{B} \begin{bmatrix} g_k(t) \\ \zeta_k(t) \end{bmatrix} \\ e_{k-1}(t) = \tilde{C} \begin{bmatrix} \eta_k(t) \\ e_{k-1}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (28)$$

其中，

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \bar{E} & 0 \\ \bar{F} & \bar{G} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0 \quad 1] \quad (29)$$

则所述连续离散重复过程模型(28)从系统外部有界扰动 $\begin{bmatrix} g_k(t) \\ \zeta_k(t) \end{bmatrix}$ 到系统误差 $e_{k-1}(t)$ 之间的传递函数为：

$$G_{wz}(j\omega) = \tilde{C}(j\omega I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

ω 表示系统工作频率；

第四步：分析有限频率范围内的所述鲁棒迭代学习控制算法的收敛性；

本申请的控制目标是设计鲁棒迭代学习控制律使得具有外部有界扰动的所述等效系统(19)在有限频率范围内鲁棒稳定；首先应保证在无外部有界扰动情况下所述等效系统(19)的稳定性；

在无外部有界扰动情况下，重复过程稳定和误差收敛需要满足三个条件：

条件一：所述重复过程模型(26)的矩阵 $\bar{A}$ 的所有特征值都具有严格的负实部；

条件二：所述重复过程模型(26)的矩阵 $\bar{D}$ 的谱半径严格小于 1；

条件三：所述重复过程模型(26)传递函数的矩阵 $G(j\omega) = \bar{C}(j\omega I - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$, $\forall \omega \geq 0$, 其特征值的模严格小于 1;

在无外部有界扰动情况下, 所述重复过程模型(26)在有限频率范围内稳定和误差收敛的结论为:

对于所述重复过程模型(26), 若存在对称正定矩阵 $Q > 0$, $P > 0$, $Z > 0$ 和 $W_1 > 0$ 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\bar{A}^T Z + Z \bar{A} < 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} - W_1 & 0 & 0 \\ N_{21} - W_1^T & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & W_1^T \bar{B} & \bar{C}^T \\ 0 & \bar{B}^T W_1 & -I & \bar{D}^T \\ 0 & \bar{C} & \bar{D} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

则无扰动的等效系统(19)在所述迭代学习更新律(24)的作用下, 输出跟踪误差在低、中频段范围内沿时间和批次方向单调收敛;

对于重复过程模型(26), 若存在对称正定矩阵 $Q > 0$, $P > 0$, $Z > 0$ 和 $W_1 > 0$, 以及标量 $\tau > 0$ 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\bar{A}^T Z + Z \bar{A} < 0 \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} - \tau W_1 - \tau W_1^T & N_{12} + \tau W_1^T \bar{A} - W_1 & \tau W_1^T \bar{B} & 0 \\ N_{21} + \tau \bar{A}^T W_1 - W_1^T & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & W_1^T \bar{B} & \bar{C}^T \\ \tau \bar{B}^T W_1 & \bar{B}^T W_1 & -I & \bar{D}^T \\ 0 & \bar{C} & \bar{D} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

则无扰动的等效系统(19)在所述迭代学习更新律(24)作用下, 输出跟踪误差在高频段范围内沿时间和批次方向单调收敛;

在无扰动结论的基础上进一步扩展带有外部有界扰动的等效系统(19)在有限频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能的结论;

若所述连续离散重复过程模型(28)从外部有界扰动到系统输出误差之间的传递函数 $G_{wz}(s)$ 满足

$$\|G_{wz}(s)\|_{\infty} < \gamma \quad (34)$$

则称所述连续离散重复过程模型具有鲁棒性能, γ 为其性能指标, 且 γ 取值越小, 表明所述连续离散重复过程模型的抑制干扰的性能越好;

将所述连续离散重复过程模型(28)的系数矩阵(29)代入广义有界实引理的线性矩阵不等式, 同时令 $\tilde{N}_{11} = \text{diag}\{N_{11}, N_{11}\}$, $\tilde{N}_{12} = \text{diag}\{N_{12}, N_{12}\}$,

$\tilde{N}_{21} = \text{diag}\{N_{21}, N_{21}\}$, $\tilde{N}_{22} = \text{diag}\{N_{22}, N_{22}\}$, 并取频率响应不等式中的矩阵 $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 则线性矩阵不等式写成:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

且式(35)又可以写成:

$$(\Lambda^\perp)^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Lambda^\perp < 0 \quad (36)$$

其中 $(\Lambda^\perp)^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}^T & I & 0 \\ \tilde{B}^T & 0 & I \end{bmatrix}$, 对于式(36)中的 $\Lambda^\perp$, 取 $\Lambda = \begin{bmatrix} -I & \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix}$;

其次, 取矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

则得到下列等式:

$$\Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中定义 $Q > 0$, 根据广义有界实引理中 $N_{11} = -Q$ 可得 $\tilde{N}_{11} < 0$, 又因为 $-\gamma^2 I < 0$ 所以 $\Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp < 0$;

根据投影引理 $\Lambda^{\perp T} \Upsilon \Lambda^\perp < 0, \Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp < 0$ 得到以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{sym}\{\Lambda^T \tilde{W} \Sigma\} < 0 \quad (38)$$

其中 $\tilde{W} = \text{diag}\{W_1, W_2\}$; 对式(38)使用 Schur 补引理得到:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} - \tilde{W} & 0 & 0 \\ * & \tilde{N}_{22} + \tilde{A}^T \tilde{W} + \tilde{W}^T \tilde{A} & \tilde{W}^T \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

根据广义有界实引理 $G(j\omega)^*G(j\omega) < \gamma^2$, 得到 $\rho(G(j\omega)) < \gamma$, 由于 $\rho(G(j\omega)) \leq \|G(j\omega)\|_\infty$, 则得到:

$$\|G(j\omega)\|_\infty < \gamma$$

保证了所述连续离散重复过程系统(28)具有鲁棒性能 γ ;

