

(12) 按照专利合作条约所公布的国际申请

(19) 世界知识产权组织
国际局

(43) 国际公布日
2019 年 7 月 18 日 (18.07.2019)



(10) 国际公布号
WO 2019/137236 A1

(51) 国际专利分类号:
G06F 17/50 (2006.01)

(21) 国际申请号: PCT/CN2018/124580

(22) 国际申请日: 2018 年 12 月 28 日 (28.12.2018)

(25) 申请语言: 中文

(26) 公布语言: 中文

(30) 优先权:
201810035691.7 2018 年 1 月 15 日 (15.01.2018) CN

(71) 申请人: 中南大学 (CENTRAL SOUTH UNIVERSITY) [CN/CN]; 中国湖南省长沙市岳麓区麓山南路 932 号, Hunan 410000 (CN)。

(72) 发明人: 张国祥 (ZHANG, Guoxiang); 中国湖南省长沙市岳麓区麓山南路 932 号, Hunan

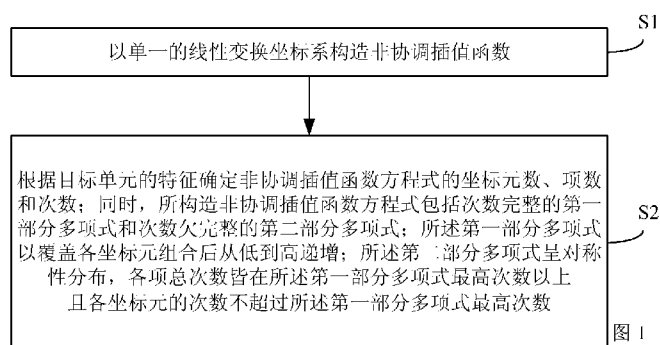
410000 (CN)。张帆航 (ZHANG, Fanhang); 中国湖南省长沙市岳麓区麓山南路 932 号, Hunan 410000 (CN)。

(74) 代理人: 长沙朕扬知识产权代理有限公司 (普通合伙) (CHANGSHA ZONEYOUNG INTELLECTUAL PROPERTY AGENCY (GENERAL PARTNERSHIP)); 中国湖南省长沙市天心区芙蓉中路三段 266 号弘林大厦 1006 室, Hunan 410000 (CN)。

(81) 指定国 (除另有指明, 要求每一种可提供的国家保护): AE, AG, AL, AM, AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BN, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DJ, DK, DM, DO, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT, HN, HR, HU, ID, IL, IN, IR, IS, JO, JP, KE, KG, KH, KN, KP, KR, KW, KZ, LA, LC, LK,

(54) **Title:** METHOD AND SYSTEM FOR CONSTRUCTING NON-COORDINATED INTERPOLATION FUNCTION FOR OPTIMIZING CALCULATION PRECISION OF FINITE ELEMENT SOFTWARE AND STORAGE MEDIUM

(54) 发明名称: 优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法、系统及存储介质



- S1 Construct a non-coordinated interpolation function using a single linear transformation coordinate system
- S2 Determine the number of coordinate elements, the number of terms, and the degree of the equation of the non-coordinated interpolation function according to features of a target unit, wherein the equation of the constructed non-coordinated interpolation function simultaneously comprises a first partial polynomial having a complete degree and a second partial polynomial having an incomplete degree; the first partial polynomial increases from low to high after covering each coordinate element combination; and the second partial polynomial is symmetrically distributed, the total degree of each term is greater than or equal to the highest degree of the first partial polynomial, and the degree of each coordinate element does not exceed the highest degree of the first partial polynomial

(57) **Abstract:** A method and system for constructing a non-coordinated interpolation function for optimizing calculation precision of finite element software and a storage medium, used to improve the calculation precision of finite element software. The method comprises: constructing a non-coordinated interpolation function using a single linear transformation coordinate system (S1); determining the number of coordinate elements, the number of terms, and the degree of the equation of the non-coordinated interpolation

LR, LS, LU, LY, MA, MD, ME, MG, MK, MN, MW, MX,
MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PA, PE, PG, PH, PL,
PT, QA, RO, RS, RU, RW, SA, SC, SD, SE, SG, SK, SL,
SM, ST, SV, SY, TH, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG,
US, UZ, VC, VN, ZA, ZM, ZW。

(84) 指定国 (除另有指明, 要求每一种可提供的地区
保护): ARIPO (BW, GH, GM, KE, LR, LS, MW, MZ,
NA, RW, SD, SL, ST, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), 欧亚 (AM,
AZ, BY, KG, KZ, RU, TJ, TM), 欧洲 (AL, AT, BE, BG,
CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR, HU,
IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, MK, MT, NL, NO, PL, PT,
RO, RS, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI,
CM, GA, GN, GQ, GW, KM, ML, MR, NE, SN, TD, TG)。

本国际公布:

— 包括国际检索报告 (条约第21条(3))。

function according to features of a target unit; at the same time, the equation of the constructed non-coordinated interpolation function comprises a first partial polynomial having a complete degree and a second partial polynomial having an incomplete degree; the first partial polynomial increases from low to high after covering each coordinate element combination; the second partial polynomial is symmetrically distributed, the total degree of each term is greater than or equal to the highest degree of the first partial polynomial, and the degree of each coordinate element does not exceed the highest degree of the first partial polynomial (S2).

(57) 摘要: 一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法、系统及存储介质, 以提高有限元软件计算精度。本方法包括: 以单一的线性变换坐标系构造非协调插值函数 (S1); 根据目标单元的特征确定非协调插值函数方程式的坐标元数、项数和次数; 同时, 所构造的非协调插值函数方程式包括次数完整的第一部分多项式和次数欠完整的第二部分多项式; 所述第一部分多项式以覆盖各坐标元组合后从低到高递增; 所述第二部分多项式呈对称性分布, 各项总次数皆在所述第一部分多项式最高次数以上且各坐标元的次数不超过所述第一部分多项式最高次数 (S2)。

优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法、系统及存储介质

技术领域

本发明涉及模拟仿真技术领域，尤其涉及一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法、系统及存储介质。

背景技术

目前有限元是工程分析和设计必不可少的重要组成部分，有限元计算软件现已广泛应用于结构、固体和流体分析工程的各个领域。事实上，有限元几乎在工程分析的每个领域都得到应用。

在工程或物理问题的数学模型（基本变量、基本方程、求解域和边界条件等）确定以后，有限元法作为对其进行分析的数值计算方法可归纳如下三部分：

（1）将一个表示结构或连续体的求解域离散为若干个子域（单元），并通过它们边界上的结点相互联结成为组合体。该部分为有限元软件的前处理部分，即单元划分部分，该部分的技术已很成熟。

（2）用每个单元内所假设的近似函数来分片地表示全求解域内待求的未知场变量。而每个单元内的近似函数由未知场函数及其导数在单元各个结点上的数值和与其对应的插值函数来表达。该部分即为有限元软件中的有限元插值函数形成部分，有限元插值函数构造难度大，有很多问题还不能构造出满足基本收敛要求的有限元插值函数，一直是有限元研究领域的难题。

同一问题的有限元插值函数构造结果不是唯一，有限元插值函数的选用对有限元软件的分析精度影响很大，直接关系到有限元软件计算结果的成败。构造高精度有限元插值函数有三个关键性条件：一是有限元插值函数所用多项式的完备（完整）阶数（次数）越高计算精度越高；二是有限元插值函数在相邻单元公共边界上的位移（含位移的导数），即从相邻单元插值同一公共边界的位移要一致，否则，位移冲突引起能量损失，降低计算精度；三是有限元插值函数要适合曲面（曲线）边界。目前还无法构造能同时满足以上条件的有限元插值函数，构造高阶完备的有限元插值函数非常困难。

现有的插值函数的构造一般采用等参坐标法，无论是对于平面实体单元、三维实体单元、平板薄板单元或空间曲面薄壳单元，都存在计算精度低，适用范围有限且不能兼顾协调性和/或不适应曲线边界等问题。例如：

1)、基于等参坐标法已构造出的 4 节点四边形单元。该单元只有 1 次完备协调, 只能满足有限元计算的基本收敛要求, 计算精度低。

2)、基于等参坐标法已构造出的 8 节点曲边四边形单元。该单元节点数增加一倍, 但还只具有 1 阶完备协调, 只能满足有限元计算的基本收敛要求, 计算精度低。当该单元为矩形时, 单元能 2 次完备协调, 但又不适合曲线边界, 使用范围非常有限。

3)、基于等参坐标法已构造出的 12 节点曲边四边形单元。该单元插值函数只有 2 次完备协调, 计算精度低。当该单元为矩形时, 单元插值函数能 3 次完备协调, 但不适合曲线边界, 使用范围非常有限。

4)、基于等参坐标法构造出的 8 节点任意六面体单元, 当该单元为任意六面体单元时, 适合于折线形边界, 但单元插值函数只有 1 阶完备性, 只能满足有限元计算的基本收敛要求, 计算精度低。当该单元为长方体时, 单元插值函数能 2 次完备协调, 但又不适合于折线形边界, 使用范围非常有限。

5)、基于等参坐标法构造出的 20 节点曲面六面体单元, 不管该单元为任意六面体单元还是长方体, 有限单元插值函数都只有 2 次完备协调, 计算精度提高有限。

6)、基于等参坐标法构造出的 32 节点曲面六面体单元, 不管该单元为任意六面体单元还是长方体, 有限单元插值函数都只有 2 次完备协调, 计算精度低。

7)、基于等参坐标法只构造出的 4 节点 (w 相关的三节点参数 w, θ_x, θ_y 和四节点参数 $w, \theta_x, \theta_y, \theta_{xy}$) 三次完备矩形薄板单元位移非协调插值函数, 尽管单元位移非协调插值函数的完备阶数较高, 但单元边界法向转角位移不协调, 也不适合任意折线边界, 适用范围非常有限。

8)、基于等参坐标法, 还不能构造出二次完备的 4 节点任意四边形薄板单元, 更无法解决单元协调问题。

9)、基于等参坐标法, 目前只能将平面 4 节点非协调矩形和三角形薄板单元位移非协调插值函数, 经坐标变换法用于空间薄壳结构, 适用范围非常有限, 且不协调。

10)、基于等参坐标法构造出的三维 8 节点协调低阶完备四边形超参数曲面壳单元位移非协调插值函数和三维 8 节点低阶完备协调曲面四边形相对自由度壳单元位移非协调插值函数。这两种单元位移插值函数协调, 厚薄壳结构通用, 但只具有 1 阶完备性, 计算精度低, 当壳的厚度趋向薄曲壳时, 存在剪切“锁死”和薄膜“锁死”等问题。

综上, 目前结构有限元软件都是基于单一的等参坐标法(或面积坐标法)构造单元求解物理量(位移、温度、流体和电磁等)的插值函数, 所构造的单元插值函数不能既高阶完备

又协调,即使完备也只是低阶完备,计算精度较低。对于结构问题还没有构造出满足有限元基本收敛要求的高阶完备又协调有限单元插值函数。

另一方面,单元高阶完备性比其协调性更为重要,况且有些情况无法构造出即高阶完备又协调有限单元插值函数,有些有限元协调插值函数表现为过于刚硬而收敛效果不佳,其实只要当单元细分时单元能保证协调也可收敛,因此,也很有必要构造高阶完备非协调有限单元插值函数,为有限元分析结果提供一种对比和验证手段。

