



DEMANDE INTERNATIONALE PUBLIÉE EN VERTU DU TRAITE DE COOPERATION EN MATIÈRE DE BREVETS (PCT)

(51) Classification internationale des brevets ⁷ : G06T 17/20	A1	(11) Numéro de publication internationale: WO 00/22577 (43) Date de publication internationale: 20 avril 2000 (20.04.00)
(21) Numéro de la demande internationale: PCT/FR99/02524 (22) Date de dépôt international: 15 octobre 1999 (15.10.99) (30) Données relatives à la priorité: 98/13090 15 octobre 1998 (15.10.98) FR 99/00304 11 janvier 1999 (11.01.99) FR (71) Déposants (pour tous les Etats désignés sauf US): FRANCE TELECOM [FR/FR]; 6, place d'Alleray, F-75015 Paris (FR). TELEDIFFUSION DE FRANCE [FR/FR]; 10, rue d'Oradour-sur-Glane, F-75732 Paris Cedex 15 (FR). (72) Inventeurs; et (75) Inventeurs/Déposants (US seulement): LAURENT-CHATENET, Nathalie [FR/FR]; 24, square Georges Travers, F-35000 Rennes (FR). SANSON, Henri [FR/FR]; 12, allée des Roseaux, F-35690 Acigné (FR). ALLIEZ, Pierre [FR/FR]; 42, Cours de la Vilaine, F-35510 Cesson Sévigné (FR). (74) Mandataire: VIDON, Patrice; Cabinet Patrice Vidon, Immeuble Germanium, 80, avenue des Buttes de Coësmes, F-35700 Rennes (FR).		(81) Etats désignés: JP, US, brevet européen (AT, BE, CH, CY, DE, DK, ES, FI, FR, GB, GR, IE, IT, LU, MC, NL, PT, SE). Publiée <i>Avec rapport de recherche internationale.</i>

(54) Title: SOURCE MESH CODING METHOD OPTIMISING VERTEX POSITION RESULTING FROM EDGE FUSION, AND CORRESPONDING APPLICATIONS

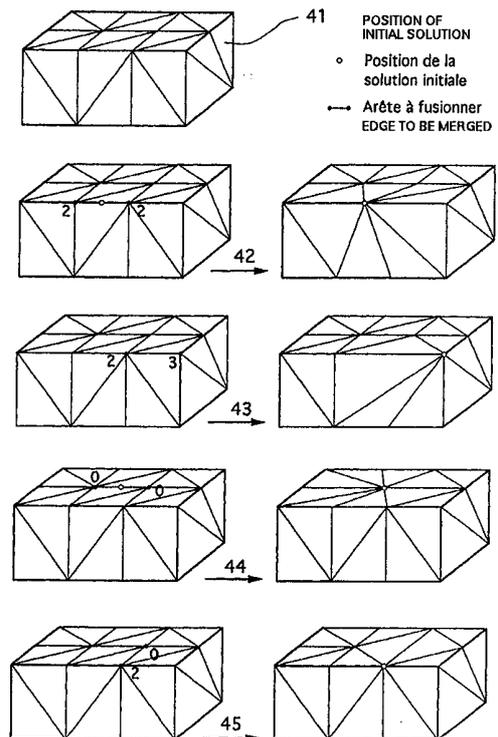
(54) Titre: PROCÉDE DE CODAGE D'UN MAILLAGE SOURCE, AVEC OPTIMISATION DE LA POSITION D'UN SOMMET RESULTANT D'UNE FUSION D'ARETE, ET APPLICATIONS CORRESPONDANTES

(57) Abstract

The invention concerns a method for simplifying a mesh source M using a decimation step by edge fusion, and comprising a pseudo-optimisation step following said decimation step by ridge fusion, positioning the vertex resulting from said fusion so as to reduce the geometric deviation between said source mesh M and said simplified mesh M'. Advantageously, said step consists in counting the sharp edges around two vertices forming the edge to be merged, and in distinguishing between the two following situations: if the number of sharp edges are the same around two vertices, the vertex resulting from the fusion is set in the middle of the segment joining said vertices (42, 44); if the number of edges are different, the vertex resulting from the fusion is set on the vertex presenting the highest number of sharp edges (43, 45).

(57) Abrégé

L'invention concerne un procédé de simplification d'un maillage source M, mettant en oeuvre une étape de décimation par fusion d'arête, et comprenant une étape de pseudo-optimisation après ladite étape de décimation par fusion d'une arête, positionnant le sommet résultant de ladite fusion de manière à réduire la déviation géométrique entre ledit maillage source M et ledit maillage simplifié M' avantageusement, cette étape consiste à dénombrer les arêtes vives autour des deux sommets formant l'arête à fusionner, et à distinguer les deux cas suivants: si les nombres d'arêtes vives sont les mêmes autour des deux sommets, on place le sommet résultant de la fusion au milieu du segment reliant lesdits sommets (42, 44); si les nombres d'arêtes vives sont différents, on place le sommet résultant de la fusion sur le sommet présentant le plus grand nombre d'arêtes vives (43, 45).



UNIQUEMENT A TITRE D'INFORMATION

Codes utilisés pour identifier les Etats parties au PCT, sur les pages de couverture des brochures publiant des demandes internationales en vertu du PCT.

AL	Albanie	ES	Espagne	LS	Lesotho	SI	Slovénie
AM	Arménie	FI	Finlande	LT	Lituanie	SK	Slovaquie
AT	Autriche	FR	France	LU	Luxembourg	SN	Sénégal
AU	Australie	GA	Gabon	LV	Lettonie	SZ	Swaziland
AZ	Azerbaïdjan	GB	Royaume-Uni	MC	Monaco	TD	Tchad
BA	Bosnie-Herzégovine	GE	Géorgie	MD	République de Moldova	TG	Togo
BB	Barbade	GH	Ghana	MG	Madagascar	TJ	Tadjikistan
BE	Belgique	GN	Guinée	MK	Ex-République yougoslave de Macédoine	TM	Turkménistan
BF	Burkina Faso	GR	Grèce	ML	Mali	TR	Turquie
BG	Bulgarie	HU	Hongrie	MN	Mongolie	TT	Trinité-et-Tobago
BJ	Bénin	IE	Irlande	MR	Mauritanie	UA	Ukraine
BR	Brésil	IL	Israël	MW	Malawi	UG	Ouganda
BY	Bélarus	IS	Islande	MX	Mexique	US	Etats-Unis d'Amérique
CA	Canada	IT	Italie	NE	Niger	UZ	Ouzbékistan
CF	République centrafricaine	JP	Japon	NL	Pays-Bas	VN	Viet Nam
CG	Congo	KE	Kenya	NO	Norvège	YU	Yougoslavie
CH	Suisse	KG	Kirghizistan	NZ	Nouvelle-Zélande	ZW	Zimbabwe
CI	Côte d'Ivoire	KP	République populaire démocratique de Corée	PL	Pologne		
CM	Cameroun	KR	République de Corée	PT	Portugal		
CN	Chine	KZ	Kazakstan	RO	Roumanie		
CU	Cuba	LC	Sainte-Lucie	RU	Fédération de Russie		
CZ	République tchèque	LI	Liechtenstein	SD	Soudan		
DE	Allemagne	LK	Sri Lanka	SE	Suède		
DK	Danemark	LR	Libéria	SG	Singapour		
EE	Estonie						

Procédé de codage d'un maillage source, avec optimisation de la position d'un sommet résultant d'une fusion d'arête, et applications correspondantes.

1. Domaine de l'invention et applications

5 1.1 Domaine de l'invention

Le domaine de l'invention est celui du codage de structures de données géométriques, ou maillages, notamment de grande taille. Plus précisément, l'invention concerne la représentation et le codage d'objets ou de scènes en trois dimensions. Plus précisément encore, l'invention concerne une technique
10 d'approximation d'un maillage source en trois dimensions pouvant être utilisée seul, ou en combinaison avec d'autres techniques connues. Dans ce dernier cas, le procédé de l'invention peut constituer une étape avantageuse d'initialisation.

Un maillage est classiquement défini par un ensemble de sommets et de
15 faces orientées définissant une topologie. De tels maillages sont par exemple utilisés en graphisme sur ordinateur, pour modéliser des objets en trois dimensions avec une complexité géométrique limitée.

L'approximation d'un maillage M consiste à trouver un maillage M' dont la complexité géométrique est moindre que celle du maillage M, et qui
20 approche au mieux la géométrie de M.

1.2 Exemples d'applications

L'invention trouve des applications dans tous les domaines où il est souhaitable de réduire le nombre d'informations nécessaires pour représenter et/ou
25 manipuler efficacement un objet en trois dimensions ou un ensemble d'objets, par exemple pour l'analyser, le stocker et/ou le transmettre et/ou en assurer le rendu.

A titre indicatif, l'invention peut notamment s'appliquer au domaine de :

- la réalité virtuelle (visites ou boutiques virtuelles, loisirs, télémanipulation, etc...). Dans ce type d'application, l'approximation de maillages permet de réduire le coût de rendu de scènes complexes, en
30 particulier en définissant la notion d'échelonnabilité sur les maillages

- (fonction du point de vue, des capacités graphiques, du taux de rafraîchissement souhaité, ...). Dans le cas de la réalité virtuelle distribuée ou partagée, cela permet également d'adapter la complexité d'une scène aux capacités de rendu et de stockage des différents terminaux, ainsi qu'aux débits des réseaux ;
- 5
- la simulation scientifique (éléments finis, CAO, etc...). La réduction de la complexité géométrique des modèles permet une accélération des temps de calcul, une prise de décisions plus rapide, notamment lors de la conception en CAO, et l'élimination des informations redondantes
- 10
- la modélisation (scanner 3D (reconstruction de surfaces à partir de points non organisés), scanners volumiques, reconstruction de surfaces à partir de photos stéréoscopiques ou de séquences vidéo, de modèles numériques de terrains (imagerie satellite ou radar), etc...). Un modèle numérique de terrain permet ainsi l'obtention d'un maillage représentant la topologie d'une région. Un tel maillage est obtenu par l'échantillonnage régulier d'une image stockant l'information d'altitude
- 15
- en chaque point. Il en résulte une quantité de données importante, comprenant des informations inutiles pour la simulation scientifique, ou trop coûteuse pour le rendu (dans le cas de simulateurs). L'approximation de maillages réduit la quantité de données, tout en garantissant une bonne fidélité géométrique aux données initiales et la conservation de la topologie.
- 20

2. Art antérieur

25 2.1 Les familles d'algorithmes

Plusieurs techniques d'approximation de maillages sont déjà connues. Les plus répandues peuvent être classées en trois grandes familles d'algorithmes selon qu'elles fonctionnent par :

- décimation ;
- 30 - ré-échantillonnage sous-critique ;

- subdivision adaptative.

2.1.1 décimation

La décimation consiste à retirer de manière itérative des sommets et/ou des faces d'un maillage. Cette opération est appelée opération élémentaire de simplification. Les méthodes mettant en œuvre ce principe de décimation peuvent également optimiser les positions des sommets après ou pendant la simplification, cette dernière étant choisie de manière à préserver au mieux la topologie du maillage.

2.1.2 ré-échantillonnage sous-critique

Le ré-échantillonnage consiste à échantillonner un modèle original, soit en prenant des points aléatoirement sur sa surface et en retriangulant ensuite soit en définissant une grille tridimensionnelle et en agglomérant les sommets dans chaque boîte élémentaire de la grille. Le modèle ainsi généré est simplifié, et doit approximer au mieux les données initiales. Cette technique est rapide, mais ne conserve pas la topologie ni les caractéristiques visuellement importantes des maillages.

2.1.3 subdivision adaptative

La subdivision adaptative commence avec un modèle comportant une géométrie très simple, que l'on subdivise récursivement ensuite, en ajoutant à chaque itération un détail dans les régions où l'erreur d'approximation est maximale.

2.1.4 combinaisons d'algorithmes

De façon à permettre une approximation d'un maillage avec une qualité de reconstruction satisfaisante, il est nécessaire de combiner une décimation et une optimisation des positions des sommets conservés. En d'autres termes, l'objectif de base d'un procédé de codage d'un maillage source étant de maximiser la qualité de l'approximation pour une complexité géométrique donnée, celui-ci doit notamment présenter les propriétés suivantes :

- décimation ;
- préservation de la topologie ;

- optimisation des positions, suivant un critère d'erreur prédéfini.

On connaît ainsi une première méthode appelée « remaillage », répondant à ces critères. Elle est notamment présentée dans le document « re-tiling polygonal surfaces » par Greg TURK (SIGGRAPH 92 Conference proceedings, p. 55-64, 92). Elle fonctionne par échantillonnage, décimation et optimisation des positions. Elle permet de paramétrer le nombre de niveaux de résolution souhaités et le nombre final de sommets pour chacun d'eux.

L'algorithme débute par une distribution aléatoire du nombre de sommets paramétrés sur la surface du modèle, puis optimise leur position en les liant par des forces de répulsion (fonctions de la courbure locale). Il triangule ensuite les polygones ainsi formés, en incluant les sommets du maillage original. Enfin, on décime le modèle un sommet après l'autre (si cette opération conserve la topologie locale) puis on retriangule le trou résultant.

On obtient ainsi un modèle raffiné dans les régions de forte courbure et décimé sur les régions planes.

Un inconvénient de cette méthode est qu'elle présente une partie aléatoire. En conséquence, deux décimations successives ne donnent pas le même résultat. Par ailleurs, cette technique a tendance à lisser les discontinuités dans la plupart des situations.

De plus, la fidélité aux données initiales n'est pas exprimée directement au cours de l'optimisation des positions.

Une autre technique, appelée "codage progressif de maillages", a été développée par Hugues HOPPE, dans le document "Progressive meshes" (SIGGRAPH 96 Conference Proceedings, pages 99-108, 1996). Elle repose sur la décimation et l'optimisation des points. Cette technique est décrite plus en détail en annexe 1, en relation avec les figures 24 à 27, de façon à ne pas surcharger la présente discussion. Il est clair cependant que cette annexe 1, ainsi que l'annexe 2, font partie intégrante de la description.

Cette technique de codage progressif de maillages présente différents inconvénients. Notamment, elle ne conserve pas naturellement les discontinuités ou singularités géométriques, ce qui suppose une gestion de cas particuliers, tels que les coins, les arêtes vives finissantes et les arêtes vives régulières, pour éviter des ruptures de topologie. Cela entraîne des calculs complexes, difficiles à mettre en œuvre, et suppose des paramétrages peu aisés (qu'est-ce qu'une arête vive ? Comment pondérer le terme de ressort pour éviter de lisser les surfaces ? ...).

Par ailleurs, elle n'est pas efficace pour caractériser les différences perceptuelles entre deux maillages.

10 3. Objectifs de l'invention

L'invention concerne en particulier la technique de décimation mise en œuvre, par exemple, par ces différentes techniques de codage de maillage, ou par d'autres.

L'invention a notamment pour objectif de pallier les différents inconvénients des techniques connues.

Ainsi, un objectif de l'invention est de fournir un procédé de simplification de maillage par décimation (fusion d'arêtes), qui soit plus efficace, en termes de qualité perceptuelle, que les techniques connues.