因此对于低、中频段得到下列结论:

针对式(26)所述的重复过程模型, 给定对称矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, $Z > 0$, $W_1 > 0$ 和 $W_2 > 0$ 以及给定标量 $\gamma > 0$ 使得式(30)和式(31)以及下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} - W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & N_{11} & 0 & N_{12} - W_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & \bar{C}^T W_2 + W_1^T \bar{B} & W_1^T \bar{E} & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{22} + \bar{D}^T W_2 + W_2^T \bar{D} & W_2^T \bar{F} & W_2^T \bar{G} & I \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

则在所述迭代学习更新律(24)作用下, 所述等效系统(19)在低、中频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛;

根据广义有界实引理中 N 矩阵 N_{11} 元素在低、中频范围内和高频范围内的取值可知, 低中频段为 $-Q$, 高频段为 Q , 不同频段取值不同, 当系统工作于高频段时 $N_{11} = Q > 0$, 相应的结论式(40)无法保证其负定, 因此引入标量 $\tau > 0$, 取下列矩阵

$$\Sigma = [\tau I \quad I \quad 0], \quad \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} I & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \\ 0 & \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

则得到:

$$\Sigma^{\perp T} \Upsilon \Sigma^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} - \tau(\tilde{N}_{21} + \tilde{N}_{12}) + \tau^2(\tilde{N}_{22} + \tilde{C}^T \tilde{C}) & -\tau \tilde{C}^T \\ -\tau \tilde{C} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

则相应高频段的结论为:

针对式(26)所述的重复过程模型, 给定对称矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, $Z > 0$, $W_1 > 0$ 和 $W_2 > 0$ 以及给定标量 $\tau > 0$ 和 $\gamma > 0$ 使得式(32)和式(33)以及下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & N_{12} + \tau W_1^T \bar{A} - W_1 & \tau W_1^T \bar{B} & \tau W_1^T \bar{E} & 0 & 0 \\ * & T_2 & \tau W_2^T \bar{C} & N_{12} + \tau W_2^T \bar{D} - W_2 & \tau W_2^T \bar{F} & \tau W_2^T \bar{G} & 0 \\ * & * & N_{22} + \bar{A}^T W_1 + W_1^T \bar{A} & \bar{C}^T W_2 + W_1^T \bar{B} & W_1^T \bar{E} & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{22} + \bar{D}^T W_2 + W_2^T \bar{D} & W_2^T \bar{F} & W_2^T \bar{G} & I \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

其中 $T_1 = N_{11} - \tau W_1 - \tau W_1^T$, $T_2 = N_{11} - \tau W_2 - \tau W_2^T$; 则在所述迭代学习更新律(24)作用下, 所述等效系统(19)在高频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛;

第五步: 求解所述鲁棒迭代学习控制算法的控制律增益;
根据式(30)得出式(42)

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \bar{A}^T Z + Z \bar{A} < 0 \quad (42)$$

取 $\Lambda^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ I \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} -I & \bar{A} \end{bmatrix}$, 取 $\Sigma^\perp = \begin{bmatrix} \rho_1 I \\ \rho_2 I \end{bmatrix}$, 因此 $\Sigma = \begin{bmatrix} -\rho_2 I & \rho_1 I \end{bmatrix}$, 定义 $\rho_2 < 0, \rho_1 > 0$, 则得到:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 I & \rho_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 I \\ \rho_2 I \end{bmatrix} = 2\rho_1 \rho_2 Z < 0 \quad (43)$$

运用投射引理得到如下结果:

$$\begin{bmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} -I \\ \bar{A}^T \end{bmatrix} W_1 \begin{bmatrix} -\rho_2 I & \rho_1 I \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (44)$$

将所述重复过程模型的系数矩阵(27)代入式(44)并在上式不等式左右两边乘以 $\text{diag}\{S_1^T, S_1^T\}$ 、 $\text{diag}\{S_1, S_1\}$, 其中 $S_1 = W_1^{-1}$, 得到如下不等式:

$$\begin{bmatrix} \rho_2 S_1^T + \rho_2 S_1 & \tilde{Z} - \rho_2 A S_1 - \rho_2 B X_1 - \rho_1 S_1^T \\ * & \text{sym}\{\rho_1 A S_1 + \rho_1 B X_1\} \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

其中 $\tilde{Z} = S_1^T Z S_1$;

将所述重复过程模型的系数矩阵式(27)代入式(31), 因此得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} - W_1 & 0 & 0 \\ * & N_{22} + A^T W_1 + B^T K_1 W_1 + W_1^T A + W_1^T B K_1 & W_1^T B K_2 & -A^T C^T - K_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (46)$$

在式(31)中, 不等式左右两边乘以 $\text{diag}\{S_1^T, S_1^T, I, I\}$ 、 $\text{diag}\{S_1, S_1, I, I\}$, 其中 $S_1 = W_1^{-1}$, 得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix} S_1^T N_{11} S_1 & S_1^T N_{12} S_1 - S_1^T & 0 & 0 \\ * & S_1^T N_{22} S_1 + S_1^T A^T + S_1^T K_1^T B^T + A S_1 + B K_1 S_1 & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - S_1^T K_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

化简得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} - S_1^T & 0 & 0 \\ * & \tilde{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

其中 $\tilde{N}_{11} = S_1^T N_{11} S_1$, $\tilde{N}_{12} = S_1^T N_{12} S_1$, $\tilde{N}_{22} = S_1^T N_{22} S_1$;

将所述重复过程模型的系数矩阵 (27) 代入式(40), 得到:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} - W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & N_{11} & 0 & N_{12} - W_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_1 & \Gamma_2 & W_1^T E & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_3 & -W_2^T C E & -W_2^T F & I \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