发明内容

本发明目的在于公开一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法、系统及存储介质,以提高有限元软件计算精度。

为实现上述目的,本发明公开了一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法,包括:

以单一的线性变换坐标系构造非协调插值函数;

根据目标单元的特征确定非协调插值函数方程式的坐标元数、项数和次数;同时,所构造的非协调插值函数方程式包括次数完整的第一部分多项式和次数欠完整的第二部分多项式;所述第一部分多项式以覆盖各坐标元组合后从低到高递增;所述第二部分多项式呈对称性分布,各项总次数皆在所述第一部分多项式最高次数以上且各坐标元的次数不超过所述第一部分多项式最高次数。

与上述方法相对应的,本发明还公开一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造系统,包括存储器、处理器以及存储在存储器上并可在处理器上运行的计算机程序,所述处理器执行所述计算机程序时实现上述方法的步骤。

与上述方法相对应的,本发明还公开一种计算机可读存储介质,其上存储有计算机程序,所述程序被处理器执行时实现上述方法的步骤。

基于本发明所构造的非协调插值函数,有限元通过和原问题数学模型(基本方程、边界条件)等效的变分原理或加权余量法,建立求解基本未知量(场函数的结点值)的代数方程组或常微分方程组,求解方程组即可得问题解。该部分为代数方程组或常微分方程组组装和求解,该部分的技术也很成熟,已有标准定型的求解模块。藉此,本发明具有以下有益效果:

基于单一线性变换坐标系统构造求解物理量的非协调插值函数,其第一部分多项式具有高阶完备性,可使有限元分析软件的计算精度大幅度提高,提高结构设计的安全可靠性,优化结构设计,更能适应各种曲面(曲线)边界,从而为工程、航空和航天等建设带来巨大的经济效益。

另一方面，本发明采用单一的线性坐标变换构造高阶完备非协调有限元插值函数时还取得了意想不到的技术效果，其在建立单元刚度矩阵和求解节点位移方程组时，不要求解整体坐标对等参局部坐标 (ξ, η) 变换的雅可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵，当单元畸变时雅可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵有可能趋于无穷大而引起计算误差，而单元可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵在单元里面为非常数矩阵，不能通过控制单元形状来避免此问题的出现，而采用单一的线性坐标变换构造高阶完备非协调有限元插值函数没有此问题，所以采用单一线性坐标变换构造的高阶完备非协调有限元插值函数比采用混合线性坐标变换构造的高阶完备协调有限元插值函数更具有更好的抗畸变性。

下面将参照附图，对本发明作进一步详细的说明。

附图说明

构成本申请的一部分的附图用来提供对本发明的进一步理解，本发明的示意性实施例及其说明用于解释本发明，并不构成对本发明的不当限定。在附图中：

图 1 是本发明优选实施例公开的有限元非协调插值函数构造方法流程图；

图 2 (a) 是平面线性变换坐标系统中的整体坐标系示意图；图 2 (b) 是平面线性变换坐标系统中线性变换坐标的示意图；

图 3 (a) 是空间线性变换坐标系统中的整体坐标系示意图；图 3 (b) 是空间线性变换坐标系统中线性变换坐标的示意图；

图 4 是 8 节点曲边四边形单元示意图；

图 5 是 12 节点曲边四边形单元示意图；

图 6 是 20 节点曲边四边形单元示意图；

图 7 是 32 节点曲边四边形单元示意图；

图 8 是 4 节点曲边四边形薄板单元示意图；

图 9 是 8 节点曲边四边形薄板单元示意图；

图 10 是空间 4 节点四边形平板薄壳单元示意图；

图 11 是空间 8 节点四边形平板薄壳单元示意图；

图 12 是空间 4 节点四边形曲面薄壳单元示意图；

图 13 是空间 8 节点四边形曲面薄壳单元示意图。

具体实施方式

以下结合附图对本发明的实施例进行详细说明，但是本发明可以由权利要求限定和覆盖的多种不同方式实施。

实施例 1

如图 1 所示，本实施例公开的有限元非协调插值函数构造方法包括：

步骤 S1、以单一的线性变换坐标系统构造非协调插值函数。

线性坐标变换系统即两直角坐标系统的变换关系为线性。已有在曲面薄壳单元上的正交曲面坐标变换系统相当于一般结构单元的整体坐标系统，也可以变换为线性变换坐标系统。

线性变换坐标变换系统的贡献：一是能将单元变为有一直角面（线）形状单元，使部分单元节点坐标值变为简单的 0 和 1，从而达到降低有限元插值函数构造难度和提高计算精度目的；二是使多项式的完备阶数经坐标变换不升高，有限元插值函数多项式在变换后的坐标系统是几次完备多项式，在整体坐标系统就有几次完备多项式，从而使得构造高阶完备的有限元非协调插值函数成为可能。

线性变换坐标系统分平面线性变换坐标系统和空间线性变换坐标系统。

(a)、二维情况下，整体坐标系与线性坐标系变换的变换公式为：

$$\begin{cases} T_1 = A_1x + B_1y + C_1 \\ T_2 = A_2x + B_2y + C_2 \end{cases};$$

单元经过坐标变换后的形状如图 2 (a) 及图 2 (b) 所示，四边形单元一个角点位于坐标原点，两个角点位于坐标轴上。坐标变换关系中有 6 个待定系数 $A_i, B_i, C_i, (i=1,2)$ ，可变换 6 个为 0 或 1 的线性变换坐标值。

(b)、三维情况下，整体坐标系与线性坐标系变换的变换公式为：

$$\begin{cases} T_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \\ T_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \\ T_3 = A_3x + B_3y + C_3z + D_3 \end{cases};$$

单元经过坐标变化后的形状如图 3 (a) 及图 3 (b) 所示，六面体单元一个角点位于坐标原点，三个角点位于坐标轴上。坐标变化关系有 12 个待定系数 $A_i, B_i, C_i, D_i, (i=1,2,3)$ ，可变换 12 个为 0 或 1 的线性变换坐标值。

同理，相对于后续的单元曲面的二维正交曲线坐标系，其与线性坐标系变换的变换公式为：

$$\begin{cases} Z_1 = A_1x' + B_1y' + C_1 \\ Z_2 = A_2x' + B_2y' + C_2 \end{cases}$$

坐标变换关系中有 6 个待定系数 $A_i, B_i, C_i, (i=1,2)$ 由变换 6 个为 0 或 1 的线性变换坐标值的方程组确定。

步骤 S2、根据目标单元的特征确定非协调插值函数方程式的坐标元数、项数和次数；同时，所构造非协调插值函数方程式包括高阶完备的第一部分多项式和高阶非完备的第二部分多项式；所述第一部分多项式以覆盖各坐标元组合后次数从低到高递增；所述第二部分多项式呈对称性分布，各项总次数皆在所述第一部分多项式最高次数以上且各坐标元的次数不超过所述第一部分多项式最高次数。

在该步骤中，针对二维线性变换坐标系，第一部分多项式以覆盖各坐标元组合后从低到高递增并呈帕斯卡三角形分布；第二部分多项式的各项选自与第一部分帕斯卡三角形形成镜像的倒三角形中。

藉此，本实施例基于单一的线性变换坐标系统构造有限元非协调插值函数。在有限单元插值多项式的选择中，有限单元插值多项式所有项均使用线性变换坐标。只要有限单元插值多项式不出现非完备项，且单元边界为直线或平面、中节点均分边界时，有限元非协调插值函数在单元边界上自然趋向于协调，从而，非常巧妙简单地解决构造高阶完备有限元插值函数而导致不协调的难题。

下面针对各目标单元的构造函数分析如下：

1)、如图 4 所示，当目标单元为二维 8 节点高阶完备四边形曲边单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_1^2 + a_5 T_1 T_2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_1^2 T_2 + a_8 T_1 T_2^2 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_1^2 + b_5 T_1 T_2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_1^2 T_2 + b_8 T_1 T_2^2 \end{cases}。$$

下述各方程式中， T_1, T_2, T_3 分别为单元线性变换坐标系中坐标； u, v, w 分别对应单元内三个坐标方向上的位移， θ_x, θ_y 分别为 w 对单元内坐标 x, y 的偏导数； $a_i, b_i, c_i, i=1,2,3, \dots$ 为单元位移非协调插值函数的待定系数，后续不再赘述。

在本实施例中，与上述步骤 S2 对应的，在根据目标单元的特征确定非协调插值函数方程式的项数时，对应下述 1 至 10 各情况中，对应 u, v （或 u, v ）的插值相关节点位移总数与已知节点数相等，对应 w （或 w ）的插值相关节点位移总数为已知节点数与相关位移分量的乘积。

该单元位移非协调插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 $a_1 \sim$

a_8 及 $b_1 \sim b_8$ ，其具有 2 阶完备性，8 节点四边形单元也只能具有 2 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 1 阶。单元位移非协调插值函数的完备性提高 1 次，其收敛性能和抗畸变性能会有非常大的提高。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，只要单元插值多项式不出现非完备项，该公共边界即协调，与单元其它边界形状无关，因此，在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由外边界没有协调性要求可为曲线，只要单元插值多项式不出现非完备项，此时的二维 8 节点单元位移非协调插值函数即具有高阶完备协调性，且适合于曲线边界，并没有增加单元划分的难度。此二维 8 节点四边形曲边单元可退化 6 节点三角形曲边单元。

2)、如图 5 所示，当目标单元为二维 12 节点高阶完备协调四边形曲边单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_1^2 + a_5 T_1 T_2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_1^3 + a_8 T_1^2 T_2 + a_9 T_1 T_2^2 + a_{10} T_2^3 + a_{11} T_1^3 T_2 + a_{12} T_1 T_2^3 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_1^2 + b_5 T_1 T_2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_1^3 + b_8 T_1^2 T_2 + b_9 T_1 T_2^2 + b_{10} T_2^3 + b_{11} T_1^3 T_2 + b_{12} T_1 T_2^3 \end{cases}。$$

该单元位移非协调插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 $a_1 \sim a_{12}$ 及 $b_1 \sim b_{12}$ ，其具有 3 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 2 阶，其收敛性能和抗畸变性能非常好。当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，只要单元插值多项式不出现非完备项，该公共边界即协调，与单元其它边界形状无关，因此，在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由边界没有协调性要求可为曲线，只要单元插值多项式不出现非完备项，此时的二维 12 节点单元位移非协调插值函数即具有高阶完备协调性，并能适合于任意曲线边界，并没有增加单元划分的难度。此二维 12 节点四边形曲边单元可退化 9 节点三角形曲边单元。