En d'autres termes, un objectif de l'invention est de fournir un tel procédé présentant, jusqu'à un niveau élevé de décimation, une conservation des singularités des maillages, et une préservation de la topologie.

L'invention a également pour objectif de fournir un tel procédé, qui soit simple à mettre en œuvre, en termes de calculs à effectuer, et qui présente une bonne vitesse d'exécution.

25 Selon un premier aspect de l'invention, un autre objectif est de fournir un tel procédé, qui puisse être utilisé seul, afin de fournir une méthode rapide de simplification de maillages.

30 Selon un deuxième aspect de l'invention, un objectif est de fournir un tel procédé de décimation, qui puisse être utilisé, de façon à l'améliorer, dans un procédé d'optimisation géométrique de maillage.

Selon encore un autre aspect de l'invention, un objectif de l'invention est de fournir un procédé de codage d'un maillage source en trois dimensions, présentant un meilleur rapport qualité de l'approximation/complexité géométrique que les techniques connues.

5 Notamment, l'invention a pour objectif de fournir un tel procédé, respectant plus fidèlement les caractéristiques importantes à conserver (singularités ou discontinuités).

10 Un autre objectif de l'invention est de fournir un tel procédé, ne nécessitant pas une recherche et une gestion des cas particuliers (tels que les arêtes et les coins), ni la mise en œuvre de paramètres spécifiques (par exemple critères de reconnaissance d'une arête, seuils, ...) qu'il est nécessaire de définir pour chaque maillage.

15 L'invention a encore pour objectif de fournir un tel procédé, qui permet une reconstruction successive du maillage, celui-ci étant reconnaissable, sous une représentation grossière, très rapidement.

L'invention a également pour objectif de fournir un tel procédé permettant de répondre aux fonctionnalités fixées dans le projet de standardisation ISO-MPEG4, à savoir :

- 20 - la compression de maillages, qui doit réduire fortement la quantité de données décrivant la géométrie, avec des pertes visuelles minimales ;
- la représentation progressive d'un maillage, permettant de définir un maillage sous la forme d'un maillage de base à faible résolution, et d'une séquence de raffinements ;
- 25 - l'adaptation à une gamme de débits importante, la qualité étant acceptable, mais pour de très faibles débits.

4. caractéristiques principales de l'invention

4.1 étude d'optimisation de la position des sommets

30 Ces objectifs, ainsi que d'autres qui apparaîtront plus clairement par la suite, sont atteints selon l'invention à l'aide d'un procédé de simplification d'un maillage source (M) représentatif d'un objet en trois dimensions, délivrant un

maillage simplifié (M') correspondant audit maillage source (M), lesdits maillages étant définis par un ensemble de sommets, d'arêtes et/ou de faces, ledit procédé mettant en œuvre une étape de décimation par fusion d'arête, consistant à associer à une arête à décimer, définie par deux sommets, un sommet unique, de façon à obtenir un maillage simplifié M'.

Ce procédé comprend une étape d'optimisation, ou de pseudo-optimisation, après ladite étape de décimation par fusion d'une arête, assurant le positionnement du sommet résultant de ladite fusion de manière à réduire la déviation géométrique entre ledit maillage source M et ledit maillage simplifié M'.

On respecte ainsi les particularités, notamment les arêtes vives du maillage.

Ladite étape de pseudo-optimisation peut avantageusement consister à dénombrer les arêtes vives autour des deux sommets formant l'arête à fusionner, et à distinguer les deux cas suivants :

- si les nombres d'arêtes vives sont les mêmes autour des deux sommets, on place le sommet résultant de la fusion au milieu du segment reliant lesdits sommets ;
- si les nombres d'arêtes vives sont différents, on place le sommet résultant de la fusion sur le sommet présentant le plus grand nombre d'arêtes vives.

4.2 caractéristiques avantageuses de l'invention

L'invention peut notamment être mise en œuvre à l'aide d'un algorithme organisé en deux parties : l'optimisation de positions et la décimation.

La décimation permet d'obtenir un maillage géométriquement simplifié, à partir du maillage original, tout en conservant la topologie et une bonne ressemblance avec ce maillage original.

L'optimisation des positions des sommets permet l'obtention de la meilleure approximation au sens de la métrique basée volume de l'invention.

En combinant décimation et optimisation, on peut générer soit un maillage sous forme progressive (en utilisant alternativement la décimation d'un sommet et

une optimisation locale), soit des niveaux de résolution distincts (en utilisant successivement la décimation d'un ensemble de sommets et une optimisation globale).

5 De façon avantageuse, le procédé de l'invention comprend une étape de sélection d'une fusion d'arête à effectuer, parmi toutes les fusions d'arête possibles, tenant compte :

- d'au moins une information représentative de la courbure définie localement autour de l'arête considérée ;
 - d'au moins une information représentative de la dynamique géométrique définie localement.
- 10

La prise en compte de ces deux critères permet, comme on le verra par la suite, d'optimiser le choix des fusions à effectuer, en supprimant en priorité les éléments les moins significatifs perceptuellement.

15 De façon préférentielle, ladite étape de sélection met en œuvre une queue de priorité des arêtes à fusionner, en fonction d'un critère prioritaire, ladite information représentative de la courbure, puis d'un critère secondaire, ladite information représentative de la dynamique géométrique.

Cette hiérarchie de critères permet d'atteindre une bonne efficacité.

20 Avantageusement, ladite étape de sélection gère un seuil de courbure, seules les arêtes ayant une courbure inférieure audit seuil étant considérées pour l'application dudit critère secondaire, ledit seuil étant augmenté lorsqu'aucune arête ne présente plus une courbure inférieure à ce dernier.

25 Selon différents modes de réalisation particuliers, ladite information représentative de la dynamique géométrique peut appartenir au groupe comprenant :

- longueur de l'arête considérée ;
 - une moyenne des surfaces des faces avoisinant ladite arête considérée ;
 - une moyenne des longueurs des arêtes adjacentes aux sommets formant ladite arête considérée ;
- 30

- une combinaison de longueurs d'arêtes et/ou de surfaces de faces ;
- toute autre grandeur caractéristique reliée à la densité locale.

Comme on le verra par la suite, la prise en compte de la longueur de l'arête est une technique simple, et fournissant de très bons résultats.

5 La décimation peut notamment être interrompue en fonction d'un des critères appartenant au groupe comprenant :

- un taux de compression atteint ;
- une complexité géométrique atteinte, exprimée par un nombre de sommets ou de faces ;
- 10 - un seuil de courbure atteint.

Selon un premier mode de mise en œuvre de l'invention, le procédé de simplification d'un maillage source constitue une étape d'initialisation d'un procédé d'optimisation géométrique d'un maillage.

15 L'invention concerne également un tel procédé d'optimisation géométrique d'un maillage source, comprenant une étape d'initialisation mettant en œuvre le procédé de simplification décrit ci-dessus.

Selon un second mode de mise en œuvre de l'invention, le procédé de simplification d'un maillage source peut être utilisé seul.

20 Ainsi, le procédé de codage de maillage peut mettre en œuvre une étape de minimisation d'un volume compris entre ledit maillage source (M) et ledit maillage simplifié (M').

25 Ainsi, l'invention concerne une technique d'approximation de maillages utilisant une métrique basée volume, et non comme cela est classiquement le cas, une métrique considérant la distance entre un sommet et une surface (une telle distance n'étant d'ailleurs pas unique).

30 Cette approche nouvelle prend en compte naturellement les caractéristiques importantes à conserver (singularités) sans qu'il soit nécessaire de recourir à la détection de cas particuliers. Aucun paramétrage particulier n'est requis, avant le traitement d'un maillage : on minimise simplement le volume entre les deux maillages.

De façon avantageuse, chacun desdits maillages étant défini par la position de chacun de ses sommets et des arêtes les reliant, ladite étape de minimisation assure la détermination des positions des sommets (X_1, X_2, \dots, X_n) dudit maillage simplifié (M') minimisant le volume $V(M, M')$ entre ledit maillage source et ledit maillage simplifié.

Préférentiellement, ladite étape de minimisation met en œuvre un processus itératif optimisant progressivement les positions des sommets dudit maillage simplifié (M').

Ledit processus itératif peut notamment être interrompu lorsqu'au moins un des critères d'arrêt suivants est atteint :

- un nombre (N) maximum d'itérations ;
- une différence entre deux vecteurs déplacement successifs des positions des sommets inférieure à un seuil prédéterminé (ϵ).

Selon un mode de réalisation avantageux, ladite étape de minimisation met en œuvre une méthode de gradient adaptatif. Cette méthode, ainsi qu'on le verra par la suite, permet de mettre en œuvre l'invention avec une complexité de calcul réduite. En effet, il n'est alors pas nécessaire d'effectuer un calcul explicite du volume.

Dans ce cas, ladite méthode de gradient adaptatif peut avantageusement reposer sur les opérations suivantes:

- sélection d'un vecteur X_p de \mathbf{R}^{3n} ($n \geq 1$) dudit maillage simplifié, et calcul du gradient $\nabla E(X_p)$ en X_p de la fonction à minimiser $E = d(M, M')$;
- détermination de la position X_p^* de X_p dudit maillage, selon la relation définie à l'itération $k+1$ par :

$$X_p^{k+1} = X_p^k - \gamma_k \times \frac{\nabla E(X_p^k)}{\|\nabla E(X_p^k)\|}$$

k variant de 0 à $n-1$ (avec $n < N$) et γ_k étant le pas de ladite relation ;

N représente le nombre d'itérations utiles pour atteindre la convergence (cette dernière étant atteinte lorsque la différence entre deux déterminations

successives est inférieure à un seuil (ϵ) ou lorsqu'un nombre maximum d'itérations est atteint).

On peut noter que X_p appartient à \mathbf{R}^3 si on effectue une optimisation locale ou à \mathbf{R}^{3n} si on effectue une optimisation globale. En d'autres termes, on optimise
 5 les positions d'un sommet à la fois dans le cas d'une optimisation locale et de tous les sommets simultanément (sous la forme d'un unique vecteur de \mathbf{R}^{3n}) dans le cas d'une optimisation globale.

De façon préférentielle, ledit pas γ_k est variable, et il varie en fonction de l'oscillation de deux déplacements successifs des sommets et/ou en fonction des
 10 variations de l'énergie. Il peut notamment être maintenu entre deux bornes γ_{\min} et γ_{\max} .

Selon un mode de réalisation avantageux de l'invention, on détermine, à chaque itération, une variation élémentaire dudit volume correspondant à un champ de vecteurs $\delta\vec{M}'$. La surface étant paramétrée par u et v , de façon qu'un
 15 vecteur $\delta\vec{M}'$ s'exprime sous la forme $\delta\vec{M}'(u, v)$, ladite variation élémentaire est assimilée au parallélépipède généré par l'évolution de l'élément de surface $dudv$ dans la direction $\delta\vec{M}'(u, v)$.

Cette variation élémentaire de volume entre M et M' peut avantageusement s'écrire :

$$20 \quad \delta d(M, M', \delta\vec{M}') = - \int \int_{u,v} \eta(u, v) \vec{n}(u, v) \delta\vec{M}'(u, v) d\sigma(u, v)$$

avec : $\eta(u, v) = \eta(M, M', \vec{n}(u, v)) = 1$ si la normale unitaire $\vec{n}(u, v)$ est orientée vers le volume intérieur, et -1 sinon.

Selon un mode de réalisation préférentiel de l'invention, ledit maillage simplifié est paramétré à l'aide d'un modèle d'éléments finis. Lesdits éléments
 25 finis sont avantageusement obtenus à l'aide d'un interpolateur affine.

Dans ce cas, ledit maillage simplifié peut s'écrire :

$$M(u, v) = \sum_{i=1}^N X_i \lambda_i(u, v)$$

avec $\lambda_i(u, v)$ une fonction de forme adaptée à un modèle d'éléments finis triangulaires,

et X_i sommet dudit maillage, défini dans R^3 ,
et on définit une fonction de forme sur le maillage par le biais de coordonnées barycentriques.

En utilisant l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta d(M, M', \delta X_1, \dots, \delta X_n) &= - \int \int_{u,v} \eta(u,v) \bar{n}(u,v) \sum_{i=1}^N \delta X_i \lambda_i(u,v) d\sigma(u,v) \\ &= - \sum_{i=1}^N \int \int_{u,v} \eta(u,v) \bar{n}(u,v) \delta X_i \lambda_i(u,v) d\sigma(u,v) \end{aligned}$$

5

De façon avantageuse, la position d'un sommet X_i à la $k^{\text{ième}}$ itération s'écrit :

$$X_i^{k+1} = X_i^k - \gamma_k \frac{\partial \delta d}{\partial X_i}$$

avec la dérivée partielle de la distance pour un sommet X_i :

$$\frac{\partial \delta d}{\partial X_i} = - \int \int_{u,v \in \text{Supp}(\lambda_i)} \eta(u,v) \bar{n}(u,v) \lambda_i(u,v) d\sigma(u,v)$$

10

Avantageusement, le procédé de l'invention met en œuvre un codage progressif dudit maillage simplifié, par décimation et optimisation locale. Ainsi, ledit maillage simplifié est, de façon avantageuse, représenté par un maillage de base et une séquence de raffinements dudit maillage de base.

De façon avantageuse, le calcul du gradient à la $k^{\text{ième}}$ itération comprend les étapes suivantes :

15

- discrétisation de l'expression de la dérivée partielle de la distance pour chaque sommet X_i , sous la forme :

$$\frac{\partial \delta d}{\partial X_i} = - \sum_{\tau \in S_i} \sum_{j=1}^{N_\tau} \sum_{l=1}^{M_\tau} \eta(i_\tau, j_\tau) \bar{n}(i_\tau, j_\tau) \lambda_i(i_\tau, j_\tau) d\sigma(i_\tau, j_\tau)$$

20

avec : - S l'ensemble des triangles voisins du sommet X_i ;
- N_τ le nombre de points échantillonnés dans la direction de u ;
- M_τ le nombre de points échantillonnés dans la direction de v ;
- calcul de l'orientation des surfaces, par identification de la plus proche intersection avec le maillage source M .

Selon un aspect préférentiel de l'invention, l'orientation relative des surfaces audit maillage source et dudit maillage simplifié est calculée selon l'équation :

$$\eta(u,v) = - \langle \vec{n}_{M'}, \vec{n}_M \rangle \cdot \langle \vec{n}_{M'}, \overline{X_j X_M} \rangle$$

- 5 avec : X_j le point échantillonné sur M' ;
 X_M le point d'intersection de la droite passant par X_j et de direction \vec{n} avec le maillage source M ;
 \vec{n}_M la normale au maillage source M au point X_M ;
 $\vec{n}_{M'}$ la normale au maillage source M' au point X_j ;
10 ($\overline{X_j X_M}$ représente un vecteur).

Selon un autre aspect avantageux de l'invention, le procédé comprend une étape de limitation de la dégradation due à une transformation élémentaire, mettant en œuvre une queue de priorité sur les transformations élémentaires.