其中,

$$\Gamma_1 = N_{22} + A^T W_1 + W_1^T A + K_1^T B^T W_1 + W_1^T B K_1, \quad \Gamma_2 = -K_1^T B^T C^T W_2 - A^T C^T W_2 + W_1^T B K_2,$$

$$\Gamma_3 = N_{22} + W_2^T + W_2 - K_2^T B^T C^T W_2 - W_2^T C B K_2,$$

在式(49)左右两边乘以 $\text{diag}\{S_1^T, S_2^T, S_1^T, S_2^T, I, I, I\}$ 、 $\text{diag}\{S_1, S_2, S_1, S_2, I, I, I\}$, 其中 $S_1 = W_1^{-1}$, $S_2 = W_2^{-1}$ 得到

$$\begin{bmatrix} S_1^T N_{11} S_1 & 0 & S_1^T N_{12} S_1 - S_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & S_2^T N_{11} S_2 & 0 & S_2^T N_{12} S_2 - S_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Gamma}_1 & \hat{\Gamma}_2 & E & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Gamma}_3 & -C E & -F & S_2^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

其中,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_1 &= S_1^T N_{22} S_1 + S_1^T A^T + A S_1 + S_1^T K_1^T B^T + B K_1 S_1, \quad \hat{\Gamma}_2 = -S_1^T K_1^T B^T C^T - S_1^T A^T C^T + B K_2 S_2, \\ \hat{\Gamma}_3 &= S_2^T N_{22} S_2 + S_2^T + S_2 - S_2^T K_2^T B^T C^T - C B K_2 S_2, \\ \text{令 } X_1 &= K_1 S_1, \quad X_2 = K_2 S_2,\end{aligned}$$

对于低、中频段得出下列结论:

针对式(26)所述的重复过程模型, 给定适当维数矩阵 X_1 , X_2 , 对称矩阵 $\hat{P} > 0$, $\hat{Q} > 0$, $\hat{Z} > 0$, $S_1 > 0$ 和 $S_2 > 0$ 以及标量 $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$ 和 $\gamma > 0$ 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \rho_2 S_1^T + \rho_2 S_1 & \hat{Z} - \rho_2 A S_1 - \rho_2 B X_1 - \rho_1 S_1^T \\ * & \text{sym}\{\rho_1 A S_1 + \rho_1 B X_1\} \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} - S_1^T & 0 & 0 \\ * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T \\ * & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & 0 & \hat{N}_{12} - S_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \hat{N}_{11} & 0 & \hat{N}_{12} - S_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T + B X_2 & E & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{S_2 - C B X_2\} & -C E & -F & S_2^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

则在所述迭代学习更新律(24)作用下, 所述等效系统(19)在低、中频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛, 所述迭代学习控制律的增益由 $K_1 = X_1 S_1^{-1}$, $K_2 = X_2 S_2^{-1}$ 给出;

同时相应高频段的结论为:

针对式(26)所述的重复过程模型, 给定适当维数矩阵 X_1 , X_2 , 对称矩阵 $\hat{P} > 0$, $\hat{Q} > 0$, $\hat{Z} > 0$, $S_1 > 0$ 和 $S_2 > 0$ 以及标量 $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$, $\gamma > 0$ 和 $\tau > 0$ 使得式(51)以及下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}
\hat{N}_{11} - \tau S_1^T - \tau S_1 & \hat{N}_{12} + \tau A S_1 + \tau B X_1 - S_1^T & \tau B K_2 & 0 \\
* & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & B K_2 & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T \\
* & * & -I & I - K_2^T B^T C^T \\
* & * & * & -I
\end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix}
\hat{T}_1 & 0 & \hat{N}_{12} + \tau A S_1 + \tau B X_1 - S_1^T & \tau B X_2 & \tau E & 0 & 0 \\
* & \hat{T}_2 & -\tau C A S_1 - \tau C B X_1 & \hat{N}_{12} + \tau S_2 - \tau C B X_2 - S_2^T & -\tau C E & -\tau F & 0 \\
* & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{A S_1 + B X_1\} & -S_1^T A^T C^T - X_1^T B^T C^T + B X_2 & E & 0 & 0 \\
* & * & * & \hat{N}_{22} + \text{sym}\{S_2 - C B X_2\} & -C E & -F & S_2^T \\
* & * & * & * & -I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I
\end{bmatrix} < 0$$

其中 $\hat{T}_1 = \hat{N}_{11} - \tau S_1 - \tau S_1^T$, $\hat{T}_2 = \hat{N}_{11} - \tau S_2 - \tau S_2^T$ 则在所述迭代学习更新律(24)作用下, 所述等效系统(19)在高频率范围内鲁棒稳定且具有鲁棒性能 γ , 同时输出跟踪误差沿时间和周期方向收敛, 所述迭代学习控制律的增益由 $K_1 = X_1 S_1^{-1}$, $K_2 = X_2 S_2^{-1}$ 给出。

2、根据权利要求1所述的串联倒立摆的有限频率范围鲁棒迭代学习控制方法, 其特征在于, 在所述建立串联倒立摆的状态空间方程的步骤之前, 所述方法还包括:

对串联倒立摆进行建模之前, 对所述串联倒立摆系统作如下假设:

- (1) 摆体是严格的刚体, 运动过程中不会变形,
- (2) 小车与导轨间的摩擦力与相对速度成正比, 忽略空气阻力及其他摩擦力,
- (3) 外力对所述串联倒立摆系统的作用无时滞;

所述串联倒立摆系统包括多个通过弹簧串联的一级倒立摆, 根据牛顿力学先对第 p 个节点的一级倒立摆单独进行动力学分析, 利用隔离法将第 p 个节点的一级倒立摆分为小车和摆杆两个部分, 对所述两个部分分别进行受力分析;