3)、如图 6 所示，当目标单元为三维 20 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_3 + a_5 T_1^2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_3^2 + a_8 T_1 T_2 + a_9 T_1 T_3 + a_{10} T_2 T_3 \\ + a_{11} T_1^2 T_2 + a_{12} T_1^2 T_3 + a_{13} T_1 T_2^2 + a_{14} T_1 T_2 T_3 + a_{15} T_1 T_3^2 + a_{16} T_2 T_3^2 + a_{17} T_1 T_2 T_3 \\ + a_{18} T_1^2 T_2 T_3 + a_{19} T_1 T_2^2 T_3 + a_{20} T_1 T_2 T_3^2 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_3 + b_5 T_1^2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_3^2 + b_8 T_1 T_2 + b_9 T_1 T_3 + b_{10} T_2 T_3 \\ + b_{11} T_1^2 T_2 + b_{12} T_1^2 T_3 + b_{13} T_1 T_2^2 + b_{14} T_1 T_2 T_3 + b_{15} T_1 T_3^2 + b_{16} T_2 T_3^2 + b_{17} T_1 T_2 T_3 \\ + b_{18} T_1^2 T_2 T_3 + b_{19} T_1 T_2^2 T_3 + b_{20} T_1 T_2 T_3^2 \end{cases}。$$

该单元位移非协调插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 $a_1 \sim$

a_{20} 及 $b_1 \sim b_{20}$ ，其具有 2 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 1 阶。该曲边六面体单元可以自动退化为曲边五面体单元、曲边四面体单元；六个四边形侧曲面可以自动退化为三角形侧曲面。

有关单元位移非协调插值函数在单元边界处的协调问题分为三种情况：

(a) 六面体的公共棱角线协调

与平面问题类似，要求单元公共棱角线为直线且中节点均分其公共棱角线，只要单元插值多项式不出现非完备项，单元位移非协调插值函数在公共棱角线上即协调，与单元其它部位的形状无关。

(b) 六面体的四边形侧曲面协调

要求单元公共的四边形侧曲面为平面、四条边均为直线，且边中的节点均分其边界，只要单元插值多项式不出现非完备项，此时单元位移非协调插值函数在公共四边形侧平面上即协调，与单元其它面的形状无关。

(c) 六面体的三角形侧曲面协调

只要求单元公共的三角形侧曲面为平面，三角形的边可为曲线，只要单元插值多项式不出现非完备项，单元位移非协调插值函数在公共三角形侧平面上即协调，与单元其它面的形状无关。三角形的边可为曲线条件，使得构造适合于任意曲边边界的退化四面体单元成为可能。

在单元划分时，结构内部用平面六面体单元，可用退化后的四面体单元、五面体单元和六面体单元外露曲面模拟结构的外部曲面边界，只要单元插值多项式不出现非完备项，从而就可保证了单元位移非协调插值函数的协调，同时也能很好地模拟结构的曲面边界。与常规的单元划分方法一致，并没有增加单元划分的难度。

4)、如图 7 所示，当所述目标单元为三维 32 节点高阶完备协调曲面六面体单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_3 + a_5 T_1^2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_3^2 + a_8 T_1 T_2 + a_9 T_1 T_3 + a_{10} T_2 T_3 \\ + a_{11} T_1^3 + a_{12} T_2^3 + a_{13} T_3^3 + a_{14} T_1^2 T_2 + a_{15} T_1^2 T_3 + a_{16} T_1 T_2^2 + a_{17} T_2^2 T_3 + a_{18} T_1 T_3^2 + a_{19} T_2 T_3^2 + a_{20} T_1 T_2 T_3 \\ + a_{21} T_1^3 T_2 + a_{22} T_1^3 T_3 + a_{23} T_1 T_2^3 + a_{24} T_2^3 T_3 + a_{25} T_1 T_3^3 + a_{26} T_2 T_3^3 \\ + a_{27} T_1^2 T_2 T_3 + a_{28} T_1 T_2^2 T_3 + a_{29} T_1 T_2 T_3^2 + a_{30} T_1^2 T_2^2 + a_{31} T_1^2 T_3^2 + a_{32} T_2^2 T_3^2 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_3 + b_5 T_1^2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_3^2 + b_8 T_1 T_2 + b_9 T_1 T_3 + b_{10} T_2 T_3 \\ + b_{11} T_1^3 + b_{12} T_2^3 + b_{13} T_3^3 + b_{14} T_1^2 T_2 + b_{15} T_1^2 T_3 + b_{16} T_1 T_2^2 + b_{17} T_2^2 T_3 + b_{18} T_1 T_3^2 + b_{19} T_2 T_3^2 + b_{20} T_1 T_2 T_3 \\ + b_{21} T_1^3 T_2 + b_{22} T_1^3 T_3 + b_{23} T_1 T_2^3 + b_{24} T_2^3 T_3 + b_{25} T_1 T_3^3 + b_{26} T_2 T_3^3 \\ + a_{27} T_1^2 T_2 T_3 + a_{28} T_1 T_2^2 T_3 + a_{29} T_1 T_2 T_3^2 + a_{30} T_1^2 T_2^2 + a_{31} T_1^2 T_3^2 + a_{32} T_2^2 T_3^2 \end{cases}.$$

该单元位移非协调插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 $a_1 \sim$

a_{32} 及 $b_1 \sim b_{32}$ ，其具有 3 阶完备性，比传统单元位移插值函数的完备性高 2 阶。该曲边六面体单元同样可以自动退化为曲边五面体单元、曲边四面体单元；六个四边形侧曲面可以自动退化为三角形侧曲面，以适合曲面结构边界。

有关单元位移非协调插值函数在单元边界处的协调问题分为三种情况：

(a) 六面体的公共棱角线协调

与平面问题类似，要求单元公共棱角线为直线且中节点均分其公共棱角线，只要单元插值多项式不出现非完备项，单元位移非协调插值函数在其公共棱角线上既协调，与单元其它部位的形状无关。

(b) 六面体的四边形侧曲面协调

要求单元公共的四边形侧曲面为平面、四条边均为直线，且边中的节点均分其边，只要单元插值多项式不出现非完备项，此时单元位移非协调插值函数在公共四边形侧平面上既协调，与单元其它面的形状无关。

(c) 六面体的三角形侧曲面协调

只要求单元公共的三角形侧曲面为平面，三角形的边可为曲线，只要单元插值多项式不出现非完备项，单元位移非协调插值函数在公共三角形侧平面上即协调，与单元其它面的形状无关。三角形的边可为曲线的条件，使得构造适合于任意曲边边界的退化四面体单元成为可能。

在单元划分时，结构内部用平面六面体单元，可用退化后的四面体单元、五面体单元和六面体单元外露曲面模拟结构的外部曲面边界，只要单元插值多项式不出现非完备项，从而就可保证了单元位移非协调插值函数的协调，同时也能很好地模拟结构的曲面边界。与常规的单元划分方法一致，并没有增加单元划分的难度。

5)、如图 8 所示，当目标单元为二维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量（三节点参数为 w, θ_x, θ_y ， w, θ_x, θ_y 相关，该情况下，位移总数为已知节点数和节点位移分量数的乘积）的高阶完备任意四边形薄板单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$w = c_1 + c_2 T_1 + c_3 T_2 + c_4 T_1^2 + c_5 T_1 T_2 + c_6 T_2^2 + c_7 T_1^3 + c_8 T_1^2 T_2 + c_9 T_1 T_2^2 + c_{10} T_2^3 + c_{11} T_1^3 T_2 + c_{12} T_1 T_2^3。$$

该单元位移非协调插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 $a_1 \sim a_{12}$ ，其具有 3 阶完备性，完备的阶数较高，该单元位移非协调插值函数在相邻单元的公共边界上挠度和切向转角能协调。而传统的四边形薄板单元只有矩形单元和三角形单元，不适用于任意折线形边界，应用范围非常有限。

该单元位移非协调插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调，但法向转角不协调，

即 C^1 阶非协调性问题，该问题一直被认为是不能解决的难题。只要单元插值多项式只出现二次完备多项式时，此时，单元边界的法向转角即协调。

6)、如图 9 所示，当目标单元为二维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备曲边四边形薄板单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{aligned} w = & c_1 + c_2 T_1 + c_3 T_2 + c_4 T_1^2 + c_5 T_1 T_2 + c_6 T_2^2 + c_7 T_1^3 + c_8 T_1^2 T_2 + c_9 T_1 T_2^2 + c_{10} T_2^3 \\ & + c_{11} T_1^4 + c_{12} T_1^3 T_2 + c_{13} T_1^2 T_2^2 + c_{14} T_1 T_2^3 + c_{15} T_2^4 \\ & + c_{16} T_1^5 + c_{17} T_1^4 T_2 + c_{18} T_1^3 T_2^2 + c_{19} T_1^2 T_2^3 + c_{20} T_1 T_2^4 + c_{21} T_2^5 \\ & + c_{22} T_1^4 T_2^2 + c_{23} T_1^3 T_2^3 + c_{24} T_1^2 T_2^4 \end{aligned}$$

该单元位移非协调插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数 $a_1 \sim a_{24}$ ，其具有 5 阶完备性，完备的阶数较高，适合于任意曲线形边界。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该单元位移非协调插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调。只要单元插值多项式只出现三次完备多项式时，法向转角也协调，从而较好的解决 C^1 阶非协调性问题。

对于工程上普遍采用的空间薄壳，采用合适的正交曲线坐标及相应的几何方程，根据上述单元的原理，像平面问题一样在空间正交曲线坐标系中直接构造高阶完备曲面薄壳单元，计算单元刚度矩阵，再进行空间坐标转换。主要包括下述的 7-10 共四种情况。在下述的四种情况所构造的插值函数方程式中， Z_1 、 Z_2 分别为曲面薄壳单元内二维正交曲线或直线坐标的线性变换坐标系中坐标；当三维曲面薄壳为平板薄壳时，曲面薄壳单元内二维正交曲线坐标即变为二维正交直线坐标； u 、 v 分别对应单元曲面内二维正交曲线或直线坐标方向上的位移， w 对应单元曲面法线方向上的位移， θ_x 、 θ_y 分别为 w 对单元曲面内二维正交曲线或直线坐标 x 、 y 的偏导数； $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, 3, \dots$ 为单元位移非协调插值函数的待定系数，后续不做赘述。

7)、当目标单元为三维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备任意四边形平板薄壳单元时，相关位移分量分别为 w 、 θ_x 、 θ_y ，即对于 4 节点平板任意四边形薄壳单元，如图 10 所示，通过坐标变换，可将任意四边形平板薄板单元位移非协调插值函数转换为空间薄壳单元位移非协调插值函数，其中节点位移向量在两坐标系之间转换关系为：

$$a'_i = L a_i; \quad a_i = L^T a'_i \quad a_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]; \quad a'_i = [u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta'_{xi} \quad \theta'_{yi} \quad \theta'_{zi}]$$

$$T = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

其中, a'_i, a_i 为节点位移; T, L, λ 为转换矩阵。

单元刚度矩阵和荷载列向量的转换关系为:

$$K'^e = TK^eT; \quad Q'^e = TQ$$

其它转换关系按常规法进行实施。

关键是任意四边形平板薄壳单元位移非协调插值函数的构造, 基于本发明的单一线性变换坐标法, 可假定单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2Z_1 + a_3Z_2 + a_4Z_1Z_2 \\ v' = b_1 + b_2Z_1 + b_3Z_2 + b_4Z_1Z_2 \\ w' = c_1 + c_2Z_1 + c_3Z_2 + c_4Z_1^2 + c_5Z_1Z_2 + c_6Z_2^2 + c_7Z_1^3 + c_8Z_1^2Z_2 + c_9Z_1Z_2^2 + c_{10}Z_2^3 + c_{11}Z_1^3Z_2 + c_{12}Z_1Z_2^3 \end{cases}$$