15 Préférentiellement, ladite étape de limitation de la dégradation due à une transformation élémentaire comprend les étapes de :

- calcul d'un coût pour chaque transformation élémentaire possible ;
- réalisation de la transformation élémentaire de moindre coût ;
- recalcul des coûts des transformations élémentaires modifiées par la transformation élémentaire précédente ;
- 20 - ajout des nouvelles transformations élémentaires créées et calcul des coûts correspondants.

Le coût d'une transformation élémentaire (T_i) peut par exemple s'exprimer par :

$$C(T_i(X_i, X_j)) = \max d_2(V_M, F(X_i^f))$$

- 25 avec : T_i transformation fusionnant deux sommets X_i et X_j dudit maillage simplifié M' ;
 X_i^f le sommet dudit maillage simplifié M' résultant de ladite transformation ;
 $F(X_i^f)$ les faces dudit maillage simplifié M' avoisinant le
30 sommet X_i^f après ladite transformation ;

V_M ensemble des sommets dudit maillage source M appartenant aux faces ayant été intersectées lors du calcul de l'orientation des surfaces pendant ladite minimisation.

Le procédé de l'invention peut s'appliquer à de très nombreux domaines techniques, et en particulier à au moins un des domaines appartenant au groupe comprenant :

- la réalité virtuelle ;
- la simulation scientifique ;
- la modélisation.

10 5. liste des figures

D'autres caractéristiques et avantages de l'invention apparaîtront plus clairement à la lecture de la description suivante d'un mode de réalisation préférentiel de l'invention, donnée à titre de simples exemples illustratifs et non limitatifs, et des dessins annexés parmi lesquels :

- 15 - la figure 1 illustre le principe d'une fusion d'arête ;
- la figure 2 illustre le principe de la queue de priorité combinant la courbure et la dynamique géométrique définies localement, selon l'invention ;
- la figure 3 illustre le dénombrement des arêtes vives autour d'un
20 sommet du maillage ;
- la figure 4 présente le principe de la pseudo optimisation entre fusion d'arêtes, selon l'invention.
- la figure 5 illustre le principe, consistant à minimiser le volume entre deux surfaces ;
- 25 - les figures 6 à 11 sont discutées en annexe 2, décrivant les aspects mathématiques de l'invention, et illustrent respectivement :
 - figure 6 : variation élémentaire du maillage ;
 - figure 7 : variation élémentaire du maillage dans la direction de la normale ;
 - 30 - figure 8 : système de coordonnées sur un triangle ;

- figure 9 : fonction de forme ;
- figures 10 et 11 : exemples d'évolutions de surface sur deux courbes en deux dimensions ;
- 5 - la figure 12 illustre la mise à jour des adjacences de face après fusion d'une arête adjacente à deux faces ;
- la figure 13 illustre la mise à jour des adjacences de face après fusion d'une arête adjacente à une face ;
- la figure 14 illustre l'échantillonnage sur un triangle pour l'intégration numérique ;
- 10 - la figure 15 explique le principe de l'orientation relative des surfaces, de façon à éviter la formation de plis sur la surface lorsque la position initiale est trop éloignée de l'optimum ;
- la figure 16 illustre le coût d'une transformation élémentaire ;
- la figure 17 est un synoptique de l'approximation de maillages selon l'invention ;
- 15 - la figure 18 est un synoptique de l'optimisation d'un sommet X_i ;
- les figures 19 à 22 illustrent le comportement du procédé de l'invention, sur un parallépipède rectangle, après décimation sur un coin (figure 19), une arête vive régulière (figures 20 et 21) et un plan (figure 22) ;
- 20 - la figure 23 illustre les différentes (12) itérations effectuées sur un exemple simple, selon l'invention ;
- les figures 24 à 27 sont discutées en annexe 1, présentant la technique connue du codage progressif de maillages, et illustrent respectivement :
25
 - figure 24 (également commentée par la suite) : transformation élémentaire (fusion d'arête) ;
 - figure 25 : solutions initiales ;
 - figure 26 : mise à jour des transformations dans le voisinage affecté par la dernière modification ;
- 30

- figure 27 : ajout des transformations nouvellement créées.

6. principe général d'une mise en œuvre de l'invention

6.0 Introduction

5 Selon l'aspect principal de l'invention, on prévoit une étape d'optimisation de la position des sommets (§ 6.2), qui s'inscrit dans le cadre d'une fusion d'arête, choisie par exemple selon la technique décrite au § 6.1. Cela peut ensuite être mis en œuvre dans le cadre des procédés des § 6.3 et 6.4.

6.1. Simplification géométrique

10 Ainsi qu'indiqué précédemment, l'invention concerne notamment une nouvelle technique de simplification d'un maillage 3D, reposant sur la mise en œuvre d'une queue de priorité combinant la courbure locale et la dynamique géométrique locale. Cette technique présente notamment l'avantage de conserver jusqu'à un niveau élevé de décimation, les singularités sur les maillages. Elle possède de plus une vitesse d'exécution intéressante.

15 Selon un aspect de l'invention, on construit une queue de priorité gérant l'opérateur topologique de fusion d'arêtes. Cette queue de priorité combine les critères de courbure locale et de dynamique géométrique locale, afin d'exploiter au mieux le degré de liberté donné par l'ordre des transformations à réaliser sur le maillage.

20 La simplification d'un maillage M consiste à construire un maillage M' de complexité géométrique réduite, qui conserve une faible déviation géométrique avec M.

25 L'algorithme de simplification géométrique doit permettre de spécifier une résolution géométrique au sommet prêt. Pour cela, on choisit un opérateur topologique élémentaire de simplification présentant de bonnes propriétés : conservation de la topologie dans une certaine mesure de décimation, et absence de création de trous sur les surfaces, et conservation des orientations.

Cet opérateur topologique élémentaire est la fusion d'arêtes, tel que défini par exemple par HOPPE (document déjà cité) qui est illustré en figure 1.

La fusion d'arêtes 10 consiste à fusionner les deux sommets adjacents 11 et 12 en un sommet 13, à supprimer les deux faces 14 et 15 et à positionner le sommet 13 résultant de la fusion. On notera que cette transformation est réversible (possibilité d'insertion 16 d'un sommet).

5 Chaque transformation élémentaire décime le maillage approximant M' . La qualité de l'approximation se dégrade donc au cours de la décimation, ou reste au mieux invariante. Afin de limiter les dégradations apportées au maillage, on souhaite bien sûr effectuer tout d'abord les transformations affectant le moins possible le modèle.

10 Pour cela, on définit une queue de priorité contenant toutes les transformations réalisables sur le maillage (soit approximativement le nombre d'arêtes). Durant la décimation, la transformation de moindre coût de la queue de priorité est réalisée, puis supprimée de la queue. Le coût dans le voisinage modifié par l'opération précédente est alors recalculé, et les nouvelles transformations
15 potentielles sur le maillage sont insérées dans la queue de priorité, après en avoir calculé le coût.

Les singularités géométriques, qui sont des parties très informatives, doivent être conservées le plus longtemps possible pendant la décimation. En particulier, les régions de forte courbure apparaissent comme très informatives. En
20 conséquence, le premier critère de tri sur les transformations élémentaires est donc lié à la courbure locale autour de l'arête à fusionner.

On appelle courbure $C(X_i)$ autour d'un sommet X_i l'angle maximal entre les normales à deux faces adjacentes autour du sommet X_i . On appelle ensuite courbure autour d'une arête (repérée par deux sommets X_i et X_j) la moyenne de
25 ces critères évaluée en chaque sommet.

Un second critère basé sur la longueur de l'arête à fusionner, permettant de réduire la densité géométrique du maillage et d'obtenir un bon rapport d'aspect sur les triangles résultants, est mis en œuvre.

30 On peut également utiliser une formule usuelle représentative de la compacité. Cependant, la longueur de l'arête à fusionner présente les avantages :

- de fournir un maillage de densité uniforme dans les régions de courbure voisine ;
- de conserver une bonne compacité des triangles, puisque ce critère tend à créer des triangles équilatéraux ;
- 5 - de présenter un faible coût de calcul.

En d'autres termes, la queue de priorité selon l'invention repose simultanément sur la prise en compte des deux aspects suivants :

- un petit triangle n'est intéressant que dans une région hautement informative (soit une région de forte courbure) ;
- 10 - il est souhaitable de réduire la densité d'un maillage afin d'en réduire sa complexité.

Les deux critères pris en compte selon l'invention sont combinés de manière à obtenir le comportement illustré par la figure 2. Cette figure est une échelle de la courbure, graduée de 0 à π , en radians.

- 15 Sur les régions de faible courbure 21, inférieures au premier seuil 22, la densité est réduite, et la compacité obtenue est raisonnable, puisque les arêtes de longueur minimale sont fusionnées.

Le seuil définissant une faible courbure est ensuite augmenté (23), lorsqu'il n'y a plus de transformation possible sur le segment de faible courbure 21.

- 20 Ainsi, sur les niveaux de décimation les plus faibles, la contrainte de courbure est automatiquement relâchée, afin d'atteindre la complexité géométrique fixée.

- La queue de priorité possède donc deux niveaux de contrainte, organisés suivant une hiérarchie : la courbure en est le critère prioritaire, et la densité en est le critère secondaire.
- 25

6.2 Pseudo-optimisation

Après une opération de fusion d'arêtes, on s'autorise, selon l'aspect essentiel de l'invention, à placer le sommet résultant de la fusion sur la position de l'optimum probable.

Pour cela, on introduit la notion d'arête vive : une arête est vive lorsque l'angle formé par les normales aux deux faces adjacentes est supérieur à un seuil fixé paramétrable. On dénombre ensuite le nombre d'arêtes vives autour des sommets de l'arête à fusionner, ainsi que cela est illustré en figure 3. Le sommet 5 31 n'est associé à aucune arête vive, le sommet 32 à deux arêtes vives et le sommet 33 à trois arêtes vives.

On déduit de ce dénombrement deux cas pour l'initialisation, ainsi que cela est illustré en figure 4 :

- 10 - si les nombres d'arêtes vives autour de X_a et autour de X_b sont identiques, on effectue l'initialisation au milieu du segment formant l'arête à fusionner. Sur les zones planes de faible courbure, cela permet de conserver une bonne compacité sur les triangles voisins. Sur une arête vive régulière (nombres d'arêtes vives égaux à 2), cela permet de positionner le sommet proche de l'arête vive 15 qui sera conservé au cours de l'optimisation ;
- si les nombres d'arêtes vives autour de X_a et autour X_b sont différents, l'initialisation est effectuée sur le sommet présentant le plus grand nombre d'arêtes vives. Dans les cas les plus courants, l'optimum est atteint à partir de cette position initiale.

20 Dans l'exemple de la figure 4, dans lequel le maillage source correspond à un parallélépipède 41, on constate que cette heuristique place le sommet :

- sur le coin du parallélépipède lorsque l'arête à fusionner forme un coin 43 ;
- et sur l'arête vive régulière du parallélépipède lorsque l'arête 25 commence sur la région plane et se termine sur l'arête vive 45.

Les situations où le nombre d'arêtes vives est le même autour des deux sommets sont illustrés en 42 et 44.

6.3 *Applications*

30 Comme indiqué précédemment, la technique de simplification de l'invention peut être mise en œuvre seule, pour offrir une technique

d'approximation de maillage, ou comme une étape d'initialisation d'une procédure plus complète d'optimisation géométrique, telle que par exemple celle décrite ci-après.

6.3.1 *structure*

5 L'invention peut être mis en œuvre dans une méthode d'approximation de maillage mettant en œuvre une métrique basée volume. Un des avantages de cette métrique est qu'elle prend naturellement en compte les caractéristiques importantes à conserver (les singularités), sans devoir recourir à la détection de cas particuliers.

10 D'une façon générale, l'approximation de maillages génère un modèle polygonal géométriquement plus simple que le modèle original. Le nombre de polygones nécessaire à la représentation est ainsi réduit, tout en conservant la meilleure approximation, au sens perceptuel, du modèle original.

15 Le problème correspondant peut être formulé par une approche variationnelle permettant d'approximer un maillage M par un maillage M' (ou \hat{M}) comprenant un nombre réduit de triangles. Elle autorise le déplacement des sommets en optimisant leurs positions au sens d'un ou plusieurs critères définis par le biais d'une fonctionnelle d'énergie à minimiser.

20 L'approximation d'un maillage génère un modèle géométriquement plus simple que le modèle original. Le nombre de polygones nécessaires à la représentation est ainsi réduit tout en conservant la meilleure approximation (au sens perceptuel) du modèle original. La qualité de l'approximation définit le niveau de ressemblance perceptuelle pour une complexité géométrique fixée. L'invention utilise une métrique basée volume entre "le maillage approximant" et
25 le "maillage approximé".

Le principe de l'algorithme est scindé en deux parties : la décimation et l'optimisation des positions.

L'opération élémentaire de décimation choisie est la fusion d'arête, décrite précédemment. L'algorithme d'optimisation choisi est un algorithme itératif de

gradient à pas adaptatif afin de minimiser itérativement le volume compris entre le modèle et le maillage original.

En combinant décimation et optimisation, on peut générer soit un maillage sous forme progressive, soit des niveaux de résolution distincts.

5

6.3.2 *décimation*

Afin de simplifier la géométrie d'un maillage, il convient de décimer itérativement le maillage tout en conservant une bonne topologie. On choisit donc une transformation élémentaire : la fusion d'arête, qui fusionne deux sommets adjacents en un sommet, supprime deux faces et place le nouveau sommet résultant de la fusion, suivant le principe décrit précédemment.

10

Cette décimation peut être réalisée alternativement ou successivement avec une optimisation (telle que décrite précédemment) des positions d'un ou de plusieurs sommets suivant l'application visée. On peut construire plusieurs niveaux de résolution d'un maillage en utilisant cette transformation élémentaire, et la granularité minimale est obtenue par une décimation puisque le maillage est alors défini au sommet près. On procède alors en alternant décimation locale et optimisation locale du sommet résultant de la fusion.

15

Inversement, on peut définir des niveaux de résolutions de manière générale en décimant au préalable un ensemble de sommets puis en optimisant globalement les positions des sommets du maillage.

20

La décimation successive permet de construire des maillages progressifs. Dans ce cas, il convient de choisir judicieusement l'ordre de réalisation des transformations. Cet ordre est défini par le biais d'une queue de priorité sur les transformations élémentaires de manière à effectuer en premier les transformations affectant le moins possible le modèle original.

25

Cela amène à définir la notion de coût pour chaque opération élémentaire et la queue de priorité sera triée par ce dernier. Ainsi initialement, toutes les transformations possibles sont listées, le coût de chacune d'elles est calculé (sans effectuer de modifications sur le maillage), on réalise la transformation de

moindre coût, et on recalcule les coûts des transformations élémentaires modifiées par la transformation précédente.

Bien sûr, d'autres techniques que la décimation peuvent être utilisées pour obtenir le maillage approché, ou approximé, tel que des techniques de sous-échantillonnage, de subdivisions adaptatives, etc...