对所述小车进行受力分析, 在水平方向上, 由牛顿力学分析得到小车的运动方程为:

$$M \ddot{L}_p = F - F_{p-1} - F_{p+1} - F_N - F_f \quad (1)$$

在式(1)中, L_p 表示第 p 个节点小车相对初始位置的位移, F 表示作用于串联倒

立摆系统上的控制力， F_{p-1} 表示第 $p-1$ 个节点对第 p 个节点的作用力， F_{p+1} 表示第 $p+1$ 个节点对第 p 个节点的作用力， F_N 表示摆杆与小车水平方向的相互作用力， F_f 表示小车与导轨间的摩擦力；

由假设得到：

$$F_f = b\dot{L}_p \quad (2)$$

对摆杆进行受力分析，在水平方向上得到：

$$F_N = m \frac{d^2}{dt^2} (L_p - l \sin \theta_p) \quad (3)$$

在式(3)中， θ_p 表示第 p 个节点摆杆与竖直向上方向的夹角；

将式(3)求导展开得到：

$$F_N = m\ddot{L}_p + ml(\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p - ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p \quad (4)$$

同时根据串联倒立摆整体结构得到：

$$\begin{aligned} F_{p-1} &= a(L_p - L_{p-1}) \\ F_{p+1} &= a(L_p - L_{p+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)、式(4)和式(2)代入式(1)得到：

$$M\ddot{L}_p = F - a(L_p - L_{p-1}) - a(L_p - L_{p+1}) - m\ddot{L}_p - ml(\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p + ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - b\dot{L}_p \quad (6)$$

将式(6)化简合并得到系统第一运动方程式(7)

$$(M+m)\ddot{L}_p + b\dot{L}_p + ml(\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p - ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - aL_{p-1} + 2aL_p - aL_{p+1} = F \quad (7)$$

对所述摆杆进行受力分析，根据力矩平衡方程得到：

$$F_T l \sin \theta_p + F_N l \cos \theta_p = J\ddot{\theta}_p \quad (8)$$

在式(8)中， F_T 表示摆杆与小车竖直方向的相互作用力；

在摆杆竖直方向上受力分析得到：

$$F_T - G_m = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta_p) \quad (9)$$

在式(9)中， G_m 表示摆杆的重力；

展开式(9)得到：

$$F_T - mg = -ml\ddot{\theta}_p \sin \theta_p - ml(\dot{\theta}_p)^2 \cos \theta_p \quad (10)$$

将式(4)和式(10)代入式(8)得到系统第二运动方程式(11)

$$mgl \sin \theta_p - ml^2 \ddot{\theta}_p \sin^2 \theta_p - ml^2 \ddot{\theta}_p \cos^2 \theta_p - ml^2 (\dot{\theta}_p)^2 \cos \theta_p \sin \theta_p + ml^2 (\dot{\theta}_p)^2 \cos \theta_p \sin \theta_p + ml \ddot{L}_p \cos \theta_p = J \ddot{\theta}_p \quad (11)$$

为实现串联倒立摆在平衡点附近微小的角度内重复摆动，同时对所述串联倒立摆系统变量进行如下近似处理：

$$\begin{cases} \cos \theta_p = 1 \\ \sin \theta_p = \theta_p \end{cases} \quad (12)$$

同时：

$$\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - (\dot{\theta}_p)^2 \sin \theta_p = \frac{d}{d\theta_p} (\dot{\theta}_p \cos \theta_p) = \ddot{\theta}_p \quad (13)$$

将周期变量 k 和时间变量 t 加入所述第一运动方程式(7)和所述第二运动方程式(11)中并根据式(12)和式(13)简化得到串联倒立摆的运动方程为：

$$\begin{cases} ml \ddot{L}_k(p, t) = (J + ml^2) \ddot{\theta}_k(p, t) - mgl \theta_k(p, t) \\ F_k(p, t) = (M + m) \ddot{L}_k(p, t) + b \dot{L}_k(p, t) - ml \ddot{\theta}_k(p, t) \\ \quad - aL_k(p-1, t) + 2aL_k(p, t) - aL_k(p+1, t) \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)的第一个方程得到：

$$\ddot{L}_k(p, t) = \frac{J + ml^2}{ml} \ddot{\theta}_k(p, t) - g \theta_k(p, t) \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)的第二个方程得到：

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_k(p, t) &= \frac{aml}{J(M + m) + Mml^2} L_k(p-1, t) + \frac{-2aml}{J(M + m) + Mml^2} L_k(p, t) \\ &+ \frac{-mlb}{J(M + m) + Mml^2} \dot{L}_k(p, t) + \frac{(M + m)mgl}{J(M + m) + Mml^2} \theta_k(p, t) \\ &+ \frac{aml}{J(M + m) + Mml^2} L_k(p+1, t) + \frac{ml}{J(M + m) + Mml^2} F_k(p, t) \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)回代式(15)的第一个方程得到：

$$\begin{aligned} \ddot{L}_k(p, t) &= \frac{a(J + ml^2)}{J(M + m) + Mml^2} L_k(p-1, t) + \frac{-2a(J + ml^2)}{J(M + m) + Mml^2} L_k(p, t) \\ &+ \frac{-(J + ml^2)b}{J(M + m) + Mml^2} \dot{L}_k(p, t) + \frac{m^2 l^2 g}{J(M + m) + Mml^2} \theta_k(p, t) \\ &+ \frac{a(J + ml^2)}{J(M + m) + Mml^2} L_k(p+1, t) + \frac{J + ml^2}{J(M + m) + Mml^2} F_k(p, t) \end{aligned}$$