该插值函数可根据单元节点位移建立方程组, 联立求解确定待定系数; 具有 3 阶完备性, 完备的阶数较高, 且该薄壳单元位移非协调插值函数在相邻单元的公共边界上的挠度和切向转角能协调。该单元位移非协调插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调, 但法向转角不协调, 即 C^1 阶非协调性问题, 该问题一直被认为是不能解决的难题。

只要单元插值多项式只出现二次完备多项式时, 此时, 单元边界的法向转角即协调, 从而较好的解决 C^1 阶非协调性问题。

8)、当目标单元为三维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备曲线四边形平板薄壳单元时, 相关位移分量分别为 w' 、 θ'_x 、 θ'_y , 即对于 8 节点平面任意四边形薄壳单元, 如图 11 所示, 通过坐标变换, 可将任意四边形平板薄板单元位移非协调插值函数转换为空间薄壳单元位移非协调插值函数。其中节点位移向量在两坐标系之间转换关系为:

$$a'_i = La_i; \quad a_i = L^T a'_i$$

$$a_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]; \quad a'_i = [u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta'_{xi} \quad \theta'_{yi} \quad \theta'_{zi}]$$

$$T = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

其中, a'_i, a_i 为节点位移; T, L, λ 为转换矩阵。

单元刚度矩阵和荷载列向量的转换关系为:

$$K'^e = TK^eT; \quad Q'^e = TQ$$

其它转换关系按常规法进行实施。

关键是任意四边形平板薄壳单元位移非协调插值函数的构造，基于本发明的单一线性变换坐标法，可假定单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1^2 + a_5 Z_1 Z_2 + a_6 Z_2^2 + a_7 Z_1^2 Z_2 + a_8 Z_1 Z_2^2 \\ v' = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1^2 + b_5 Z_1 Z_2 + b_6 Z_2^2 + b_7 Z_1^2 Z_2 + b_8 Z_1 Z_2^2 \\ w' = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 \\ \quad + c_{11} Z_1^4 + c_{12} Z_1^3 Z_2 + c_{13} Z_1^2 Z_2^2 + c_{14} Z_1 Z_2^3 + c_{15} Z_2^4 \\ \quad + c_{16} Z_1^5 + c_{17} Z_1^4 Z_2 + c_{18} Z_1^3 Z_2^2 + c_{19} Z_1^2 Z_2^3 + c_{20} Z_1 Z_2^4 + c_{21} Z_2^5 \\ \quad + c_{22} Z_1^4 Z_2^2 + c_{23} Z_1^3 Z_2^3 + c_{24} Z_1^2 Z_2^4 \end{cases}$$

上述插值函数可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数；其具有 5 阶完备性，完备的阶数较高，适合于曲线形边界。

当两相邻单元的公共边界为直线且边界中节点均分边界时，该单元位移非协调插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调。只要单元插值多项式只出现三次完备多项式时，法向转角也协调，从而较好的解决 C^1 阶非协调性问题。

9)、当目标单元为三维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备四边形曲面薄壳单元时，相关位移分量分别为 w 、 θ_x 、 θ_y ，如图 12 所示，可假定曲面薄壳单元内部任意一点的总体坐标为：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$$

其中， $N_i(\xi, \eta)$ 为常规的形函数。

在整体坐标系中节点的刚体位移 $\{\delta'_{Ri}\}$ 由单元微体的刚体运动给出，微体形心的运动包括绕三个坐标轴的转动和沿坐标轴的平动。曲面薄壳单元形心的刚体运动为：

$$\{V'_R\} = \{u'_0 \quad v'_0 \quad w'_0 \quad \theta'_{x0} \quad \theta'_{y0} \quad \theta'_{z0}\}^T$$

在整体坐标系里，按动力学方法得到这个刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\{\delta'_{Ri}\} = \{u'_{Ri} \quad v'_{Ri} \quad w'_{Ri} \quad \theta'_{xRi} \quad \theta'_{yRi} \quad \theta'_{zRi}\}^T = [T_{Ri}]\{V'_R\}$$

$$\{\delta'^e_R\} = \{\delta'_{R1} \quad \delta'_{R2} \quad \delta'_{R3} \quad \delta'_{R4}\}^T = [T_R]\{V'_R\}$$

其中，转换矩阵 T_R 的子矩阵：

$$[T_R] = \{T_{R1} \quad T_{R2} \quad T_{R3} \quad T_{R4}\}^T$$

$$[T_{Ri}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_0 & -(y_i - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_0) & 0 & x_i - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_0 & -(x_i - x_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, x_0, y_0, z_0 为单元微体形心整体坐标。

在曲线坐标系里, 刚体运动产生的节点刚体位移为:

$$\{\delta_{Ri}\} = \{u_{Ri} \quad v_{Ri} \quad w_{Ri} \quad \theta_{xRi} \quad \theta_{yRi} \quad \theta_{zRi}\}^T = [L_i]^T [T_{Ri}] [L_0]^T \{V_R\}$$

$$\{\delta_R^e\} = \{\delta_{R1} \quad \delta_{R2} \quad \delta_{R3} \quad \delta_{R4}\}^T = [T]^T [T_R] [L_0]^T \{V_R\}$$

其中, L_i 为转换矩阵。

$$[T] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & \\ 0 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}$$

$$L_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{x'\alpha i} & \lambda_{x'\beta i} & \lambda_{x'\delta i} \\ \lambda_{y'\alpha i} & \lambda_{y'\beta i} & \lambda_{y'\delta i} \\ \lambda_{z'\alpha i} & \lambda_{z'\beta i} & \lambda_{z'\delta i} \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

式中 $\lambda_{x'\alpha i} = \cos(x', \alpha)$ 等是 x, y, z 轴在正交主曲线坐标系 α, β, δ 的各方向余弦。

在曲线坐标系里, 曲面薄壳单元形心的刚体运动为:

$$\{V_R\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_{x0} \quad \theta_{y0} \quad \theta_{z0}\}^T$$

单元节点位移向量在整体坐标和曲线坐标之间转换关系为:

$$\{V_R'\} = [L_0] \{V_R\} \quad \{\delta_T'^e\} = [T] \{\delta_T^e\}$$

$$\{\delta_D'^e\} = [T] \{\delta_D^e\} \quad \{\delta_R'^e\} = [T] [T_R] [L_0] \{V_R\}$$

在曲线坐标系里, 补充刚体位移后的单元位移场全量为:

$$\{\delta_T^e\} = \{\delta_D^e\} + \{\delta_R^e\} = [I \quad T_R] \begin{Bmatrix} \delta_D^e \\ V_R \end{Bmatrix}$$

式中 I 是 20×20 的单位矩阵。

刚体位移不产生应变, 所以, 在正交主曲线坐标系中应变矩阵为:

$$\{\varepsilon^e\} = [B]\{\delta_D^e\}$$

式中, B 是正交主曲线坐标系中单元的应变矩阵。

刚体位移也不产生节点力, 作静力凝聚, 按虚功原理建立有限元方程:

$$\begin{Bmatrix} P_D^e \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_T^e] \begin{Bmatrix} \delta_T^e \\ -V_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_T^e \\ -V_R \end{Bmatrix}$$

其中, $[P_D^e]$ 是在正交主曲线坐标系里单元的节点载荷, $[K_T^e]$ 是在正交主曲线坐标系里由单元原有的刚度矩阵 $[K_D^e]$ 经位移扩展后得到的, 即

$$[K_T^e] = \begin{Bmatrix} I \\ T_R^T \end{Bmatrix} [K_D^e] \begin{Bmatrix} I & T_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

其中, $[K_{11}]_{20 \times 20} = [K_D^e]$, $[K_{12}]_{20 \times 6} = [K_{21}]^T = [K_D^e][T_R]$, $[K_{22}]_{6 \times 6} = [T_R]^T [K_D^e][T_R]$;

$$\{V_R\} = [K_{22}]^{-1} [K_{21}]\{\delta_T^e\}, \quad \{P_D^e\} = ([K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{\delta_T^e\}$$

$$\{\varepsilon^e\} = [B]^* \{\delta_T^e\}, \quad [B]^* ([I] - [T_R][K_{22}]^{-1}[K_{21}])$$

在整体坐标系刚度矩阵和荷载向量的转换关系为:

$$[K'^e] = [T][K_T^e][T]^T, \quad [P'] = [T][P_D^e]$$

集成总体坐标系的各个单元刚度矩阵和荷载向量, 就可以得到整体坐标系的节点位移求解方程。

在正交主曲线坐标系 (α, β, δ) 里, α, β, δ 为曲线坐标的弧长, 对于 4 节点任意四边形单元, 如图 11 所示, 基于独创的单一线性变换坐标法, 与平面薄板问题相似, 对曲线弧长坐标进行线性坐标变换, 可假定单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1 Z_2 \\ v' = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1 Z_2 \\ w' = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 + c_{11} Z_1^3 Z_2 + c_{12} Z_1 Z_2^3 \end{cases}。$$

根据单元节点位移建立方程组, 联立求解确定待定系数。该单元位移非协调插值函数具有 3 阶完备性, 完备的阶数较高, 该单元位移非协调插值函数在相邻单元的公共边界上挠度和切向转角能协调。只要单元非协调插值多项式只出现二次完备多项式时, 单元边界的法向转角即协调, 从而较好的解决 C^1 阶非协调性问题。

10)、当所述目标单元为三维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备四边形曲面薄壳单元时, 相关位移分量分别为 w 、 θ_x 、 θ_y , 即对于 8 节点曲面薄壳单元, 如图 13 所示,

假定曲壳单元内部任意一点的总体坐标为：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$$

其中， $N_i(\xi, \eta)$ 为常规的形函数。

在整体坐标系中节点的刚体位移 $\{\delta'_{Ri}\}$ 由单元微体的刚体运动给出，微体形心的运动包括绕三个坐标轴的转动和沿坐标轴的平动。壳单元形心的刚体运动为：

$$\{V'_R\} = \{u'_0 \quad v'_0 \quad w'_0 \quad \theta'_{x0} \quad \theta'_{y0} \quad \theta'_{z0}\}^T$$

在整体坐标系里，按动力学方法得到这个刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\begin{aligned} \{\delta'_{Ri}\} &= \{u'_{Ri} \quad v'_{Ri} \quad w'_{Ri} \quad \theta'_{xRi} \quad \theta'_{yRi} \quad \theta'_{zRi}\}^T = [T_{Ri}] \{V'_R\} \\ \{\delta'^e_R\} &= \{\delta'_{R1} \quad \delta'_{R2} \quad \delta'_{R3} \quad \delta'_{R4} \quad \delta'_{R5} \quad \delta'_{R6} \quad \delta'_{R7} \quad \delta'_{R8}\}^T = [T_R] \{V'_R\} \end{aligned}$$