6.3.3 optimisation basée sur le volume

Le problème de l'optimisation consiste donc à minimiser une fonctionnelle d'erreur définie par :

$$E(M, M') = d(M, M')$$

où $d(M, M')$ caractérise une distance entre les deux maillages M et M' , et garantit la fidélité aux données initiales. L'algorithme d'optimisation est choisi notamment pour ses performances en terme de vitesse et/ou de pertinence de la solution finale.

On explique ci-dessous le contexte théorique de la métrique basée volume utilisée pour caractériser l'erreur d'approximation entre deux maillages, ainsi que la formulation variationnelle permettant l'optimisation de la qualité de l'approximation, selon l'invention.

6.3.3.1 métrique

Un exemple de mesure de l'erreur, ou distance, entre les maillages M et M' est illustrée en figure 5. La mesure de l'erreur est donnée par le volume V , compris entre les deux surfaces formées par les maillages M et M' .

Ce volume est défini par l'intégrale de Lebesgue suivante :

$$V(M, M') = \int_{\mathbf{R}^3} I_V(M', M)(\vec{q}) d^3 \vec{q}$$

avec $I_V(\vec{q})$ la fonction indicatrice de l'intérieur du volume et \vec{q} un point générique de \mathbf{R}^3 .

6.3.3.2 fonctionnelle

Un maillage étant défini partiellement par les positions de ses sommets, on peut formuler le problème de la minimisation du volume par le biais d'une fonctionnelle d'énergie à minimiser, cette fonctionnelle étant définie par :

$$E = E_{\text{error}} = d(M, M') = d(M, M', X_1, \dots, X_n)$$

L'algorithme d'optimisation mis en œuvre consiste alors à déterminer les positions optimales des sommets X_1, X_2, \dots, X_n qui minimisent la distance $d(M', M)$.

5 6.3.3.3 variation élémentaire de volume

L'évolution élémentaire du maillage M' est définie par le champ de vecteurs $\delta \vec{M}'$. Une expression de la variation élémentaire du volume est décrite en annexe 2 (§ 2).

6.3.3.4 mise en œuvre du gradient adaptatif

10 La technique d'optimisation utilisée pour résoudre le problème de la minimisation peut avantageusement reposer sur une approche itérative, tel que le gradient adaptatif. L'annexe 2 (§ 1) décrit en détail la mise en œuvre de cette technique du gradient adaptatif, ainsi que le calcul d'une variation élémentaire de volume permettant la détermination du gradient à chaque itération, et le
15 paramétrage du maillage par un modèle d'éléments finis triangulaires.

Un modèle d'éléments finis triangulaires permettant de calculer le gradient en chaque sommet est décrit en annexe 2 (§ 3).

L'algorithme du gradient pour un sommet X_i s'écrit sous la forme :

$$X_i^{k+1} = X_i^k - \gamma_k \frac{\partial \delta d}{\partial X_i}$$

20 L'expression de la dérivée partielle de la distance pour un sommet X_i est :

$$\frac{\partial \delta d}{\partial X_i} = - \int \int_{u,v \in \text{Supp}(\lambda_i)} \eta(u,v) \vec{n}(u,v) \lambda_i(u,v) d\sigma(u,v)$$

Le support de la fonction de forme est défini par les triangles voisins du sommet X_i . L'intégrale est calculée par le biais d'une discrétisation sur les triangles (décrite par la suite) et une heuristique a été adoptée pour déterminer
25 l'orientation relative des surfaces formées par M et M' (également décrite par la suite).

A chaque itération du gradient, on applique un déplacement sur le sommet X_i qui tend à minimiser le volume entre les surfaces. Le déplacement est la

somme des contributions liées aux calculs d'orientation en plusieurs points de chaque triangle.

Le pas γ_i est adaptatif. Au départ il est initialisé à γ_0 (une fraction de la longueur de l'arête fusionnée), puis il est multiplié par k (avec $k < 1$), en présence

5 d'une oscillation (c'est-à-dire lorsque deux vecteurs de déplacement successifs sont de directions opposées : $\left\langle \frac{\partial \delta d^{k+1}}{\partial X_i}, \frac{\partial \delta d^k}{\partial X_i} \right\rangle < 0$).

Ce pas γ_i est borné (borne inférieure γ_{\min}), afin de conserver la convergence de l'algorithme. On a $\gamma_i \in]\delta, 2\lambda - \delta]$, avec $0 < \delta < \lambda$ et $\|HE(\lambda)\| \leq 1/\lambda_0$ (où HE représente le Hessien de E).

10 On considère la convergence atteinte lorsque le déplacement du sommet X_i d'une itération à l'autre est inférieure à ε (ε étant une fraction de la dynamique locale des arêtes du maillage). Le nombre d'itérations de l'algorithme peut également être borné.

6.3.4. description d'un mode de réalisation détaillé

15 Le procédé de l'invention permettant de générer des approximations de maillages à différents niveaux de résolution, un codage progressif de maillages par décimation et optimisation locale peut être mis en œuvre.

Dans cette optique, on définit une transformation élémentaire de décimation adaptée au codage progressif, une méthode d'optimisation locale et

20 une queue de priorité sur les transformations afin de maximiser le ratio quantité d'informations/qualité visuelle à chaque itération de l'algorithme. On décrit par la suite la mise en œuvre de cet algorithme, et notamment le calcul du gradient défini sur un sommet du maillage.

6.3.4.1 transformation élémentaire

25 Le codage progressif permet de définir la notion d'échelonnabilité sur un maillage. L'échelonnabilité maximale est obtenue lorsque la résolution du maillage peut être choisi au sommet près. Un maillage peut ainsi être codé sous la forme d'un maillage de base (à une résolution visuellement acceptable) et d'une séquence de raffinements.

Afin d'obtenir une telle structure de données, il convient de décimer itérativement le maillage, d'optimiser localement les positions des sommets de manière à approximer localement au mieux le maillage initial, et d'enregistrer simultanément la séquence de décimation afin de coder le maillage dans le sens des raffinements.

On choisit donc une transformation élémentaire réversible, par exemple la fusion d'arêtes définie par HOPPE (document déjà cité), qui est illustrée en figure 1. La fusion d'arête 10 consiste à fusionner les deux sommets adjacents 11 et 12 en un sommet 13, à supprimer les deux faces 14 et 15 et à optimiser la position du sommet 13 résultant de la fusion.

Cette transformation est réversible (insertion 16 d'un sommet).

Après transformation, les adjacences doivent être mises à jour. Pour cela, on considère une structure de type faces/sommets et une adjacence définissant toute les relations entre les éléments. Les faces stockent des liens vers leurs faces voisines, et chaque sommet liste les faces qui le contiennent et les sommets voisins. Les figures 12 et 13 illustrent la mise à jour des adjacences de faces après fusion d'une arête adjacente à deux faces (figure 12) ou à une face (figure 13).

La décimation est ainsi naturellement prise en compte sur toutes les zones du maillage, sans qu'il soit nécessaire de détecter les cas particuliers, telles que les arêtes adjacentes à une seule face.

6.3.4.2 initialisation

L'optimisation agit sur la position du sommet résultant de la fusion de l'arête formée par les sommets X_a et X_b . Afin de débiter l'algorithme d'optimisation avec une bonne condition initiale, on choisit de positionner le sommet le plus proche de l'optimum probable. Pour cela, on introduit la notion d'arête vive : une arête est vive lorsque l'angle formé par les normales aux deux faces adjacentes est supérieur à un seuil fixé paramétrable. On dénombre ensuite le nombre d'arêtes vives autour des sommets de l'arête à fusionner, selon l'approche déjà discutée.

6.3.4.3 optimisation

On rappelle que l'expression de la fonctionnelle considérée :

$$E = E_{\text{error}} = d(M, M')$$

Cette fonctionnelle est minimisée en optimisant la position du sommet X_i par un algorithme de gradient :

$$X_i^{k+1} = X_i^k - \gamma_i \frac{\partial \delta d^k}{\partial X_i}$$

Les déterminations du pas γ_i et des critères d'arrêt sont discutées au §-6.3.3.4.

6.3.4.4 discrétisation

Le calcul du gradient nécessite donc une discrétisation de l'intégrale :

$$\frac{\partial \delta d}{\partial X_i} = - \int \int_{u,v \in \text{Supp}(\lambda_i)} \eta(u,v) \bar{n}(u,v) \lambda_i(u,v) d\sigma(u,v)$$

Sur le support de la fonction de forme définie sur X_i .

On est donc amené à échantillonner la surface des triangles, avant d'évaluer en chaque point $X(x,y,z)$ la valeur de la fonction de forme $\lambda_i(x, y, z)$ et l'orientation des surfaces $\eta(u,v)$.

Le gradient s'exprime donc sous la forme discrète suivante :

$$\frac{\partial \delta d}{\partial X_i} = - \sum_{\tau \in S} \sum_{i_\tau=1}^{N_\tau} \sum_{j_\tau=1}^{M_\tau} \eta(i_\tau, j_\tau) \bar{n}(i_\tau, j_\tau) \lambda_i(i_\tau, j_\tau) d\sigma(i_\tau, j_\tau)$$

- avec : - S l'ensemble des triangles voisins du sommet X_i ;
- N_τ le nombre de points échantillonnés dans la direction de u ;
- M_τ le nombre de points échantillonnés dans la direction de v .

Pour un triangle donné, l'échantillonnage est effectué dans le plan passant par ses sommets, le nombre de points étant proportionnel à la surface du triangle, ainsi que cela est illustré en figure 14.

Le repère d'échantillonnage est formé par l'arête 161 de plus grande longueur et la hauteur 162 du triangle courant. Soit n le nombre minimum de points par triangles fixés à l'avance, S_{\min} l'aire minimale des triangles voisins de X_i et h le pas d'échantillonnage. On déduit h par la formule suivante :

$$n \times h^2 = S_{\min}$$

La fonction de forme est évaluée par un rapport de surfaces tel que décrit en annexe 2.

6.3.4.5 orientation des surfaces

L'orientation relative de deux surfaces définie en trois dimensions est délicate à définir avec exactitude. On utilise avantageusement une heuristique pour calculer l'orientation des deux surfaces M et M' (c'est-à-dire le terme $\eta(u,v)$ de l'équation du gradient présenté ci-dessus) :

$$\eta(u,v) = - \langle \vec{n}_{M'}, \vec{n}_M \rangle \cdot \langle \vec{n}_{M'}, \overline{X_j X_M} \rangle$$

avec : X_j le point échantillonné sur M' ;
 10 X_M le point d'intersection de la droite passant par X_j et de direction $\vec{n}_{M'}$ avec le maillage source M ;
 \vec{n}_M la normale au maillage source M au point X_M ;
 $\vec{n}_{M'}$ la normale au maillage source M' au point X_j .

où $\langle \rangle$ représente le produit scalaire.

15 La figure 15 illustre ce calcul de l'orientation en deux dimensions. En trois dimensions, il suffit de remplacer les segments par des triangles. Cette heuristique limite fortement la formation de plis sur la surface, puisque le terme $\langle \vec{n}_{M'}, \vec{n}_M \rangle$ traduit l'opposition des normales lorsqu'elles sont de sens opposés.

6.3.4.6 priorités sur les transformations

20 Chaque transformation élémentaire décime le maillage approximant M'. La qualité de l'approximation se dégrade donc au cours de la décimation, ou reste au mieux invariante lorsque le volume reste inchangé, et ce malgré l'optimisation des points.

25 Par exemple, si l'on considère une sphère, on sait qu'elle nécessite en théorie une infinité de triangles pour être parfaitement modélisée. Dès lors que l'on restreint le nombre de triangles, on dégrade la qualité de son approximation. En revanche, sur des régions planes d'un objet, on peut décimer jusqu'à l'obtention d'un maillage optimal (ainsi, sur un parallélépipède, l'optimum est atteint lorsque chaque face est décrite par deux triangles).

On souhaite coder progressivement les maillages, et donc retirer itérativement les sommets par une opération de fusion d'arêtes. Après l'optimisation des positions, un autre processus est donc développé, consistant à définir une priorité sur les transformations élémentaires, de manière à effectuer en premier les transformations affectant le moins possible le modèle.

Pour cela, on définit la notion de coût pour chaque opération élémentaire, et une queue de priorité triée selon ce coût.

Ainsi, initialement, toutes les transformations possibles sont listées puis le coût de chacune d'elles est calculé (sans effectuer les modifications correspondantes sur le maillage). On réalise la transformation de moindre coût, puis on recalcule les coûts des transformations élémentaires modifiées par la transformation précédente. On rappelle que la fusion d'arête supprime deux faces soit en conséquence, les transformations concernant ces faces sont retirées de la queue de priorité, ce qui crée une ou deux nouvelles transformations, pour lesquelles on calcule également le coût en énergie, déduit de la technique décrite en annexe 2, et qui représente la variation de volume entre le maillage avant et après transformation.

Le calcul direct du volume entre deux surfaces triangulées étant complexe à calculer, on fait appel à une heuristique permettant de simplifier ce problème.

Soient :

- T_i la transformation fusionnante de sommet X_i et X_j de M' ;
- X_i^f le sommet de M' résultant de la fusion (dont on a optimisé la position) ;
- $F(X_i^f)$ les faces de M' avoisinant le sommet X_i^f après transformation ;
- V_M l'ensemble des sommets de M appartenant aux faces ayant été intersectées lors du calcul de l'orientation des surfaces pendant l'optimisation.

Le coût d'une transformation élémentaire T_i s'exprime alors sous la forme:

$$C(T_i(X_i, X_j)) = \max_{d_2}(V_M, F(X_i^f))$$

Ce coût correspond donc à la distance maximale des sommets du maillage original (sous les faces avoisinant le sommet X_i) aux faces avoisinant X_i après transformation. La figure 16 illustre, en deux dimensions, l'expression du coût dans le cas d'une décimation sur une discontinuité. Comme indiqué
5 précédemment, en trois dimensions les segments sont remplacés par des triangles. La transformation 181 consiste à fusionner les sommets X_i et X_j en un sommet X_i' . Les sommets 182₁ à 182₄ correspondent à l'ensemble V_M .

On peut constater que sur un plan maillé, le coût d'une transformation serait nul, les zones comportant une information redondante étant décimées en
10 priorité.

On présente maintenant des exemples de synoptique pour la mise en œuvre des différents aspects discutés précédemment.

6.3.4.7 synoptiques

- approximation de maillages

15 La figure 18 résume l'algorithme d'approximation d'un maillage M comportant n faces par un maillage M' comportant m faces (avec bien sûr $m < n$).

On commence tout d'abord par copier le maillage source M , ou maillage original, dans la variable M' , représentant le maillage simplifié que l'on cherche à déterminer (191). Sur ce maillage M' , on effectue ensuite une recherche de toutes
20 les transformations élémentaires réalisables (192), puis un calcul (193) des coûts énergétiques de ces transformations après optimisation.

On sélectionne et on réalise (194) la transformation de moindre coût parmi l'ensemble des transformations possibles. Il s'agit de l'étape de décimation.

Puis, on met à jour (195) les coûts énergétiques des transformations, dans
25 le voisinage affecté par la transformation effectuée à l'étape 194. Enfin, on ajoute (196) les nouvelles transformations induites par la transformation effectuée 194, et on calcule les coûts correspondants.