取 $\dot{\theta}_k(p,t) = \dot{\theta}_k(p,t)$, $\dot{L}_k(p,t) = \dot{L}_k(p,t)$ 同时设置如下形式状态变量:

$$x_k(p,t) = [\theta_k(p,t) \quad \dot{\theta}_k(p,t) \quad L_k(p,t) \quad \dot{L}_k(p,t)]^T$$

$$y_k(p,t) = [\theta_k(p,t) \quad \dot{\theta}_k(p,t) \quad L_k(p,t) \quad \dot{L}_k(p,t)]^T$$

$$x_k(p-1,t) = [\theta_k(p-1,t) \quad \dot{\theta}_k(p-1,t) \quad L_k(p-1,t) \quad \dot{L}_k(p-1,t)]^T$$

$$x_k(p+1,t) = [\theta_k(p+1,t) \quad \dot{\theta}_k(p+1,t) \quad L_k(p+1,t) \quad \dot{L}_k(p+1,t)]^T$$

$$u_k(p,t) = F_k(p,t)$$

并在系统每个倒立摆子系统节点中引入状态端外部有界扰动 $v_k(p,t)$ 和输出端外部有界扰动信号 $w_k(p,t)$, 则得到所述串联倒立摆的状态空间方程。

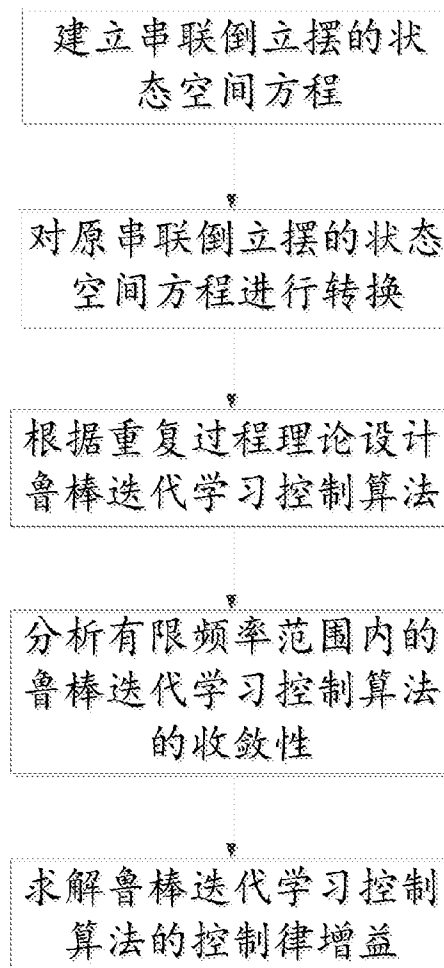


图 1

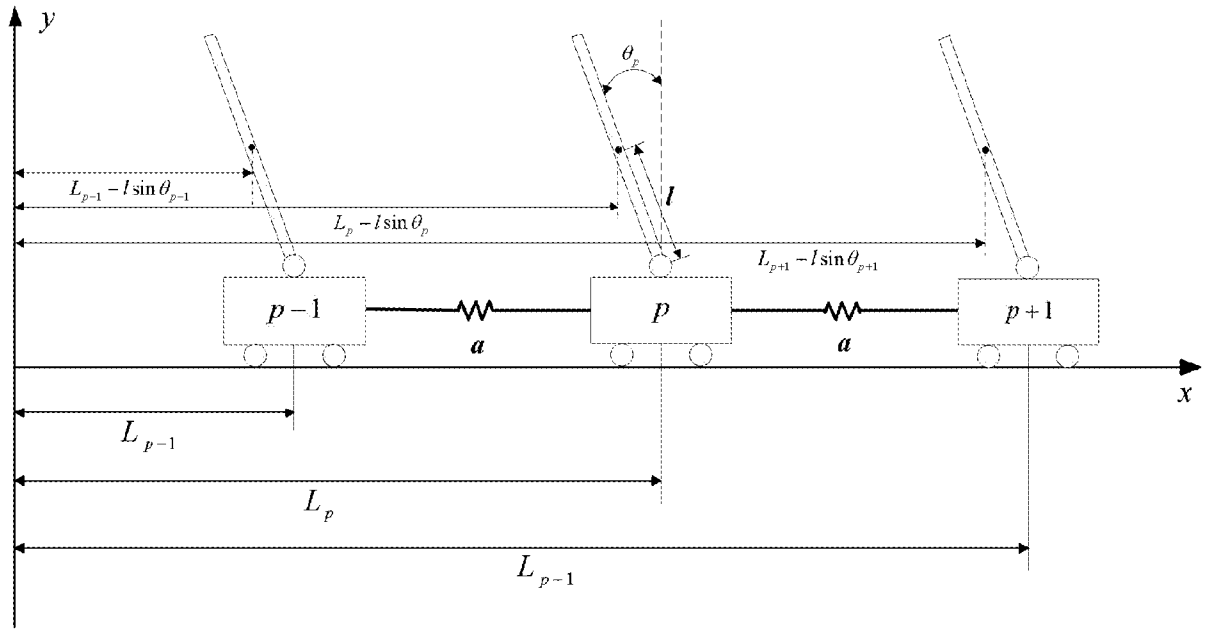


图 2

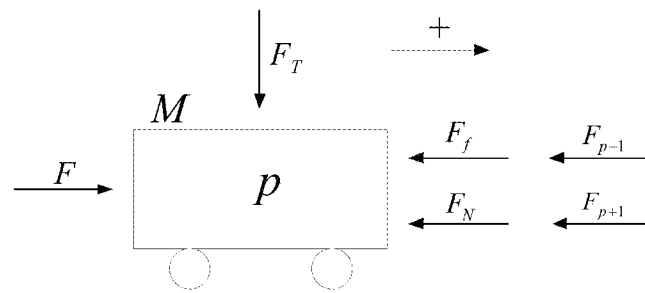


图 3

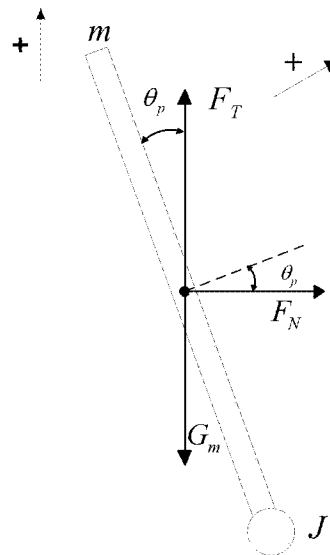


图 4

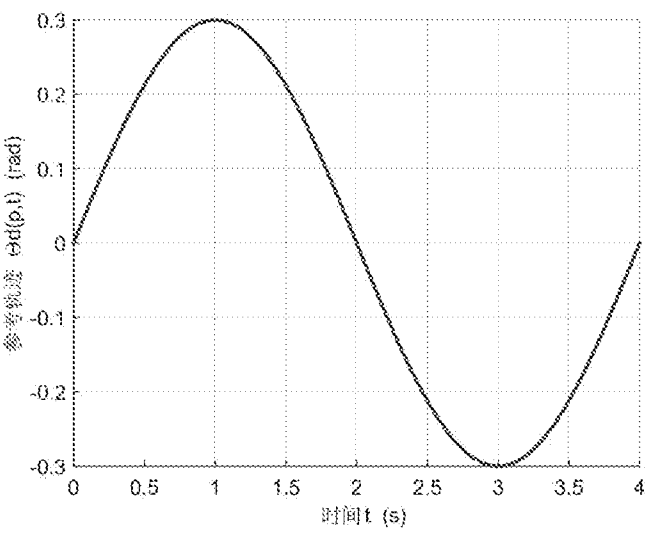


图 5

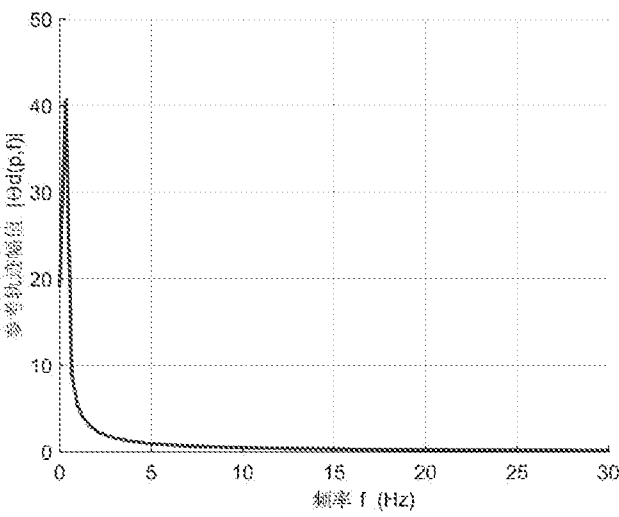


图 6

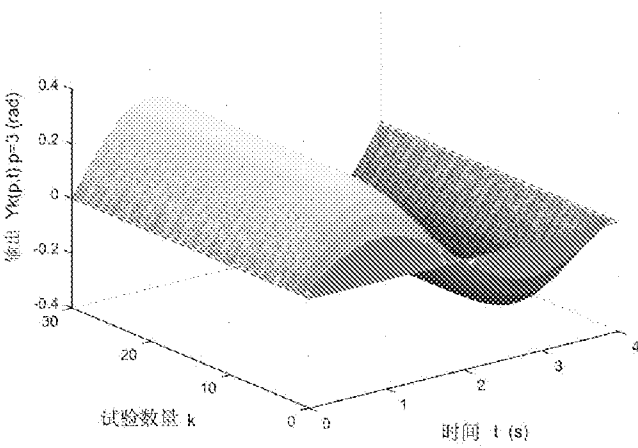


图 7

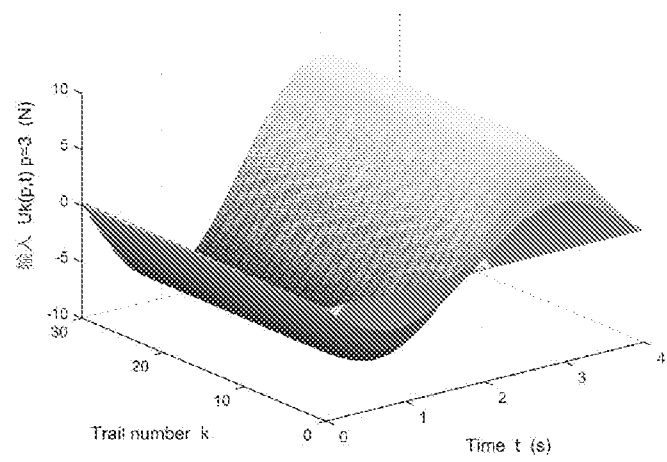


图 8

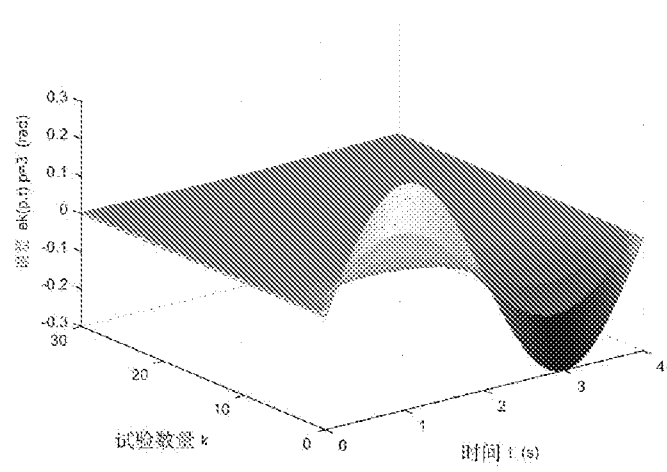


图 9

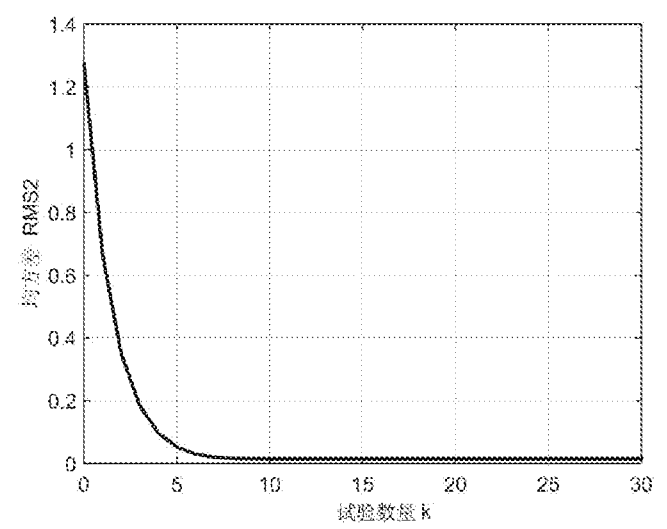


图 10

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.