其中，转换矩阵 T_R 的子矩阵：

$$[T_R] = \begin{Bmatrix} T_{R1} & T_{R2} & T_{R3} & T_{R4} & T_{R5} & T_{R6} & T_{R7} & T_{R8} \end{Bmatrix}^T$$

$$[T_{Ri}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_0 & -(y_i - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_0) & 0 & x_i - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_0 & -(x_i - x_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 x_0, y_0, z_0 为单元微体形心整体坐标。

在曲线坐标系里，刚体运动产生的节点刚体位移为：

$$\begin{aligned} \{\delta_{Ri}\} &= \{u_{Ri} \quad v_{Ri} \quad w_{Ri} \quad \theta_{xRi} \quad \theta_{yRi} \quad \theta_{zRi}\}^T = [L_i]^T [T_{Ri}] [L_0]^T \{V_R\} \\ \{\delta^e_R\} &= \{\delta_{R1} \quad \delta_{R2} \quad \delta_{R3} \quad \delta_{R4} \quad \delta_{R5} \quad \delta_{R6} \quad \delta_{R7} \quad \delta_{R8}\}^T = [T]^T [T_R] [L_0]^T \{V_R\} \end{aligned}$$

其中， L_i 为转换矩阵。

$$[T] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_7 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L_8 \end{bmatrix}$$

$$L_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{x'ci} & \lambda_{x'\beta i} & \lambda_{x'\delta i} \\ \lambda_{y'ci} & \lambda_{y'\beta i} & \lambda_{y'\delta i} \\ \lambda_{z'ci} & \lambda_{z'\beta i} & \lambda_{z'\delta i} \end{bmatrix}$$

式中 $\lambda_{x'ci} = \cos(x', \alpha)$ 等是 x 、 y 、 z 轴在正交主曲线坐标系 α, β, δ 的各方向余弦。

在曲线坐标系里，曲面薄壳单元形心的刚体运动为：

$$\{V_R\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_{x0} \quad \theta_{y0} \quad \theta_{z0}\}^T$$

单元节点位移向量在整体坐标和曲线坐标之间转换关系为：

$$\begin{aligned} \{V'_R\} &= [L_0] \{V_R\} & \{\delta'_T\} &= [T] \{\delta_T^e\} \\ \{\delta'_D\} &= [T] \{\delta_D^e\} & \{\delta'_R\} &= [T] [T_R] [L_0] \{V_R\} \end{aligned}$$

在曲线坐标系里，补充刚体位移后的单元位移场全量为：

$$\{\delta^e\} = \{\delta_D^e\} + \{\delta_R^e\} = [I \quad T_R] \begin{Bmatrix} \delta_D^e \\ V_R \end{Bmatrix}$$

式中 I 是 40×40 的单位矩阵。

刚体位移不产生应变，所以，在正交主曲线坐标系中应变矩阵为：

$$\{\varepsilon^e\} = [B] \{\delta_D^e\}$$

式中 B 是正交主曲线坐标系中单元的应变矩阵。

刚体位移也不产生节点力，作静力凝聚，按虚功原理建立有限元方程：

$$\begin{Bmatrix} P_D^e \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_T^e] \begin{Bmatrix} \delta_T^e \\ -V_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_T^e \\ -V_R \end{Bmatrix}$$

其中， $[P_D^e]$ 是在正交主曲线坐标系里单元的节点载荷， $[K_T^e]$ 是在正交主曲线坐标系里由单元原有的刚度矩阵 $[K_D^e]$ 经位移扩展后得到的，即

$$[K_T^e] = \begin{Bmatrix} I \\ T_R^T \end{Bmatrix} [K_D^e] \begin{Bmatrix} I & T_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

其中， $[K_{11}]_{40 \times 40} = [K_D^e]$ ， $[K_{12}]_{40 \times 6} = [K_{21}]^T = [K_D^e] [T_R]$ ， $[K_{22}]_{6 \times 6} = [T_R]^T [K_D^e] [T_R]$

$$\{V_R\} = [K_{22}]^{-1} [K_{21}] \{\delta_T^e\}, \{P_D^e\} = ([K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}]) \{\delta_T^e\}$$

$$\{\varepsilon^e\} = [B]^* \{\delta_T^e\}, [B]^* = ([I] - [T_R] [K_{22}]^{-1} [K_{21}])$$

在整体坐标系刚度矩阵和荷载向量的转换关系为：

$$[K'^e] = [T] [K_T^e] [T]^T, [P']^e = [T] [P_D^e]$$

集成总体坐标系的各个单元刚度矩阵和荷载向量，就可以得到整体坐标系的节点位移求解方程。

在正交主曲线坐标系 (α, β, δ) 里， α, β, δ 为曲线坐标的弧长，对于 8 节点任意四边形单元，基于独创的单一线性变换坐标法，与平面薄板问题相似，对曲线弧长坐标进行线性坐标变换，可假定单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1^2 + a_5 Z_1 Z_2 + a_6 Z_2^2 + a_7 Z_1^2 Z_2 + a_8 Z_1 Z_2^2 \\ v = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1^2 + b_5 Z_1 Z_2 + b_6 Z_2^2 + b_7 Z_1^2 Z_2 + b_8 Z_1 Z_2^2 \\ w = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 \\ \quad + c_{11} Z_1^4 + c_{12} Z_1^3 Z_2 + c_{13} Z_1^2 Z_2^2 + c_{14} Z_1 Z_2^3 + c_{15} Z_2^4 \\ \quad + c_{16} Z_1^5 + c_{17} Z_1^4 Z_2 + c_{18} Z_1^3 Z_2^2 + c_{19} Z_1^2 Z_2^3 + c_{20} Z_1 Z_2^4 + c_{21} Z_2^5 \\ \quad + c_{22} Z_1^4 Z_2^2 + c_{23} Z_1^3 Z_2^3 + c_{24} Z_1^2 Z_2^4 \end{cases}$$

可根据单元节点位移建立方程组，联立求解确定待定系数。该单元位移非协调插值函数具有 5 阶完备性，完备的阶数较高，适合于任意曲线形边界。

在划分单元时，只要保持两相邻单元的公共边界在曲线坐标系里为直线且边界中节点均分边界，而单元的自由外边界没有协调性要求可为曲线，以适合曲线边界，此时，单元位移非协调插值函数在单元公共边界上挠度和切向转角能协调，但法向转角不能协调。

当两相邻单元的公共边界在曲线坐标系里为直线且边界中节点均分边界时，该单元位移非协调插值函数的在单元边界上挠度和切向转角协调。只要单元插值多项式只出现三次完备多项式时，法向转角也协调，从而较好的解决 C^1 阶非协调性问题。

进一步的，以八节点四边形单元为例，已有方法构建的八节点四边形单元模型多为直边单元，在解决曲线边界问题上，受插值点位置限制，不能很好的拟合曲线边界这一现实。而本实施例则可以在面积坐标系里通过对单元刚度矩阵进行数值积分构造一种平面高阶非协调八节点曲边四边形单元，其所采用的插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_1^2 + a_5 T_1 T_2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_1^2 T_2 + a_8 T_1 T_2^2 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_1^2 + b_5 T_1 T_2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_1^2 T_2 + b_8 T_1 T_2^2 \end{cases}$$

该单元具有一般性插值点，能很好的拟合曲线边界，形函数的构造更接近真实情况，同时采用单一的线性坐标变换具有更好的抗畸变性。且通过矩形板受到均匀的单向拉升、网格畸变测试、受弯剪切力作用的厚弯曲梁的弯曲、受弯曲的薄弯曲梁的弯曲、MacNeal 的悬臂梁、具有四个不规则四边形单元的悬臂梁、悬臂梁受到纯弯曲、悬臂受到线性弯曲和剪切力及库克斜梁等 9 典型试验验证，本实施例在网格稀疏情况下的性能和收敛效果及在横向线性弯曲载荷作用下的性能均好于已有方法，在模拟直线单元及求解直线边界问题中提供了更高

的精度，且在拟合直线边界方面效果很好。简而言之，本实施例通过单元完备性证明和实例检验，所构建单元既具有单元二次完备性、具有很强的抗畸变能力抗畸变性，又能解决曲线边界问题。

实施例 2

本实施例公开一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造系统，包括存储器、处理器以及存储在存储器上并可在处理器上运行的计算机程序，所述处理器执行所述计算机程序时实现上述方法实施例的步骤。

实施例 3

本实施例公开一种计算机可读存储介质，其上存储有计算机程序，所述程序被处理器执行时实现上述方法实施例的步骤。

综上，基于单元高阶完备性比其协调性更为重要，况且有些情况无法构造出即高阶完备又协调有限单元插值函数，有些有限元协调插值函数表现为过于刚硬而收敛效果不佳，其实只要当单元细分时单元能保证协调也可收敛，因此，也很有必要构造高阶完备非协调有限单元插值函数，为有限元分析结果提供一种对比和验证手段。藉此，本发明上述各实施例所公开的优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法、系统及存储介质，具有以下有益效果：

基于单一线性变换坐标系统构造求解物理量的非协调插值函数，其第一部分多项式具有高阶完备性，可使有限元分析软件的计算精度大幅度提高，提高结构设计的安全可靠性，优化结构设计，更能适应各种曲面（曲线）边界，从而为工程、航空和航天等建设带来巨大的经济效益。

另一方面，本发明采用单一的线性坐标变换构造高阶完备非协调有限元插值函数时，还取得了意想不到的技术效果，其在建立单元刚度矩阵和求解节点位移方程组时，不要求解整体坐标对等参局部坐标（ ξ , η ）变换的雅可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵，当单元畸变时雅可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵有可能趋于无穷大而引起计算误差，而单元可比矩阵 $[J]$ 的逆矩阵在单元里面为非常数矩阵，不能通过控制单元形状来避免此问题的出现，而采用单一的线性坐标变换构造高阶完备非协调有限元插值函数没有此问题，所以采用单一线性坐标变换构造的高阶完备非协调有限元插值函数比采用混合线性坐标变换构造的高阶完备协调有限元插值函数更具有更好的抗畸变性。

以上所述仅为本发明的优选实施例而已，并不用于限制本发明，对于本领域的技术人员来说，本发明可以有各种更改和变化。凡在本发明的精神和原则之内，所作的任何修改、等同替换、改进等，均应包含在本发明的保护范围之内。

权 利 要 求 书

1、一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法，其特征在于，包括：
以单一的线性变换坐标系构造非协调插值函数；

根据目标单元的特征确定非协调插值函数方程式的坐标元数、项数和次数；同时，所构造的非协调插值函数方程式包括高阶完备的第一部分多项式和高阶非完备的第二部分多项式；所述第一部分多项式以覆盖各坐标元组合后次数从低到高递增；所述第二部分多项式呈对称性分布，各项总次数皆在所述第一部分多项式最高次数以上且各坐标元的次数不超过所述第一部分多项式最高次数。