Les trois étapes 194, 195 et 196 sont réitérées (197) $n - m$ fois, jusqu'à ce qu'au moins un des critères d'arrêt soit atteint.

30

- optimisation en position

La figure 20 illustre l'optimisation du sommet X_i , après fusion de l'arête (X_i, X_j) .

On définit au préalable les paramètres d'initialisation suivants, partiellement en fonction de la dynamique de la géométrie locale autour du
5 sommet X_i :

- Epsilon est un critère d'arrêt de la convergence, fraction de la longueur moyenne des arêtes autour du sommet X_i (typiquement 0,001) ;
- MaxIter est la borne supérieure du nombre d'itérations, fixée arbitrairement (typiquement 200 itérations) ;
- 10 - StepInit, StepDec et StepMin sont respectivement la valeur d'initialisation, le taux de décroissance et la borne inférieure du pas. StepInit et StepMin sont des fractions de la longueur de l'arête à fusionner (typiquement 0,1 et 0,01), StepDec est fixé arbitrairement (typiquement 0,95) ;
- 15 - StepSampling est le pas d'échantillonnage sur les triangles, utilisé pour le calcul discret de l'intégrale formant le gradient à chaque itération. Il est déduit des aires des faces voisines du sommet X.
- NbSharpEdges(X) est le nombre d'arêtes vives autour du sommet X.

L'algorithme débute par une étape 201 d'initialisation en position, qui
20 consiste à effectuer les opérations suivantes :

```

Si      (NbSharpEdge( $X_i$ ) = NbSharpEdge( $X_j$ ))
Alors
        initialiser au milieu de l'arête à fusionner,
sinon
25        initialiser sur le sommet du plus grand nombre d'arêtes vives.

```

On réalise ensuite le calcul 202 du gradient, avec les opérations de discrétisation sur les triangles et d'orientation des surfaces. Puis, on effectue le déplacement 203. Le sommet se déplace de la valeur du vecteur gradient multiplié par le pas courant.

On contrôle ensuite l'évolution 204 du pas. Si une oscillation est détectée avec le vecteur gradient précédent, le pas est multiplié par StepDec. Si le pas est inférieur à StepMin, il est réinitialisé à StepMin.

5 Enfin, on effectue un test de convergence 205. Si la distance entre la position courante et la position précédente est inférieure à Epsilon, ou si le nombre d'itérations MaxIter est atteint, l'algorithme est arrêté (206). Sinon, on répète (207) les étapes 202 à 205.

6.4.3.8 résultats

10 On montre maintenant, à partir d'un exemple simple (un parallélépipède), le comportement du procédé d'approximation de maillages selon l'invention. L'intérêt du parallélépipède est de permettre de vérifier la qualité de l'approximation sur les discontinuités (arêtes vives régulières et coins) et sur les plans.

15 Sur un tel objet, l'optimum est atteint lorsque l'on obtient chaque face maillée par deux triangles et que la forme globale de l'objet est parfaitement conservée.

20 La figure 19 illustre le cas d'une décimation sur un coin 211 du parallélépipède. La solution initiale a été placée sur le coin 211, puisque le nombre d'arêtes vives est maximal en ce sommet (trois autour du coin 211 et deux autour de l'arête vive régulière de l'objet (sommet 212)). L'algorithme d'optimisation oscille, puis converge autour de cette position initiale 213, puisque le pas de gradient a été initialisé à une valeur non nulle, puis a diminué dès que l'oscillation a été détectée.

25 La figure 20 présente une décimation sur une arête vive régulière. La solution initiale a été placée au milieu de l'arête 223, puisque le nombre d'arêtes vives est identique (deux autour de chaque sommet 221 et 222). Plusieurs solutions situées sur l'arête vive régulière de l'objet satisfont l'invariance de volume, et l'algorithme converge après oscillation autour de l'arête, sur une position dépendante de la solution initiale. Le milieu 224 de l'arête constitue donc
30 une bonne initialisation dans ce cas.

La figure 21 illustre une autre situation de décimation sur une arête vive régulière, dans laquelle la solution initiale a été placée sur l'arête vive 234, puisque les nombres d'arêtes vives sont différents (deux autour du sommet 233 situé sur l'arête, et aucune autour du sommet 232 situé sur la face plane 235 de l'objet). Plusieurs solutions situées sur l'arête vive régulière de l'objet satisfont l'invariance de volume, et l'algorithme converge après oscillation autour de l'arête 234, sur une position 236 dépendant de la solution initiale.

La figure 22 présente le cas d'une décimation sur un plan 243. La solution initiale a été placée au milieu de l'arête 245 formée par les sommets 241 et 242, puisque les nombres d'arêtes vives sont identiques (aucune autour de chaque sommet 241 et 242). Plusieurs sommets situés sur le plan de l'objet satisfont l'invariance de volume. L'algorithme converge, après oscillation, de part et d'autre du plan, sur une position dépendant de la solution initiale. Le milieu 244 de l'arête constitue donc, à nouveau une bonne initialisation dans cette situation.

Le procédé décime le maillage initial en utilisant une queue de priorité.

La figure 23 montre les douze itérations successives de l'algorithme, numérotées (b) à (m), à partir du maillage original numéroté (a).

On constate que les arêtes entraînant une invariance de volume sont décimées en priorité. L'optimum est atteint pour les sommets demandés sur cet objet, puisque chaque face est alors maillée par seulement deux triangles.

On remarque que les arêtes rejoignant deux coins de l'objet ne sont pas fusionnées, puisque cette opération aurait entraîné une forte dégradation de la qualité de l'approximation, les coûts et transformations élémentaires correspondantes étant supérieurs aux coûts d'une fusion d'arêtes sur un plan ou le long d'une arête vive régulière.

ANNEXE 1

5 Codage progressif de maillages

Hugues Hoppe a développé une méthode fonctionnant par décimation et optimisation des points. La décimation est réalisée par une transformation élémentaire réversible et facilement codable : la fusion d'arête qui rassemble deux sommets adjacents en un seul sommet, supprime deux faces et optimise ensuite la position du sommet résultant de la fusion (figure 24).

10 L'auteur a utilisé une approche variationnelle permettant la minimisation du processus, la fonctionnelle d'énergie associée est définie par un terme d'erreur et un terme de régularisation :

$$E = E_{error} + E_{regul}$$

Ce terme d'erreur caractérise la distance entre les deux maillages M et \hat{M} définie localement, et garantit la fidélité aux données initiales. Le terme de régularisation permet de respecter la topologie d'un maillage et d'assurer l'unicité de la solution. Afin d'initialiser le problème, une fois la face à supprimer déterminée, trois minimisations (partant de trois positions initiales différentes choisies de manière à initialiser correctement le processus d'optimisation) sont réalisées (figure 25) afin de retenir la solution correspondant au minimum d'énergie de la fonctionnelle.

15 Chaque transformation T_i supprimant un sommet de la triangulation et modifiant le maillage M_i en M_{i+1} , engendre une augmentation de l'énergie globale qui peut être calculée. Le coût en énergie résultant de cette décimation est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta E_{T_i} = E_{M_{i+1}} - E_{M_i} \\ \Delta E_{T_i} \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

20 Au départ toutes les transformations possibles sur le maillage sont listées, puis le coût énergétique pour chacune d'entre elles est calculé. Ces transformations sont rangées dans une queue de priorité triée suivant leur coût estimé. Au cours de l'algorithme, la transformation de coût minimum est effectuée, puis les coûts des transformations dans le voisinage affecté par cette modification sont mis à jour (figure 26). Les transformations nouvellement créées sont ajoutées et leur coût estimé est calculé (figure 27). L'algorithme agit donc de manière itérative et décime le maillage \hat{M} d'un sommet et de deux faces à chaque itération. Cette approche de décimation et d'optimisation est bien adaptée au contexte de codage progressif, puisqu'il suffit d'enregistrer la séquence des décimations dans le sens inverse (celui des raffinements)

25 pour coder un maillage sous une forme progressive. Ainsi un maillage M peut être représenté par un maillage à la résolution M_0 et par une séquence de raffinements $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\}$. L'erreur utilisée pour caractériser la distance entre les deux maillages est la distance euclidienne (ou quadratique) entre le point X_i à optimiser du maillage \hat{M} et le maillage M , qu'il convient de définir. Les points situés à une distance D de X_i dans \mathbb{R}^3 forment une sphère de rayon D :

$$d_2(X_i, M) = \min_{Y \in M} d_2(X_i, Y) = \min_{Y \in M} \|X_i - Y\|_2 \quad (2)$$

5

où

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N X_j^2 \right)^{1/2}, X \in \mathbb{R}^N \quad (3)$$

10 Le maillage M étant une surface triangulée, cela engendre une mesure de la distance entre un point X_i et un ensemble de triangles. On remarque d'après la définition de la distance L^2 dans \mathbb{R}^3 que le point de M situé à la distance minimale de X_i n'est pas toujours unique. Le choix effectif de ce point dépend de l'ordre d'insertion des points et de la nature du test lors de la recherche du minimum ($<$ ou \leq). La métrique L^2 appliquée sur les maillages devient la métrique D^2 puisque l'on raisonne avec une distance point-surface.

15

20

25

30

ANNEXE 2

Optimisation

- 5 La technique d'optimisation choisie pour résoudre notre problème de minimisation est une méthode itérative, appelée gradient adaptatif.

1 Gradient adaptatif

- 10 Notre objectif consiste donc à minimiser la fonctionnelle E décrite précédemment. Comme dans tous les cas, la stationnarité de E est une condition nécessaire d'optimalité, effectivement, pratiquement toutes les méthodes d'optimisation sans contraintes dans \mathbb{R}^N consistent à rechercher un vecteur X stationnaire ($\nabla E(X) = 0$). Ce problème est équivalent à la résolution du système d'équations non linéaires :

$$\frac{\partial E}{\partial X_i}(X) = 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (1)$$

- 15 On peut chercher à résoudre directement ce système, ce qui conduit à la méthode de Newton. Cependant, cette méthode peut ne pas converger, si le point de départ des itérations est trop éloigné de X. D'autre part, elle suppose la fonction deux fois continûment différentiable, et elle nécessite le calcul des dérivées secondes en chaque point.

C'est pourquoi les méthodes les plus couramment utilisées procèdent différemment : il s'agit de procédures itératives où l'on engendre une suite de vecteurs X^0, X^1, \dots convergeant vers un optimum local de E.

- 20 Ces méthodes de gradient constituent une famille de méthodes qui procèdent de la façon suivante : On part d'un point X^0 et on calcule le gradient $\nabla E(X^0)$ en X^0 de la fonction E à minimiser. Comme $\nabla E(X^0)$ indique la direction de la plus grande augmentation de E, on se déplace d'une quantité γ_0 dans la direction opposée au gradient, et on définit le point :

$$X^1 = X^0 - \gamma_0 \times \frac{\nabla E(X^0)}{\|\nabla E(X^0)\|} \quad (2)$$

La procédure est répétée et engendre les points $X^0, X^1, \dots, X^n, \dots$ suivant la relation :

- 25
$$X^{k+1} = X^k - \gamma_k \times \frac{\nabla E(X^k)}{\|\nabla E(X^k)\|} \quad (3)$$

Dans cette famille, il convient de signaler les méthodes de gradient à pas déterminé dans lesquelles on choisit à priori les valeurs de déplacements γ_k . L'inconvénient de cette procédure est que la convergence peut être très lente. Nous avons donc choisi d'utiliser la méthode de gradient à pas adaptatif, qui consiste à diminuer (resp. augmenter) le pas γ_k lorsque l'erreur augmente (resp. diminue), tout en conservant la contrainte de contrôle du

5 pas, soit : $\gamma_k \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}]$. Finalement, comme critère d'arrêt, nous nous sommes fixés que la différence entre deux erreurs successives devait être inférieure à un ϵ donné.

Au cours de la minimisation, les positions des sommets du maillage vont évoluer de manière à minimiser le volume entre les deux surfaces, cette évolution nécessite de calculer le gradient à l'itération k (le terme $\nabla E(X^k)$ de l'équation

2 Variation élémentaire de volume

10 Le processus d'optimisation est donc vu comme une évolution du maillage \hat{M} de manière à minimiser $V(M, \hat{M})$. L'évolution élémentaire du maillage est définie par le champ de vecteurs $\vec{\delta\hat{M}}$. En réalisant une paramétrisation de la surface par u et v , le vecteur $\vec{\delta\hat{M}}$ peut s'exprimer sous la forme $\vec{\delta\hat{M}}(u, v)$. Si on approxime localement la surface par son plan tangent la variation élémentaire de volume est alors le parallépipède généré par l'évolution de l'élément de surface $dudv$ dans la direction $\vec{\delta\hat{M}}(u, v)$ (figure 6).

On peut ainsi exprimer la variation élémentaire de volume induite par l'élément d'aire $dudv$:

$$15 \quad \delta V(M, \hat{M}, \vec{\delta\hat{M}}(u, v)) = \left| \left[\frac{\partial \vec{\hat{M}}(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\hat{M}}(u, v)}{\partial v} \right] \cdot \vec{\delta\hat{M}}(u, v) \right| \cdot dudv$$

La variation est négative lorsque le vecteur $\vec{\delta\hat{M}}$ est orienté vers l'intérieur du volume d'erreur. la figure 7 présente le cas particulier où l'évolution du maillage se fait dans la direction de la normale. Prenons maintenant en considération le fait que :

$$20 \quad \left[\frac{\partial \vec{\hat{M}}(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\hat{M}}(u, v)}{\partial v} \right] \cdot dudv = \vec{n}(u, v) d\sigma(u, v)$$

avec $\vec{n}(u, v)$ la normale unitaire en $\hat{M}(u, v)$ et $d\sigma(u, v) = \left\| \frac{\partial \vec{\hat{M}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\hat{M}}}{\partial v} \right\| \cdot dudv$ l'élément d'aire.