PCT/CN2021/094741

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

G05B 13/04(2006.01)i

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

G05B13

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

CNABS, VEN, CNTXT, CNKI, 万方, 读秀, IEEE: 倒立摆, 串联, 多个, 多级, 二级, 三级迭代学习, 控制, 鲁棒, 有限频率范围, 空间互联系统, 多节点, inverted pendulum, IPS, series, iterative learning, control, ILC, robust, finite frequency range, spatially interconnected systems, multi-node.

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
PX	CN 111580392 A (JIANGNAN UNIVERSITY) 25 August 2020 (2020-08-25) entire document	1-2
A	CN 111360811 A (SHENYANG INSTITUTE OF AUTOMATION, CHINESE ACADEMY OF SCIENCES) 03 July 2020 (2020-07-03) entire document	1-2
A	CN 110908280 A (NINGBO UNIVERSITY) 24 March 2020 (2020-03-24) entire document	1-2
A	CN 110134011 A (UNIV ZHEJIANG TECHNOLOGY) 16 August 2019 (2019-08-16) entire document	1-2
A	WO 2008067404 A3 (HONDA MOTOR CO., LTD. et al.) 18 September 2008 (2008-09-18) entire document	1-2
A	US 2019272752 A1 (NEC LABORATORIES EUROPE GMBH) 05 September 2019 (2019-09-05) entire document	1-2



Further documents are listed in the continuation of Box C.



See patent family annex.

* Special categories of cited documents:

“A” document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

“E” earlier application or patent but published on or after the international filing date

“L” document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

“O” document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

“P” document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

“T” later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

“X” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

“Y” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art

“&” document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

16 July 2021

Date of mailing of the international search report

12 August 2021

Name and mailing address of the ISA/CN

China National Intellectual Property Administration (ISA/
CN)
No. 6, Xitucheng Road, Jimenqiao, Haidian District, Beijing
100088
China

Facsimile No. (86-10)62019451

Authorized officer

Telephone No.

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	陶洪峰 等 (TAO, Hongfeng et al.). "输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制 (Robust Iterative Learning Fault-Tolerant Control for a Dual-Rate Sampling System with Actuator Faults and Output Delay)" <i>控制与决策 (Control and Decision)</i> , Vol. 32, No. 9, 15 September 2017 (2017-09-15), entire document	1-2
A	Xianhe Zhang et al. "Iterative Learning Control Study on Single Inverted Pendulum" <i>2008 International Symposium on Intelligent Information Technology Application Workshops</i> , 30 December 2008 (2008-12-30), entire document	1-2
A	李战明 等 (LI, Zhanming et al.). "倒立摆的迭代学习控制方法研究 (Research on iterative learning control scheme for inverted pendulum)" <i>《传感器与微系统》 (Transducer and Microsystem Technologies)</i> , Vol. 27, No. 4, 15 April 2008 (2008-04-15), entire document	1-2

INTERNATIONAL SEARCH REPORT
Information on patent family members

International application No.

PCT/CN2021/094741

Patent document cited in search report			Publication date (day/month/year)	Patent family member(s)			Publication date (day/month/year)
CN	111580392	A	25 August 2020	None			
CN	111360811	A	03 July 2020	None			
CN	110908280	A	24 March 2020	None			
CN	110134011	A	16 August 2019	None			
WO	2008067404	A3	18 September 2008	US	7949430	B2	24 May 2011
				WO	2008067404	A2	05 June 2008
				US	2008133053	A1	05 June 2008
US	2019272752	A1	05 September 2019	US	10522036	B2	31 December 2019