2、根据权利要求1所述的优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法，其特征在于，所构造的非协调插值函数包括以下的任意一项或任意组合：

1)、当所述目标单元为二维8节点高阶完备四边形曲边单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_1^2 + a_5 T_1 T_2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_1^2 T_2 + a_8 T_1 T_2^2 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_1^2 + b_5 T_1 T_2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_1^2 T_2 + b_8 T_1 T_2^2 \end{cases};$$

2)、当所述目标单元为二维12节点高阶完备四边形曲边单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_1^2 + a_5 T_1 T_2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_1^3 + a_8 T_1^2 T_2 + a_9 T_1 T_2^2 + a_{10} T_2^3 + a_{11} T_1^3 T_2 + a_{12} T_1 T_2^3 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_1^2 + b_5 T_1 T_2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_1^3 + b_8 T_1^2 T_2 + b_9 T_1 T_2^2 + b_{10} T_2^3 + b_{11} T_1^3 T_2 + b_{12} T_1 T_2^3 \end{cases};$$

3)、当所述目标单元为三维20节点高阶完备曲面六面体单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_3 + a_5 T_1^2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_3^2 + a_8 T_1 T_2 + a_9 T_1 T_3 + a_{10} T_2 T_3 \\ + a_{11} T_1^2 T_2 + a_{12} T_1^2 T_3 + a_{13} T_1 T_2^2 + a_{14} T_1 T_2 T_3 + a_{15} T_1 T_3^2 + a_{16} T_2 T_3^2 + a_{17} T_1 T_2 T_3 \\ + a_{18} T_1^2 T_2 T_3 + a_{19} T_1 T_2^2 T_3 + a_{20} T_1 T_2 T_3^2 \\ v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_3 + b_5 T_1^2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_3^2 + b_8 T_1 T_2 + b_9 T_1 T_3 + b_{10} T_2 T_3 \\ + b_{11} T_1^2 T_2 + b_{12} T_1^2 T_3 + b_{13} T_1 T_2^2 + b_{14} T_1 T_2 T_3 + b_{15} T_1 T_3^2 + b_{16} T_2 T_3^2 + b_{17} T_1 T_2 T_3 \\ + b_{18} T_1^2 T_2 T_3 + b_{19} T_1 T_2^2 T_3 + b_{20} T_1 T_2 T_3^2 \end{cases};$$

4)、当所述目标单元为三维32节点高阶完备曲面六面体单元时，所构造的单元位移非协调插值函数为：

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 T_1 + a_3 T_2 + a_4 T_3 + a_5 T_1^2 + a_6 T_2^2 + a_7 T_3^2 + a_8 T_1 T_2 + a_9 T_1 T_3 + a_{10} T_2 T_3 \\ + a_{11} T_1^3 + a_{12} T_2^3 + a_{13} T_3^3 + a_{14} T_1^2 T_2 + a_{15} T_1^2 T_3 + a_{16} T_1 T_2^2 + a_{17} T_2^2 T_3 + a_{18} T_1 T_3^2 + a_{19} T_2 T_3^2 + a_{20} T_1 T_2 T_3 \\ + a_{21} T_1^3 T_2 + a_{22} T_1^3 T_3 + a_{23} T_1 T_2^3 + a_{24} T_2^3 T_3 + a_{25} T_1 T_3^3 + a_{26} T_2 T_3^3 \\ + a_{27} T_1^2 T_2 T_3 + a_{28} T_1 T_2^2 T_3 + a_{29} T_1 T_2 T_3^2 + a_{30} T_1^2 T_2^2 + a_{31} T_1^2 T_3^2 + a_{32} T_2^2 T_3^2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} v = b_1 + b_2 T_1 + b_3 T_2 + b_4 T_3 + b_5 T_1^2 + b_6 T_2^2 + b_7 T_3^2 + b_8 T_1 T_2 + b_9 T_1 T_3 + b_{10} T_2 T_3 \\ + b_{11} T_1^3 + b_{12} T_2^3 + b_{13} T_3^3 + b_{14} T_1^2 T_2 + b_{15} T_1^2 T_3 + b_{16} T_1 T_2^2 + b_{17} T_2^2 T_3 + b_{18} T_1 T_3^2 + b_{19} T_2 T_3^2 + b_{20} T_1 T_2 T_3 \\ + b_{21} T_1^3 T_2 + b_{22} T_1^3 T_3 + b_{23} T_1 T_2^3 + b_{24} T_2^3 T_3 + b_{25} T_1 T_3^3 + b_{26} T_2 T_3^3 \\ + a_{27} T_1^2 T_2 T_3 + a_{28} T_1 T_2^2 T_3 + a_{29} T_1 T_2 T_3^2 + a_{30} T_1^2 T_2^2 + a_{31} T_1^2 T_3^2 + a_{32} T_2^2 T_3^2 \end{cases}$$

5)、当所述目标单元为二维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备任意四边形薄板单元时, 相关位移分量分别为 w 、 θ_x 、 θ_y , 所构造的单元位移非协调插值函数为:

$$w = c_1 + c_2 T_1 + c_3 T_2 + c_4 T_1^2 + c_5 T_1 T_2 + c_6 T_2^2 + c_7 T_1^3 + c_8 T_1^2 T_2 + c_9 T_1 T_2^2 + c_{10} T_2^3 + c_{11} T_1^3 T_2 + c_{12} T_1 T_2^3 ;$$

6)、当所述目标单元为二维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备曲边四边形薄板单元时, 相关位移分量分别为 w 、 θ_x 、 θ_y , 所构造的单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{aligned} w = & c_1 + c_2 T_1 + c_3 T_2 + c_4 T_1^2 + c_5 T_1 T_2 + c_6 T_2^2 + c_7 T_1^3 + c_8 T_1^2 T_2 + c_9 T_1 T_2^2 + c_{10} T_2^3 \\ & + c_{11} T_1^4 + c_{12} T_1^3 T_2 + c_{13} T_1^2 T_2^2 + c_{14} T_1 T_2^3 + c_{15} T_2^4 \\ & + c_{16} T_1^5 + c_{17} T_1^4 T_2 + c_{18} T_1^3 T_2^2 + c_{19} T_1^2 T_2^3 + c_{20} T_1 T_2^4 + c_{21} T_2^5 \\ & + c_{22} T_1^4 T_2^2 + c_{23} T_1^3 T_2^3 + c_{24} T_1^2 T_2^4 \end{aligned} ;$$

其中, 上述各方程式中, T_1 、 T_2 、 T_3 分别为单元线性变换坐标系中坐标; u 、 v 、 w 分别对应单元内三个坐标方向上的位移, θ_x 、 θ_y 分别为 w 对单元内坐标 x 、 y 的偏导数; $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, 3, \dots$ 为单元位移非协调插值函数的待定系数。

3、根据权利要求 2 所述的优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法, 其特征在于, 整体坐标系与线性坐标系变换的变换公式为:

$$\text{二维情况下, } \begin{cases} T_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 \\ T_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 \end{cases} ; \text{ 坐标变换关系中有 6 个待定系数 } A_i, B_i, C_i, (i=1, 2) \text{ 由变}$$

换 6 个为 0 或 1 的线性变换坐标值的方程组确定;

$$\text{三维情况下, } \begin{cases} T_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 \\ T_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 \\ T_3 = A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 \end{cases} ; \text{ 坐标变化关系有 12 个待定系数}$$

$A_i, B_i, C_i, D_i, (i=1, 2, 3)$ 由变换 12 个为 0 或 1 的线性变换坐标值的方程组确定。

4、根据权利要求 1 所述的优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法, 其特征在于, 对于工程上普遍采用的空间薄壳, 采用合适的正交曲线坐标及相应的几何方程, 根据

上述单元的原理,像平面问题一样在空间正交曲线坐标系中直接构造高阶完备曲面薄壳单元,计算单元刚度矩阵,再进行空间坐标转换;具体包括:

1)、当所述目标单元为三维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备任意四边形平板薄壳单元时,相关位移分量分别为 w' 、 $\theta_{x'}$ 、 $\theta_{y'}$,所构造的单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1 Z_2 \\ v' = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1 Z_2 \\ w' = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 + c_{11} Z_1^3 Z_2 + c_{12} Z_1 Z_2^3 \end{cases};$$

2)、当所述目标单元为三维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备曲线四边形平板薄壳单元时,相关位移分量分别为 w' 、 $\theta_{x'}$ 、 $\theta_{y'}$,所构造的单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1^2 + a_5 Z_1 Z_2 + a_6 Z_2^2 + a_7 Z_1^2 Z_2 + a_8 Z_1 Z_2^2 \\ v' = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1^2 + b_5 Z_1 Z_2 + b_6 Z_2^2 + b_7 Z_1^2 Z_2 + b_8 Z_1 Z_2^2 \\ w' = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 \\ \quad + c_{11} Z_1^4 + c_{12} Z_1^3 Z_2 + c_{13} Z_1^2 Z_2^2 + c_{14} Z_1 Z_2^3 + c_{15} Z_2^4 \\ \quad + c_{16} Z_1^5 + c_{17} Z_1^4 Z_2 + c_{18} Z_1^3 Z_2^2 + c_{19} Z_1^2 Z_2^3 + c_{20} Z_1 Z_2^4 + c_{21} Z_2^5 \\ \quad + c_{22} Z_1^4 Z_2^2 + c_{23} Z_1^3 Z_2^3 + c_{24} Z_1^2 Z_2^4 \end{cases};$$

3)、当所述目标单元为三维 4 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备四边形曲面薄壳单元时,相关位移分量分别为 w' 、 $\theta_{x'}$ 、 $\theta_{y'}$,所构造的单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1 Z_2 \\ v' = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1 Z_2 \\ w' = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 + c_{11} Z_1^3 Z_2 + c_{12} Z_1 Z_2^3 \end{cases};$$

4)、当所述目标单元为三维 8 节点且各节点有 3 个相关位移分量的高阶完备四边形曲面薄壳单元时,相关位移分量分别为 w' 、 $\theta_{x'}$ 、 $\theta_{y'}$,所构造的单元位移非协调插值函数为:

$$\begin{cases} u' = a_1 + a_2 Z_1 + a_3 Z_2 + a_4 Z_1^2 + a_5 Z_1 Z_2 + a_6 Z_2^2 + a_7 Z_1^2 Z_2 + a_8 Z_1 Z_2^2 \\ v' = b_1 + b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_1^2 + b_5 Z_1 Z_2 + b_6 Z_2^2 + b_7 Z_1^2 Z_2 + b_8 Z_1 Z_2^2 \\ w' = c_1 + c_2 Z_1 + c_3 Z_2 + c_4 Z_1^2 + c_5 Z_1 Z_2 + c_6 Z_2^2 + c_7 Z_1^3 + c_8 Z_1^2 Z_2 + c_9 Z_1 Z_2^2 + c_{10} Z_2^3 \\ \quad + c_{11} Z_1^4 + c_{12} Z_1^3 Z_2 + c_{13} Z_1^2 Z_2^2 + c_{14} Z_1 Z_2^3 + c_{15} Z_2^4 \\ \quad + c_{16} Z_1^5 + c_{17} Z_1^4 Z_2 + c_{18} Z_1^3 Z_2^2 + c_{19} Z_1^2 Z_2^3 + c_{20} Z_1 Z_2^4 + c_{21} Z_2^5 \\ \quad + c_{22} Z_1^4 Z_2^2 + c_{23} Z_1^3 Z_2^3 + c_{24} Z_1^2 Z_2^4 \end{cases};$$