On exprime la variation de distance entre M et \hat{M} :

$$\delta d(M, \hat{M}, \vec{\delta\hat{M}}) = \int \int_{u, v} \left| \vec{n}(u, v) \vec{\delta\hat{M}}(u, v) \right| d\sigma(u, v)$$

25 Cette expression n'est pas facilement utilisable à cause de la valeur absolue. Nous introduisons maintenant la fonction : $\eta(u, v) = \eta(M, \hat{M}, \vec{n}(u, v)) = 1$ si la normale est orientée vers le volume intérieur et -1 sinon, nous obtenons alors

$$\left| \vec{n}(u, v) \vec{\delta\hat{M}}(u, v) \right| = \eta(u, v) \vec{n}(u, v) \vec{\delta\hat{M}}(u, v)$$

d'où

$$\delta d(M, \hat{M}, \vec{\delta\hat{M}}) = - \int \int_{u, v} \eta(u, v) \vec{n}(u, v) \vec{\delta\hat{M}}(u, v) d\sigma(u, v)$$

3 Modèle d'éléments finis triangulaires

5 Afin de calculer le gradient en chaque sommet du maillage à l'itération k de l'algorithme d'optimisation, on paramètre le maillage par un modèle d'éléments finis triangulaires \mathbb{P}^1 :

$$M(u, v) = \sum_{i=1}^N X_i \lambda_i(u, v) \quad (4)$$

10 X_i est un sommet du maillage défini dans \mathbb{R}^3 et $\lambda_i(u, v)$ est une fonction de forme adaptée à un modèle d'éléments finis triangulaires. On définit une fonction de forme sur le maillage par le biais de coordonnées barycentriques tel que cela est décrit dans le document "la méthode des éléments finis, formulation de base et problèmes linéaires", par O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor (afnor technique, 4ième édition, 1991). Pour cela on numérote les sommets du triangle (figure 8), et on définit un système de coordonnées λ_1 , λ_2 et λ_3 liées par les relations :

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3$$

$$y = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \lambda_3 \cdot y_3$$

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

15 Nous allons maintenant déterminer les valeurs des fonctions de base : au sommet 1, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$. Les lignes de niveau de λ_1 sont des lignes équidistantes parallèles au côté 2 - 3 le long duquel $\lambda_1 = 0$. On peut exprimer la coordonnée λ_1 en un point P par un rapport d'aires :

$$\lambda_1 = \frac{\text{aire}(P23)}{\text{aire}(123)} \quad (5)$$

On obtient :

$$20 \quad \lambda_1 = \frac{a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y}{2A}$$

$$\lambda_2 = \frac{a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y}{2A}$$

$$\lambda_3 = \frac{a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y}{2A}$$

Avec :

$$25 \quad A = \text{aire}(123) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

On calcule les valeurs a_2 , b_2 , c_2 , a_3 , b_3 , et c_3 par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3.

4 Evolution de surface

5 L'évolution du maillage peut ainsi s'écrire :

$$\delta d(M, \hat{M}, \delta \vec{X}_1, \delta \vec{X}_2, \dots, \delta \vec{X}_n) = - \sum_{i=1}^N \int \int_{u,v} \eta(u, v) \vec{n}(u, v) \delta \vec{X}_i \lambda_i(u, v) d\sigma(u, v)$$

on en déduit la dérivée partielle de la distance pour un sommet X_i :

10
$$\frac{\partial V}{\partial X_i} = - \int \int_{u,v \in \text{Supp}(\lambda_i)} \eta(u, v) \vec{n}(u, v) \lambda_i(u, v) d\sigma(u, v)$$

L'algorithme de gradient pour un sommet X_i s'écrit sous la forme :

$$X_i^{k+1} = X_i^k - \gamma_i \frac{\partial V^k}{\partial X_i}$$

où γ_i représente un pas adaptatif avec $\gamma_i \in [\gamma_{min}, \gamma_0]$. Au départ le pas est initialisé à γ_0 , puis il est multiplié par k (avec $k < 1$) en présence d'une oscillation, c'est à dire lorsque $\langle \frac{\partial V^{k+1}}{\partial X_i}, \frac{\partial V^k}{\partial X_i} \rangle < 0$. Le comportement de l'algorithme d'optimisation peut-être illustré en 2d (figures 10 et 11), l'évolution du sommet X_i du modèle \hat{M} est liée à la somme des vecteurs d'orientation du modèle par rapport à la courbe originale M , pondérés par la fonction de forme qui vaut 1 en X_i et décroît en 0 le long des segments voisins de X_i . En 3d le principe est le même avec une fonction de forme définie sur les triangles voisins du sommet X_i .

20

25

30

REVENDICATIONS

1. Procédé de simplification d'un maillage source M formé d'une pluralité de surfaces définies par des sommets, des faces et des orientations sur ces dernières, ledit procédé mettant en œuvre une étape de décimation par fusion d'arête, consistant à associer à une arête à décimer, définie par deux sommets (11, 12), un sommet unique (13), de façon à obtenir un maillage simplifié M', caractérisé en ce qu'il comprend une étape de pseudo-optimisation après ladite étape de décimation par fusion d'une arêtes, positionnant le sommet résultant de ladite fusion de manière à réduire la déviation géométrique entre ledit maillage source M et ledit maillage simplifié M'.
2. Procédé de simplification d'un maillage source selon la revendication 1, caractérisé en ce que ladite étape de pseudo-optimisation consiste à dénombrer les arêtes vives autour des deux sommets formant l'arête à fusionner, et à distinguer les deux cas suivants :
- si les nombres d'arêtes vives sont les mêmes autour des deux sommets, on place le sommet résultant de la fusion au milieu du segment reliant lesdits sommets (42, 44) ;
 - si les nombres d'arêtes vives sont différents, on place le sommet résultant de la fusion sur le sommet présentant le plus grand nombre d'arêtes vives (43, 45).
3. Procédé de simplification d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 1 et 2, caractérisé en ce qu'il comprend une étape de sélection d'une fusion d'arête à effectuer, parmi toutes les fusions d'arête possibles, tenant compte :
- d'au moins une information représentative de la courbure définie localement autour de l'arête considérée ;
 - d'au moins une information représentative de la dynamique géométrique définie localement.
4. Procédé de simplification d'un maillage source selon la revendication 3, caractérisé en ce que ladite étape de sélection met en œuvre une queue de priorité

des arêtes à fusionner, en fonction d'un critère prioritaire, ladite information représentative de la courbure, puis d'un critère secondaire, ladite information représentative de la dynamique géométrique.

5. Procédé de simplification d'un maillage source selon la revendication 4, caractérisé en ce que ladite étape de sélection gère un seuil de courbure, seules les arêtes ayant une courbure inférieure audit seuil étant considérées pour l'application dudit critère secondaire, ledit seuil étant augmenté lorsqu'aucune arête ne présente plus une courbure inférieure à ce dernier.

10 6. Procédé de simplification d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 1 à 5, caractérisé en ce que ladite information représentative de la dynamique géométrique appartient au groupe comprenant :

- longueur de l'arête considérée ;
- une moyenne des surfaces des faces avoisinant ladite arête considérée ;
- 15 - une moyenne des longueurs des arêtes adjacentes aux sommets formant ladite arête considérée ;
- une combinaison de longueurs d'arêtes et/ou de surfaces de faces.

20 7. Procédé de simplification d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 1 à 6, caractérisé en ce que la décimation est interrompue en fonction d'un des critères appartenant au groupe comprenant :

- un taux de compression atteint ;
- une complexité géométrique atteinte, exprimée par un nombre de sommets ou de faces ;
- 25 - un seuil de courbure atteint.

8. Procédé de simplification d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 1 à 7, caractérisé en ce qu'il constitue une étape d'initialisation d'un procédé d'optimisation géométrique d'un maillage.

9. Procédé d'optimisation géométrique d'un maillage source, caractérisé en ce qu'il comprend une étape d'initialisation mettant en œuvre le procédé de simplification de l'une quelconque des revendications 1 à 7.
10. Procédé de codage d'un maillage source (M) selon la revendication 9, représentatif d'un objet en trois dimensions, délivrant un maillage simplifié (M') correspondant audit maillage source (M), lesdits maillages étant définis par un ensemble de sommets, d'arêtes et/ou de faces, caractérisé en qu'il met en œuvre une étape de simplification selon l'une quelconque des revendications 1 à 7, puis une étape de minimisation d'un volume compris entre ledit maillage source (M) et ledit maillage simplifié (M').
11. Procédé de codage d'un maillage source selon la revendication 10, caractérisé en ce que, chacun desdits maillages étant défini par la position de chacun de ses sommets, ladite étape de minimisation assure la détermination des positions des sommets (X_1, X_2, \dots, X_n) dudit maillage simplifié (M') minimisant le volume $V(M, M')$ entre ledit maillage source et ledit maillage simplifié.
12. Procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 10 et 11, caractérisé en ce que ladite étape de minimisation met en œuvre un processus itératif optimisant progressivement les positions des sommets dudit maillage simplifié (M').
13. Procédé de codage d'un maillage source selon la revendication 12, caractérisé en ce que ledit processus itératif est interrompu lorsqu'au moins un des critères d'arrêt suivants est atteint :
- un nombre maximum d'itérations ;
 - une différence entre deux vecteurs déplacement successifs des positions des sommets inférieure à un seuil prédéterminé (Epsilon).
14. Procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 11 à 13, caractérisé en ce que ladite étape de minimisation met en œuvre une méthode de gradient adaptatif.

15. Procédé de codage d'un maillage source selon la revendication 14, caractérisé en ce que ladite méthode de gradient adaptatif repose sur les opérations suivantes:

- sélection d'un vecteur X_p de \mathbf{R}^{3n} ($n \geq 1$) dudit maillage simplifié, et calcul du gradient $\nabla E(X_p)$ en X_p de la fonction à minimiser :

$$E = d(M, M'(X_1, \dots, X_n)) ;$$

- détermination de la position X_p^* de X_p dudit maillage, selon la relation définie à l'itération $k+1$ par :

$$X_p^{k+1} = X_p^k - \gamma_k \times \frac{\nabla E(X_p^k)}{\|\nabla E(X_p^k)\|}$$

10 k variant de 0 à $n-1$ et γ_k étant le pas de ladite relation.

16. Procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 10 à 15, caractérisé en ce que, à chaque itération, on détermine une variation élémentaire dudit volume correspondant à un champ de vecteurs $\delta \vec{M}$, et en ce que, la surface étant paramétrée par u et v , de façon qu'un vecteur $\delta \vec{M}$ s'exprime sous la forme $\delta \vec{M}(u, v)$, ladite variation élémentaire est assimilée au parallélépipède généré par l'évolution de l'élément de surface $du dv$ dans la direction $\delta \vec{M}(u, v)$.

17. Procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 10 à 16, caractérisé en ce que ledit maillage simplifié est paramétré à l'aide d'un modèle d'éléments finis.

18. Procédé de codage d'un maillage source selon la revendication 17, caractérisé en ce que lesdits éléments finis sont obtenus à l'aide d'un interpolateur affine.

19. Procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 10 à 18, caractérisé en ce qu'il met en œuvre un codage progressif dudit maillage simplifié, par décimation d'un sommet et optimisation locale ou par décimation d'un ensemble sommets et optimisation globale.

20. Procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 10 à 19, caractérisé en ce qu'il comprend une étape de limitation

de la dégradation due à une transformation élémentaire, mettant en œuvre une queue de priorité sur les transformations élémentaires.

21. Procédé de codage d'un maillage source selon la revendication 20, caractérisé en ce que ladite étape de limitation de la dégradation due à une transformation élémentaire, c'est-à-dire une fusion d'arête, définie par deux sommets, comprend les étapes de :

- calcul d'un coût pour chaque transformation élémentaire possible ;
- réalisation de la transformation élémentaire de moindre coût ;
- recalcul des coûts des transformations élémentaires modifiées par la transformation élémentaire précédente ;
- ajout des nouvelles transformations élémentaires créées et calcul des coûts correspondants.

22. Procédé de codage d'un maillage source selon la revendication 21, caractérisé en ce que le coût d'une transformation élémentaire (T_i) s'exprime par :

$$C(T_i(X_i, X_j)) = \max d_2(V_M, F(X_i^f))$$

avec : T_i transformation fusionnant deux sommets X_i et X_j dudit maillage simplifié M' ;

X_i^f le sommet dudit maillage simplifié M' résultant de ladite transformation ;

$F(X_i^f)$ les faces dudit maillage simplifié M' avoisinant le sommet X_i^f après ladite transformation ;

V_M ensemble des sommets dudit maillage source M appartenant aux faces ayant été intersectées lors du calcul de l'orientation des surfaces pendant ladite minimisation.

23. Application du procédé de codage d'un maillage source selon l'une quelconque des revendications 1 à 22 à au moins un des domaines suivant :

- la réalité virtuelle ;
- la simulation scientifique ;
- la modélisation.