国际检索报告

国际申请号

PCT/CN2021/094741

A. 主题的分类 G05B 13/04 (2006.01) i 按照国际专利分类 (IPC) 或者同时按照国家分类和 IPC 两种分类																										
B. 检索领域 检索的最低限度文献 (标明分类系统和分类号) G05B13 包含在检索领域中的除最低限度文献以外的检索文献 在国际检索时查阅的电子数据库 (数据库的名称, 和使用的检索词 (如使用)) CNABS, VEN, CNTXT, CNKI, 万方, 读秀, IEEE: 倒立摆, 串联, 多个, 多级, 二级, 三级迭代学习, 控制, 鲁棒, 有限频率范围, 空间互联系统, 多节点, inverted pendulum, IPS, series, iterative learning, control, ILC, robust, finite frequency range, spatially interconnected systems, multi-node.																										
C. 相关文件 <table border="1"> <thead> <tr> <th>类 型*</th> <th>引用文件, 必要时, 指明相关段落</th> <th>相关的权利要求</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>PX</td> <td>CN 111580392 A (江南大学) 2020年 8月 25日 (2020 - 08 - 25) 全文</td> <td>1-2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>CN 111360811 A (中国科学院沈阳自动化研究所) 2020年 7月 3日 (2020 - 07 - 03) 全文</td> <td>1-2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>CN 110908280 A (宁波大学) 2020年 3月 24日 (2020 - 03 - 24) 全文</td> <td>1-2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>CN 110134011 A (UNIV ZHEJIANG TECHNOLOGY) 2019年 8月 16日 (2019 - 08 - 16) 全文</td> <td>1-2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>WO 2008067404 A3 (HONDA MOTOR CO LTD等) 2008年 9月 18日 (2008 - 09 - 18) 全文</td> <td>1-2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>US 2019272752 A1 (NEC LABORATORIES EUROPE GMBH) 2019年 9月 5日 (2019 - 09 - 05) 全文</td> <td>1-2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>陶洪峰等. "输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制" 《控制与决策》, 第32卷, 第9期, 2017年 9月 15日 (2017 - 09 - 15), 全文</td> <td>1-2</td> </tr> </tbody> </table>			类 型*	引用文件, 必要时, 指明相关段落	相关的权利要求	PX	CN 111580392 A (江南大学) 2020年 8月 25日 (2020 - 08 - 25) 全文	1-2	A	CN 111360811 A (中国科学院沈阳自动化研究所) 2020年 7月 3日 (2020 - 07 - 03) 全文	1-2	A	CN 110908280 A (宁波大学) 2020年 3月 24日 (2020 - 03 - 24) 全文	1-2	A	CN 110134011 A (UNIV ZHEJIANG TECHNOLOGY) 2019年 8月 16日 (2019 - 08 - 16) 全文	1-2	A	WO 2008067404 A3 (HONDA MOTOR CO LTD等) 2008年 9月 18日 (2008 - 09 - 18) 全文	1-2	A	US 2019272752 A1 (NEC LABORATORIES EUROPE GMBH) 2019年 9月 5日 (2019 - 09 - 05) 全文	1-2	A	陶洪峰等. "输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制" 《控制与决策》, 第32卷, 第9期, 2017年 9月 15日 (2017 - 09 - 15), 全文	1-2
类 型*	引用文件, 必要时, 指明相关段落	相关的权利要求																								
PX	CN 111580392 A (江南大学) 2020年 8月 25日 (2020 - 08 - 25) 全文	1-2																								
A	CN 111360811 A (中国科学院沈阳自动化研究所) 2020年 7月 3日 (2020 - 07 - 03) 全文	1-2																								
A	CN 110908280 A (宁波大学) 2020年 3月 24日 (2020 - 03 - 24) 全文	1-2																								
A	CN 110134011 A (UNIV ZHEJIANG TECHNOLOGY) 2019年 8月 16日 (2019 - 08 - 16) 全文	1-2																								
A	WO 2008067404 A3 (HONDA MOTOR CO LTD等) 2008年 9月 18日 (2008 - 09 - 18) 全文	1-2																								
A	US 2019272752 A1 (NEC LABORATORIES EUROPE GMBH) 2019年 9月 5日 (2019 - 09 - 05) 全文	1-2																								
A	陶洪峰等. "输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制" 《控制与决策》, 第32卷, 第9期, 2017年 9月 15日 (2017 - 09 - 15), 全文	1-2																								
☒ 其余文件在C栏的续页中列出。 ☒ 见同族专利附件。																										
<table border="0"> <tr> <td> * 引用文件的具体类型: "A" 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件 "E" 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利 "L" 可能对优先权要求构成怀疑的文件, 或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件 (如具体说明的) "O" 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件 "P" 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件 </td> <td> "T" 在申请日或优先权日之后公布, 与申请不相抵触, 但为了理解发明之理论或原理的在后文件 "X" 特别相关的文件, 单独考虑该文件, 认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性 "Y" 特别相关的文件, 当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时, 要求保护的发明不具有创造性 "&" 同族专利的文件 </td> </tr> </table>			* 引用文件的具体类型: "A" 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件 "E" 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利 "L" 可能对优先权要求构成怀疑的文件, 或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件 (如具体说明的) "O" 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件 "P" 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件	"T" 在申请日或优先权日之后公布, 与申请不相抵触, 但为了理解发明之理论或原理的在后文件 "X" 特别相关的文件, 单独考虑该文件, 认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性 "Y" 特别相关的文件, 当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时, 要求保护的发明不具有创造性 "&" 同族专利的文件																						
* 引用文件的具体类型: "A" 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件 "E" 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利 "L" 可能对优先权要求构成怀疑的文件, 或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件 (如具体说明的) "O" 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件 "P" 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件	"T" 在申请日或优先权日之后公布, 与申请不相抵触, 但为了理解发明之理论或原理的在后文件 "X" 特别相关的文件, 单独考虑该文件, 认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性 "Y" 特别相关的文件, 当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时, 要求保护的发明不具有创造性 "&" 同族专利的文件																									
国际检索实际完成的日期		国际检索报告邮寄日期																								
2021年 7月 16日		2021年 8月 12日																								
ISA/CN的名称和邮寄地址		受权官员																								
中国国家知识产权局 (ISA/CN) 中国 北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 100088 传真号 (86-10)62019451		徐莹 电话号码 010-62085817																								

C. 相关文件		
类 型*	引用文件，必要时，指明相关段落	相关的权利要求
A	Xianhe Zhang等. "Iterative Learning Control Study on Single Inverted Pendulum" 2008 International Symposium on Intelligent Information Technology Application Workshops, 2008年 12月 30日 (2008 - 12 - 30), 全文	1-2
A	李战明等. "倒立摆的迭代学习控制方法研究" 《传感器与微系统》，第27卷，第4期，2008年 4月 15日 (2008 - 04 - 15), 全文	1-2

国际检索报告
关于同族专利的信息

国际申请号

PCT/CN2021/094741

检索报告引用的专利文件			公布日 (年/月/日)	同族专利			公布日 (年/月/日)
CN	111580392	A	2020年 8月 25日	无			
CN	111360811	A	2020年 7月 3日	无			
CN	110908280	A	2020年 3月 24日	无			
CN	110134011	A	2019年 8月 16日	无			
WO	2008067404	A3	2008年 9月 18日	US	7949430	B2	2011年 5月 24日
				WO	2008067404	A2	2008年 6月 5日
				US	2008133053	A1	2008年 6月 5日
US	2019272752	A1	2019年 9月 5日	US	10522036	B2	2019年 12月 31日