其中,上述各方程式中, Z_1 、 Z_2 分别为曲面薄壳单元内二维正交曲线或直线坐标的线性变换坐标系中坐标;当三维曲面薄壳为平板薄壳时,曲面薄壳单元内二维正交曲线坐标即变为二维正交直线坐标; u' 、 v' 分别对应单元曲面内二维正交曲线或直线坐标方向上的位移, w'

对应单元曲面法线方向上的位移, θ_x 、 θ_y 分别为 w 对单元曲面内二维正交曲线或直线坐标 x' 、 y' 的偏导数; $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, 3, \dots$ 为单元位移非协调插值函数的待定系数。

5、根据权利要求 4 所述的优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法, 其特征在于, 还包括:

对于曲线坐标系上的曲壳单元, 在位移模式中补充完整的刚体位移。

6、根据权利要求 4 或 5 所述的优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造方法, 其特征在于, 单元曲面的二维正交曲线坐标系与线性坐标系变换的变换公式为:

$$\begin{cases} Z_1 = A_1 x' + B_1 y' + C_1 \\ Z_2 = A_2 x' + B_2 y' + C_2 \end{cases}; \text{坐标变换关系中有 6 个待定系数 } A_i, B_i, C_i, (i=1, 2) \text{ 由变换 6 个为 0}$$

或 1 的线性变换坐标值的方程组确定。

7、一种优化有限元软件计算精度的非协调插值函数构造系统, 其特征在于, 包括存储器、处理器以及存储在存储器上并可在处理器上运行的计算机程序, 其特征在于, 所述处理器执行所述计算机程序时实现上述权利要求 1 至 6 任一所述方法的步骤。

8、一种计算机可读存储介质, 其上存储有计算机程序, 其特征在于, 所述程序被处理器执行时实现上述权利要求 1 至 6 任一所述方法的步骤。

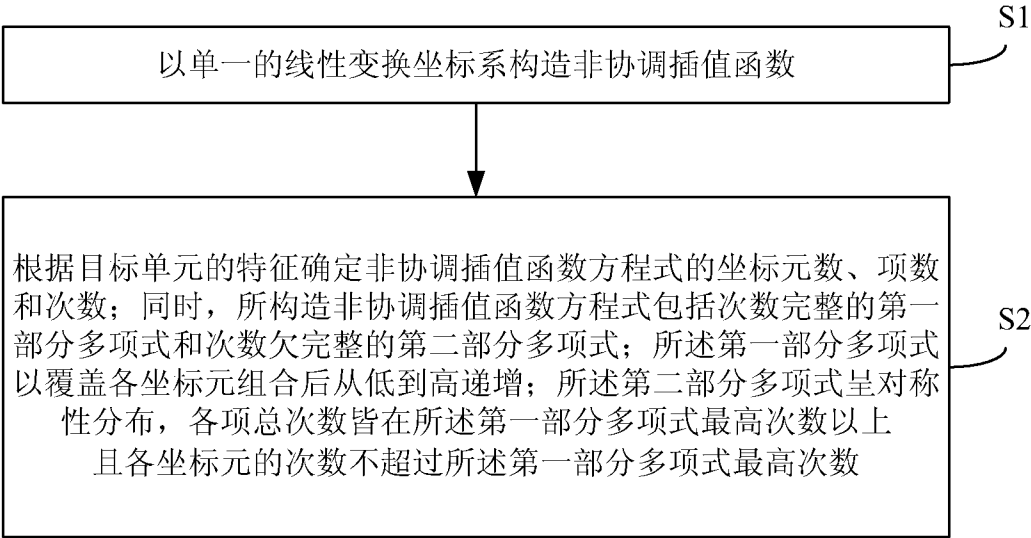


图 1

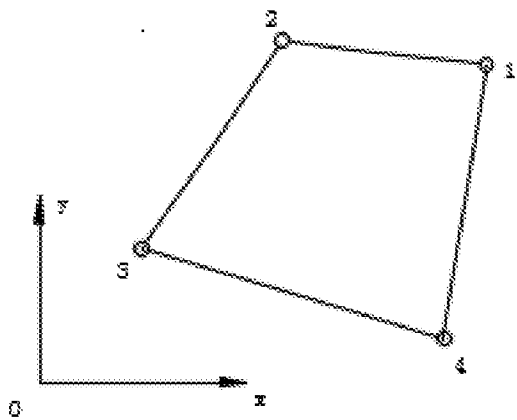


图 2 (a)

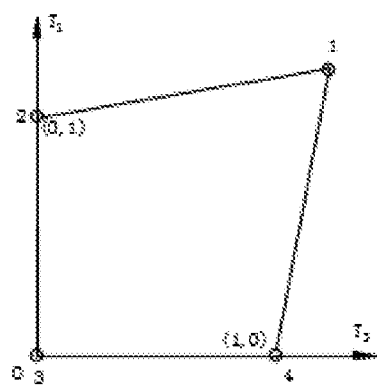


图 2 (b)

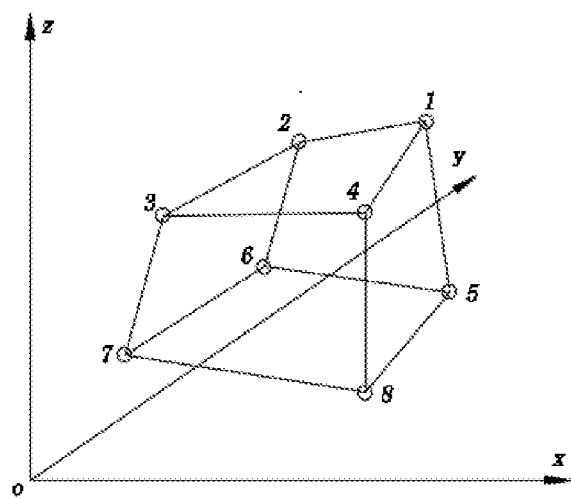


图 3 (a)

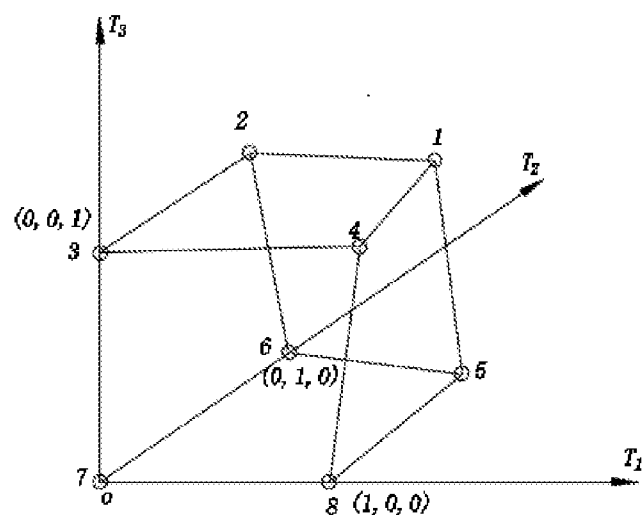


图 3 (b)