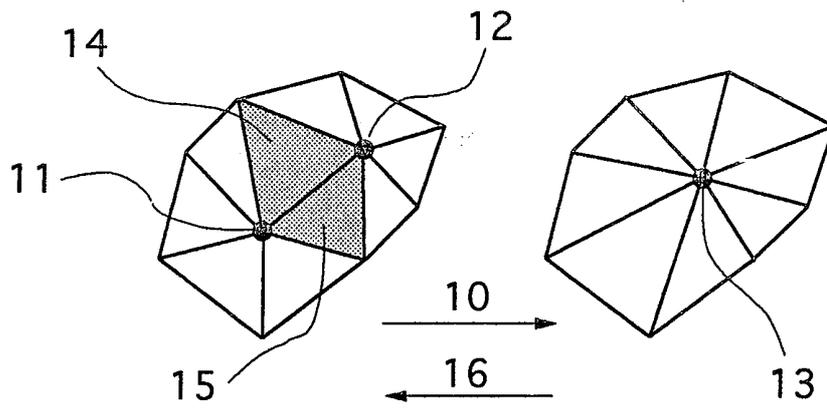


Fig. 1

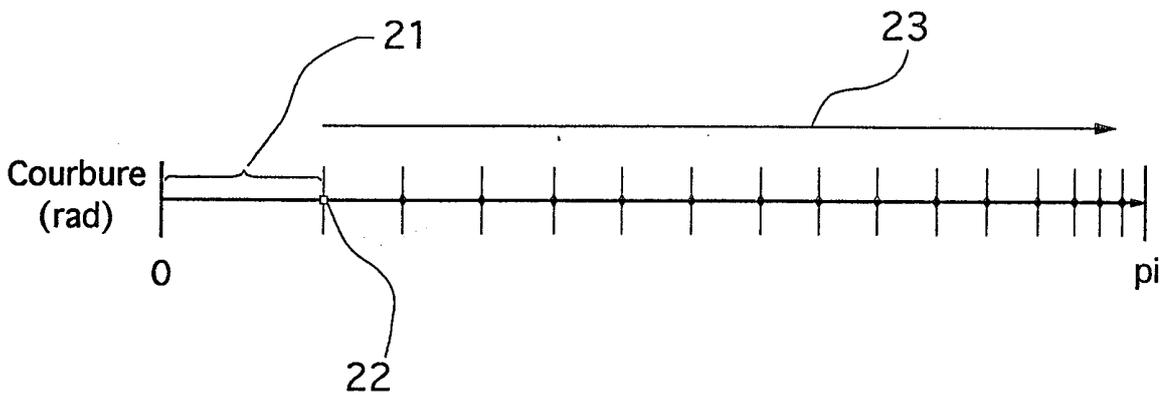


Fig. 2

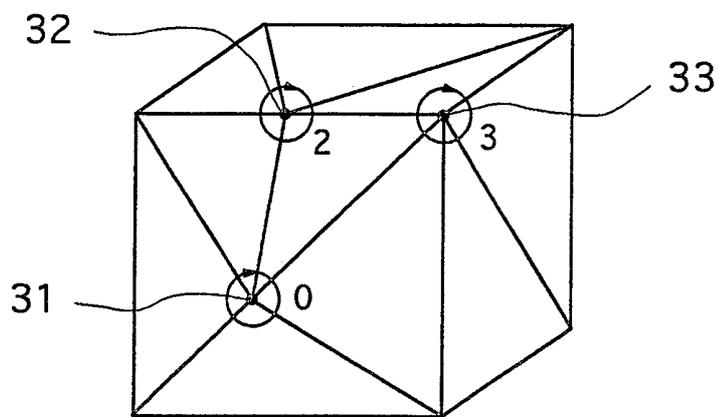


Fig. 3

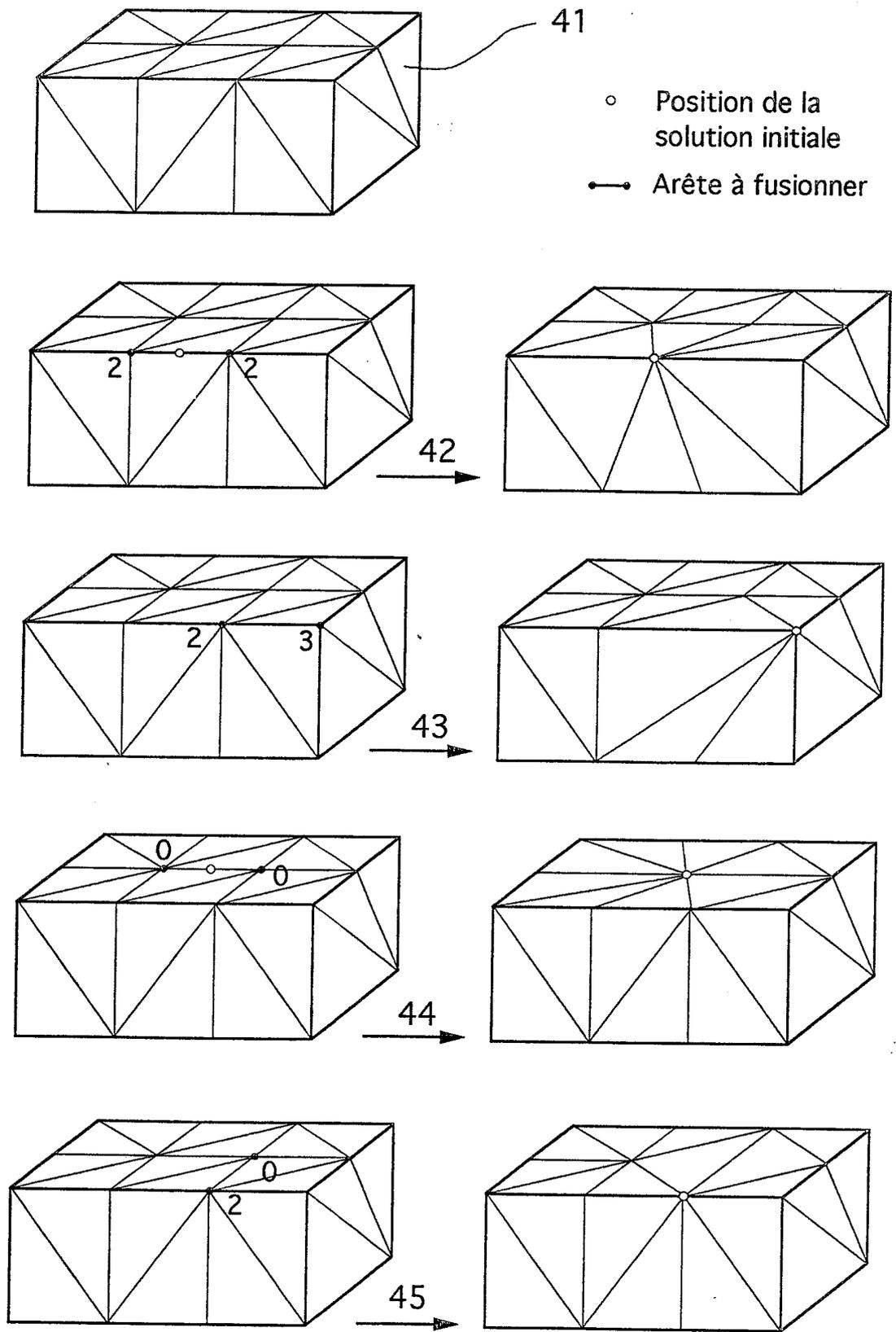


Fig. 4

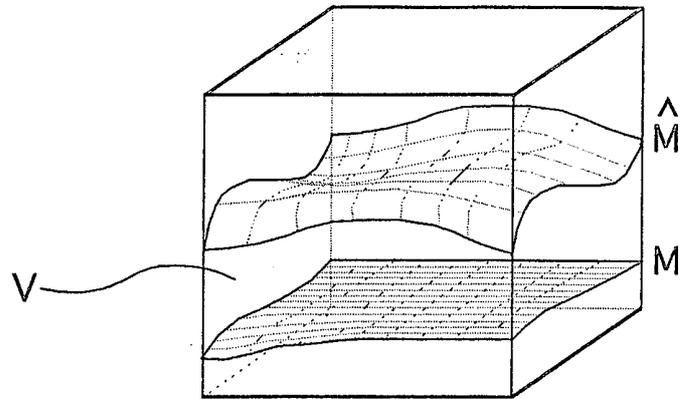


Fig. 5

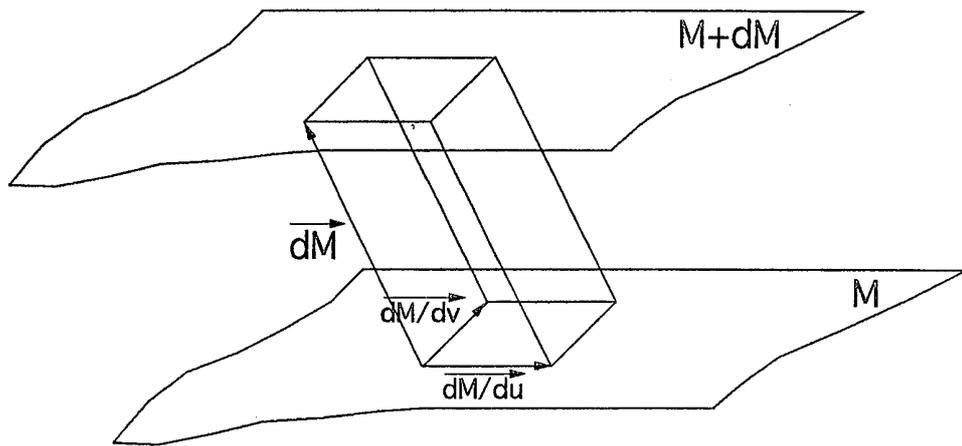


Fig. 6

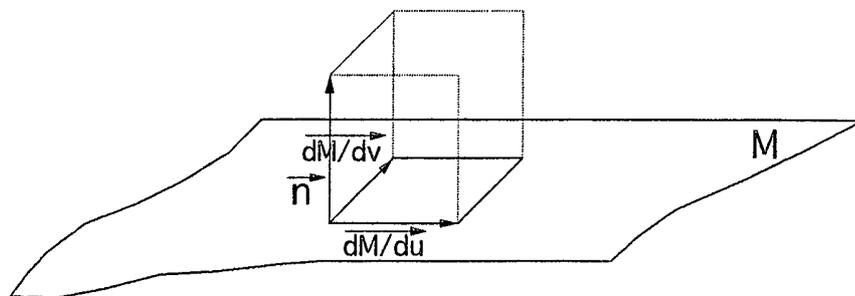


Fig. 7

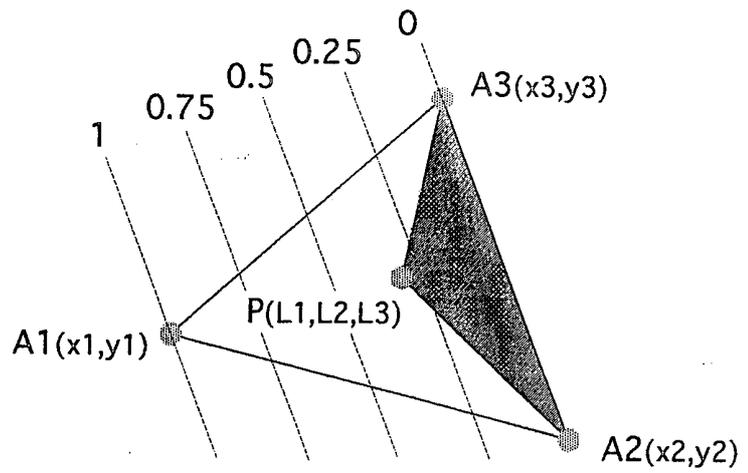


Fig. 8

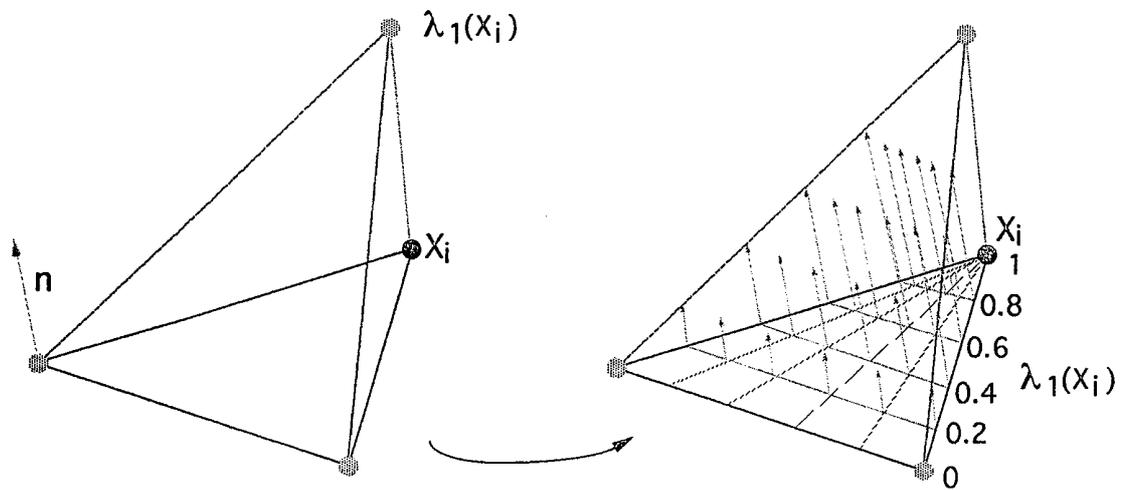


Fig. 9

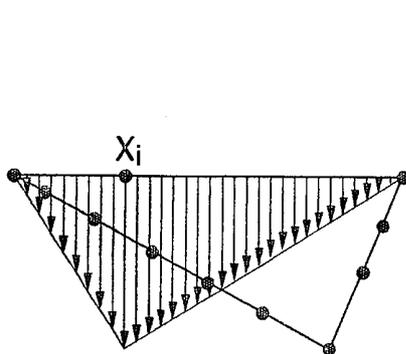


Fig. 10