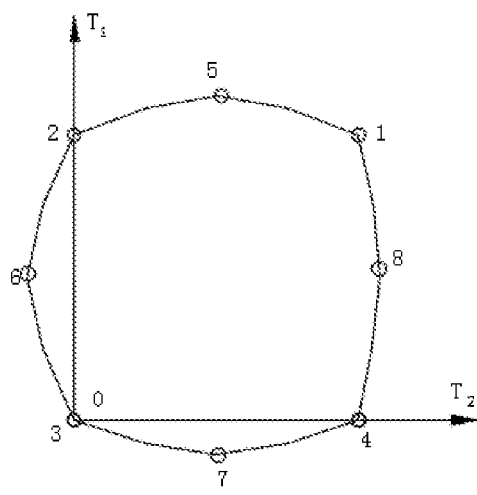


图 4

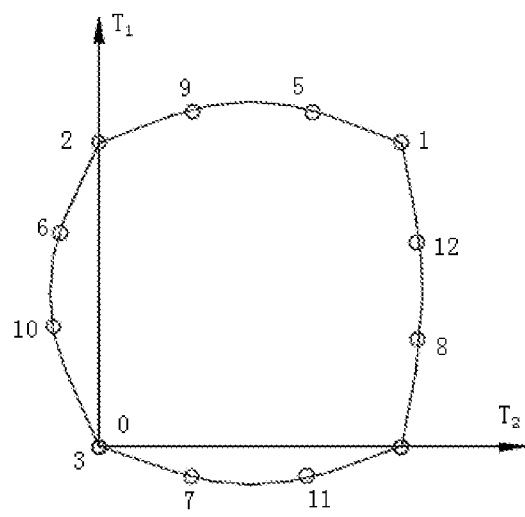


图 5

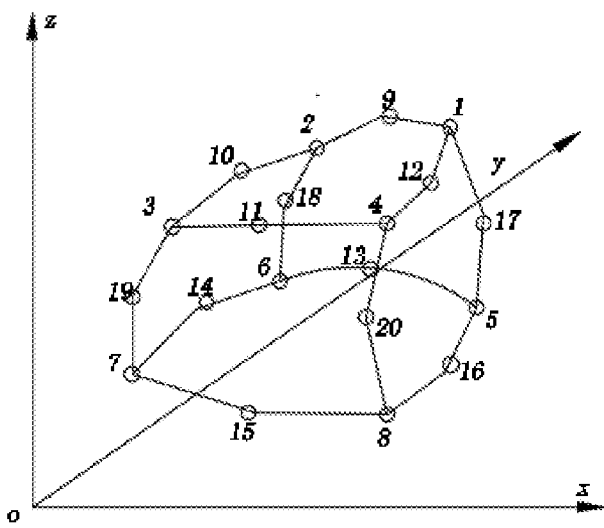


图 6

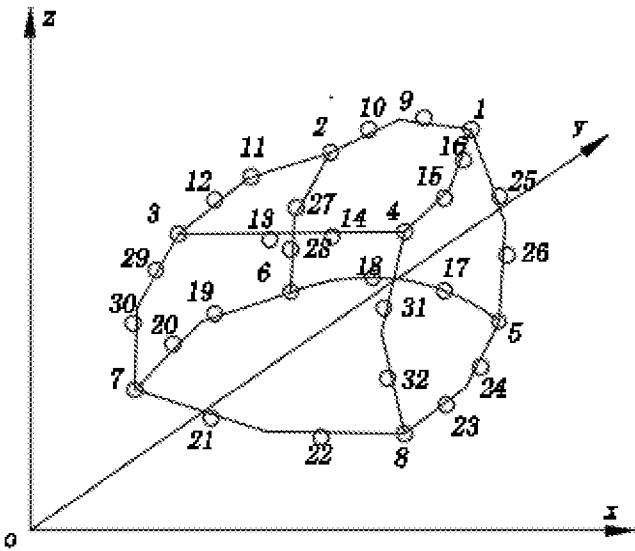


图 7

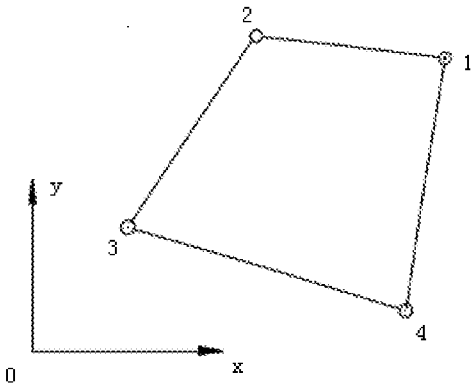


图 8

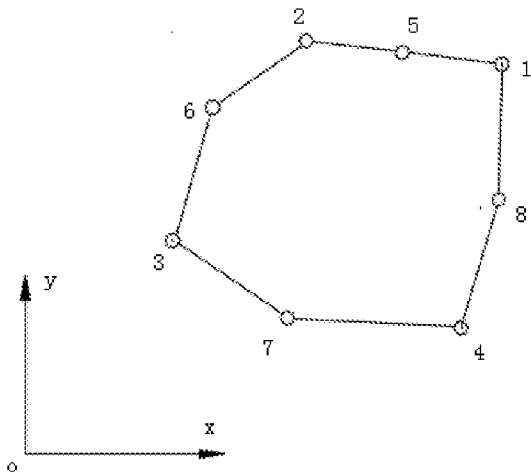


图 9

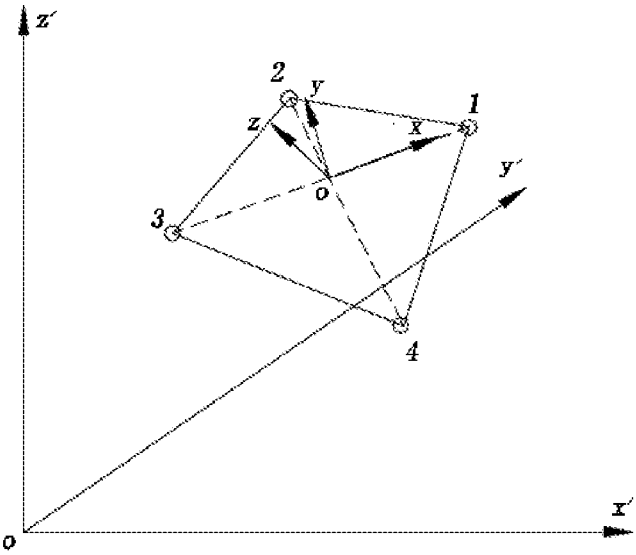


图 10

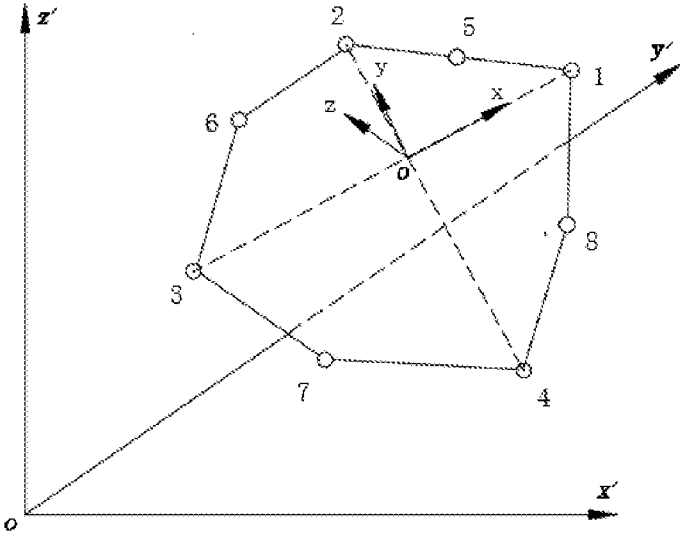


图 11

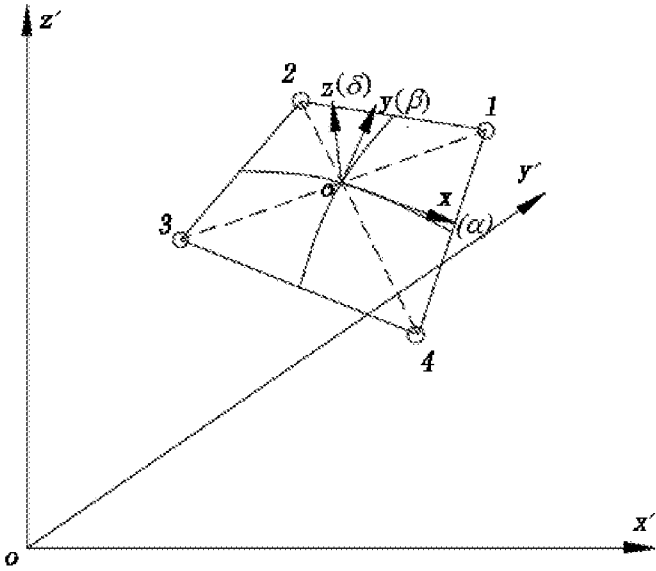


图 12

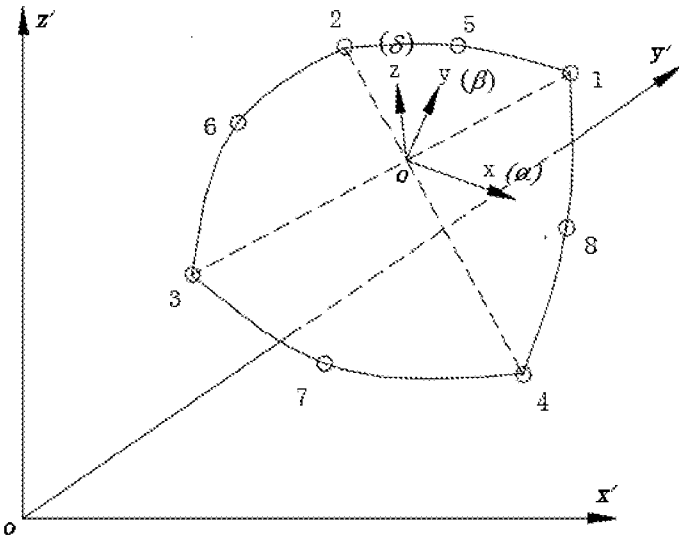


图 13

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.

PCT/CN2018/124580

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

G06F 17/50(2006.01)i

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

G06F

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

WPI, EPODOC, CNPAT, CNKI, IEEE: 优化, 有限元, 计算, 精度, 非协调, 插值函数, optimize, finite, element, compute, accuracy, non, coordinate, interpolation, function

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
PX	CN 108416079 A (CENTRAL SOUTH UNIVERSITY) 17 August 2018 (2018-08-17) claims 1-8	1-8
A	CN 107193780 A (CENTRAL SOUTH UNIVERSITY) 22 September 2017 (2017-09-22) description, paragraphs [0006]-[0019]	1-8
A	JP 2000003354 A (PANASONIC ELECTRIC IND. CO., LTD.) 07 January 2000 (2000-01-07) entire document	1-8



Further documents are listed in the continuation of Box C.



See patent family annex.

* Special categories of cited documents:

“A” document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

“E” earlier application or patent but published on or after the international filing date

“L” document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

“O” document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

“P” document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

“T” later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

“X” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

“Y” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art

“&” document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

13 March 2019

Date of mailing of the international search report

01 April 2019

Name and mailing address of the ISA/CN

State Intellectual Property Office of the P. R. China
No. 6, Xitucheng Road, Jimenqiao Haidian District, Beijing
100088
China

Facsimile No. (86-10)62019451

Authorized officer

Telephone No.

INTERNATIONAL SEARCH REPORT
Information on patent family members

International application No.

PCT/CN2018/124580

Patent document cited in search report			Publication date (day/month/year)	Patent family member(s)			Publication date (day/month/year)
CN	108416079	A	17 August 2018	None			
CN	107193780	A	22 September 2017	US	2019005171	A1	03 January 2019
				WO	2018196098	A1	01 November 2018
JP	2000003354	A	07 January 2000	None			

国际检索报告

国际申请号

PCT/CN2018/124580

A. 主题的分类

G06F 17/50(2006.01)i

按照国际专利分类(IPC)或者同时按照国家分类和IPC两种分类

B. 检索领域

检索的最低限度文献(标明分类系统和分类号)

G06F

包含在检索领域中的除最低限度文献以外的检索文献

在国际检索时查阅的电子数据库(数据库的名称, 和使用的检索词(如使用))

WPI, EPDOC, CNPAT, CNKI, IEEE: 优化, 有限元, 计算, 精度, 非协调, 插值函数, optimize, finite, element, compute, accuracy, non, coordinate, interpolation, function

C. 相关文件

类 型*	引用文件, 必要时, 指明相关段落	相关的权利要求
PX	CN 108416079 A (中南大学) 2018年 8月 17日 (2018 - 08 - 17) 权利要求1-8	1-8
A	CN 107193780 A (中南大学) 2017年 9月 22日 (2017 - 09 - 22) 说明书第[0006]-[0019]段	1-8
A	JP 2000003354 A (PANASONIC ELECTRIC IND. CO., LTD.) 2000年 1月 7日 (2000 - 01 - 07) 全文	1-8

☐ 其余文件在C栏的续页中列出。☒ 见同族专利附件。

* 引用文件的具体类型:

“A” 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件

“E” 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利

“L” 可能对优先权要求构成怀疑的文件, 或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件 (如具体说明的)

“O” 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件

“P” 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件

“T” 在申请日或优先权日之后公布, 与申请不相抵触, 但为了理解发明之理论或原理的在后文件

“X” 特别相关的文件, 单独考虑该文件, 认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性

“Y” 特别相关的文件, 当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时, 要求保护的发明不具有创造性

“&” 同族专利的文件

国际检索实际完成的日期

2019年 3月 13日

国际检索报告邮寄日期

2019年 4月 1日

ISA/CN的名称和邮寄地址

中国国家知识产权局 (ISA/CN)
中国北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 100088

受权官员

鞠博

传真号 (86-10)62019451

电话号码 86-(10)-53961534

国际检索报告
关于同族专利的信息

国际申请号

PCT/CN2018/124580

检索报告引用的专利文件			公布日 (年/月/日)	同族专利			公布日 (年/月/日)
CN	108416079	A	2018年 8月 17日	无			
CN	107193780	A	2017年 9月 22日	US	2019005171	A1	2019年 1月 3日
				WO	2018196098	A1	2018年 11月 1日
JP	2000003354	A	2000年 1月 7日	无			