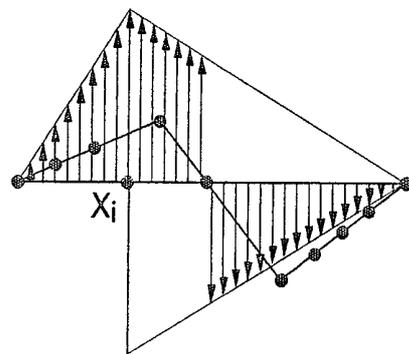


Fig. 11

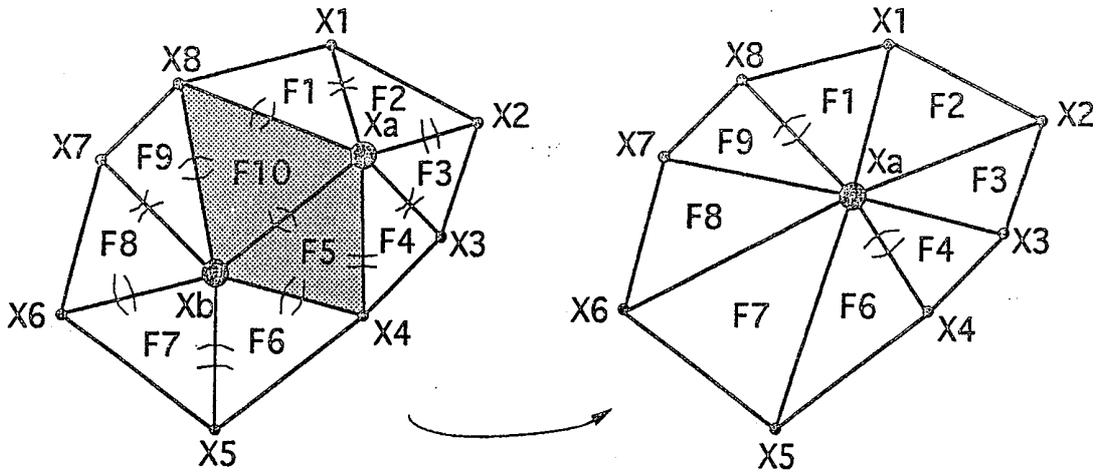


Fig. 12

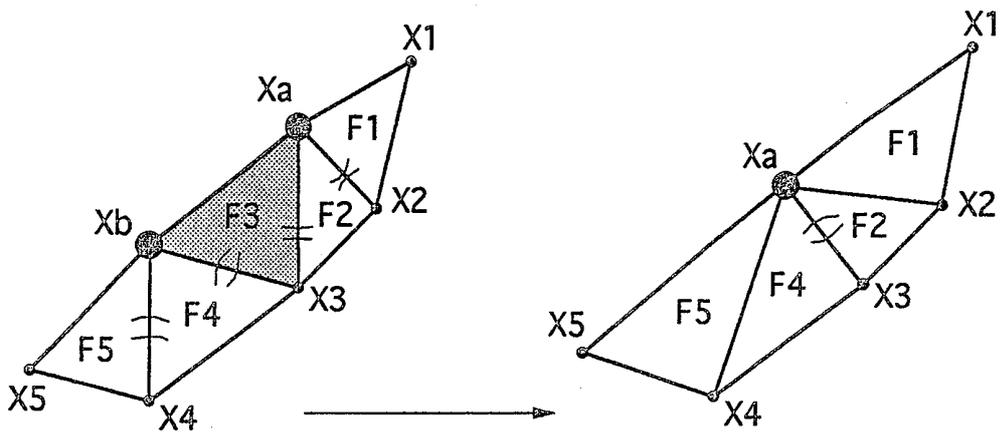


Fig. 13

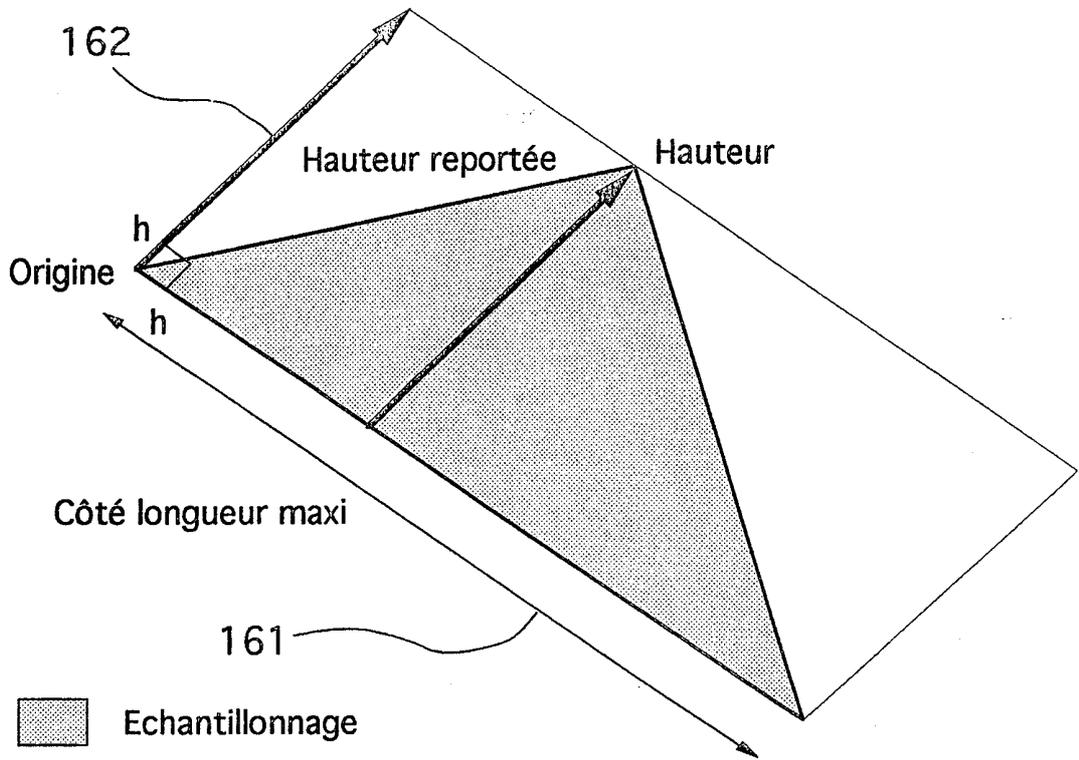


Fig. 14

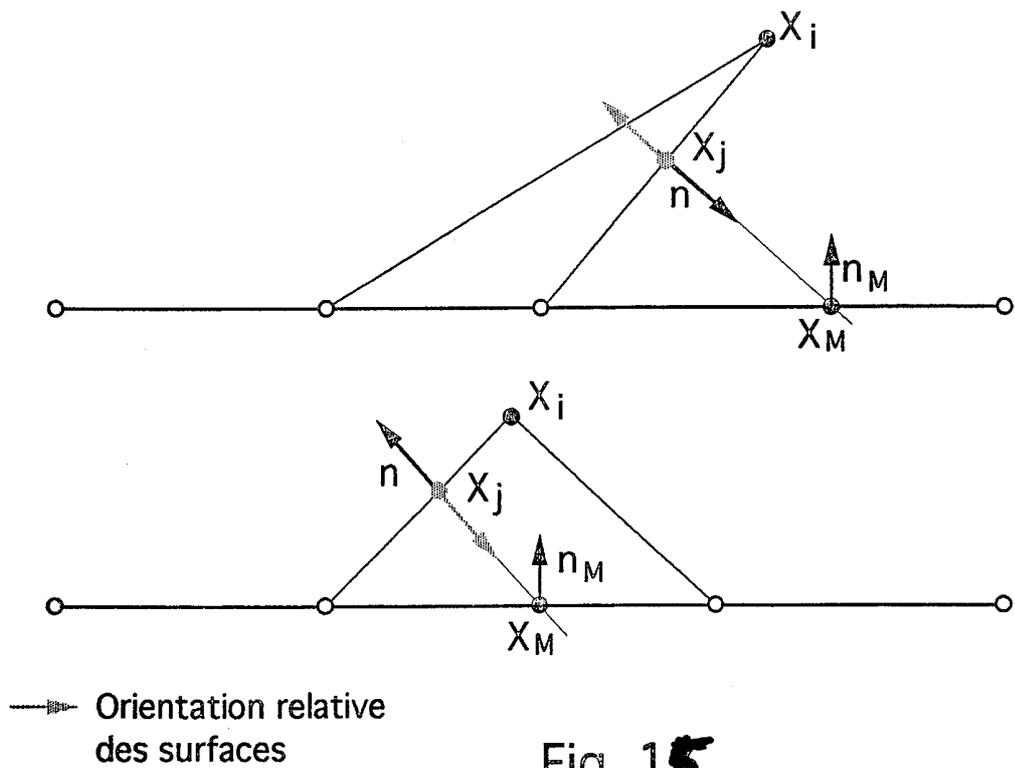
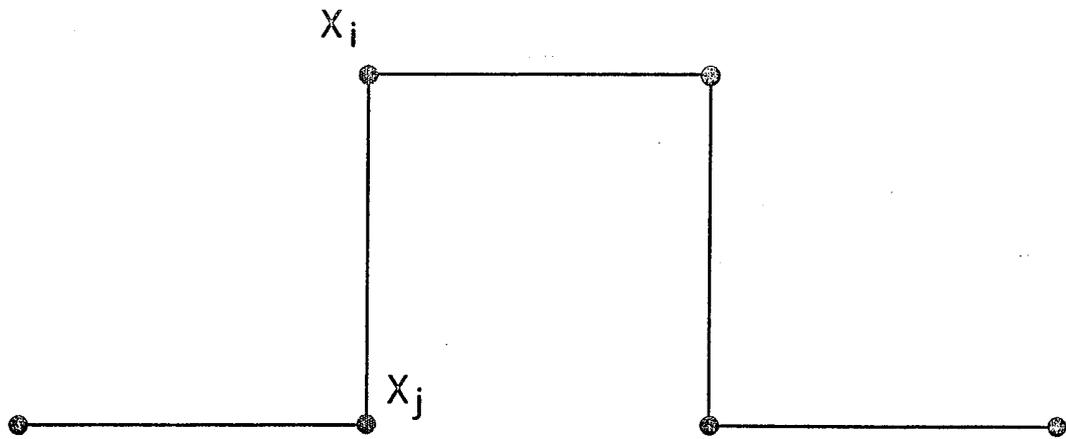
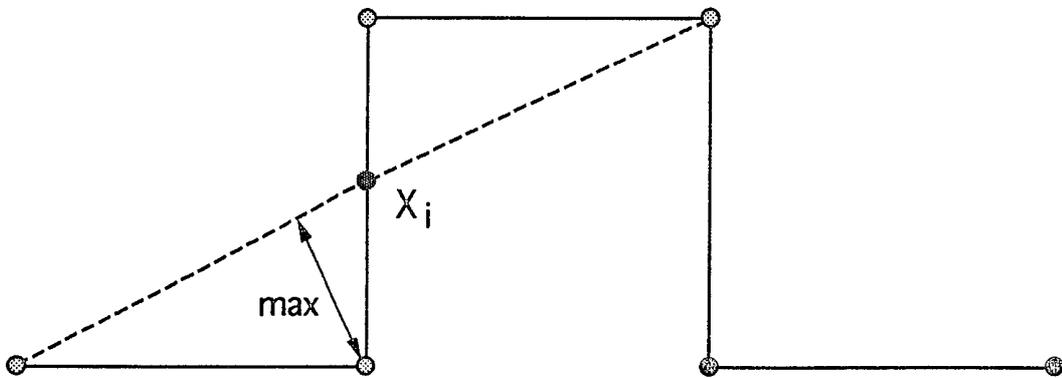


Fig. 15



● Sommets à fusionner



● V_M

Fig. 16

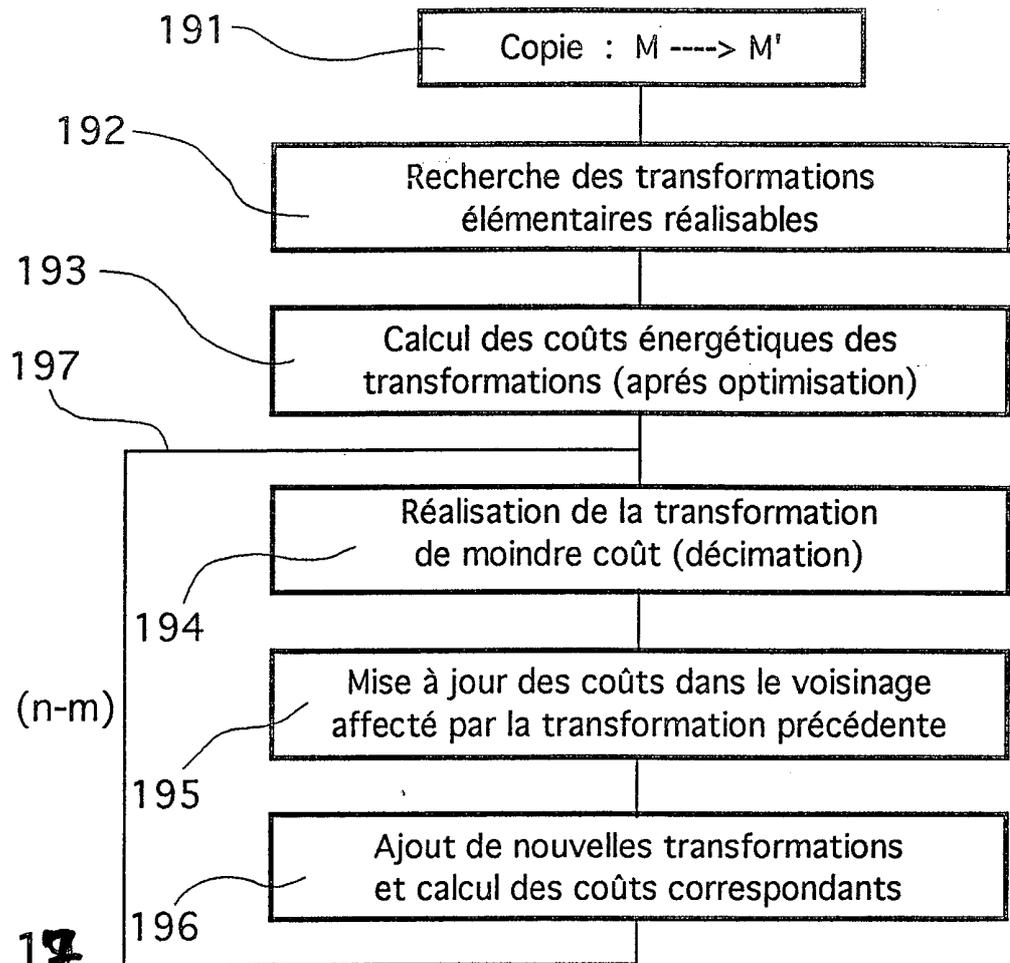


Fig. 17

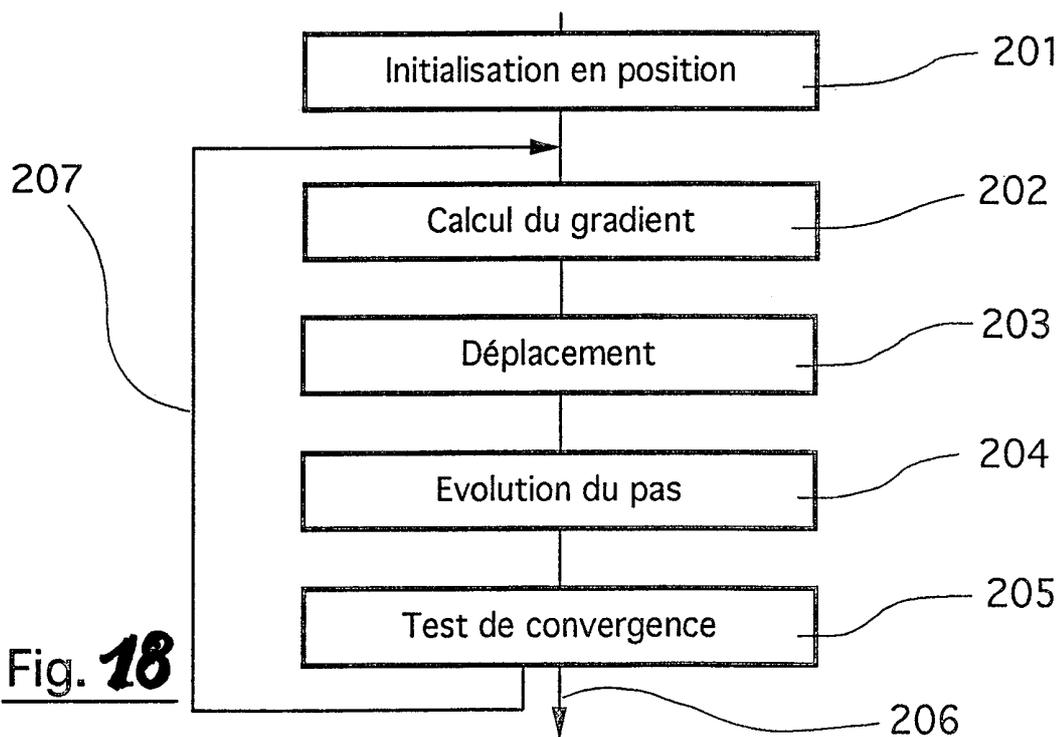


Fig. 18

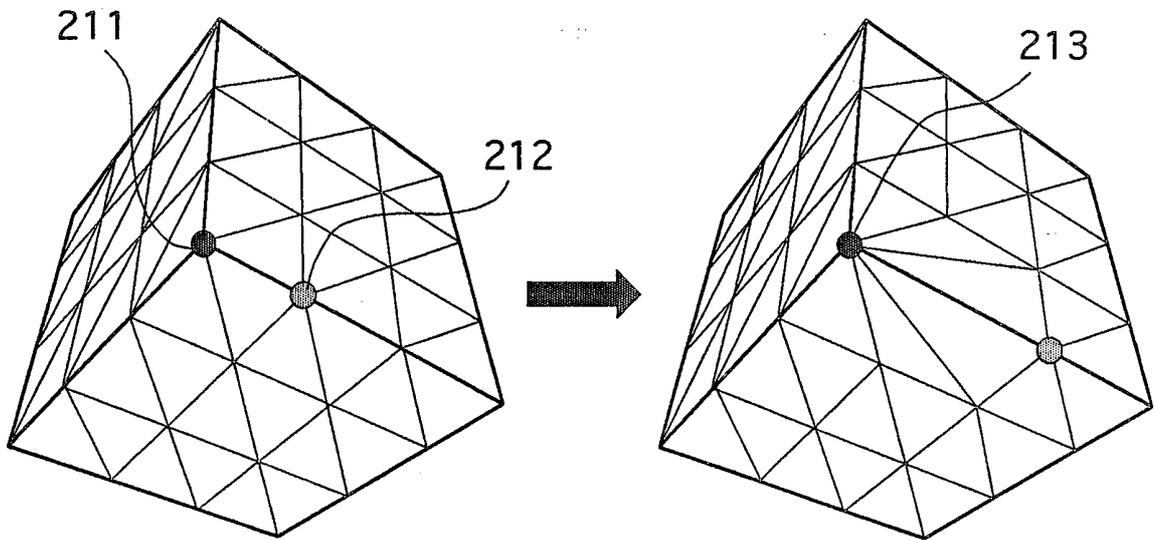


Fig. 19

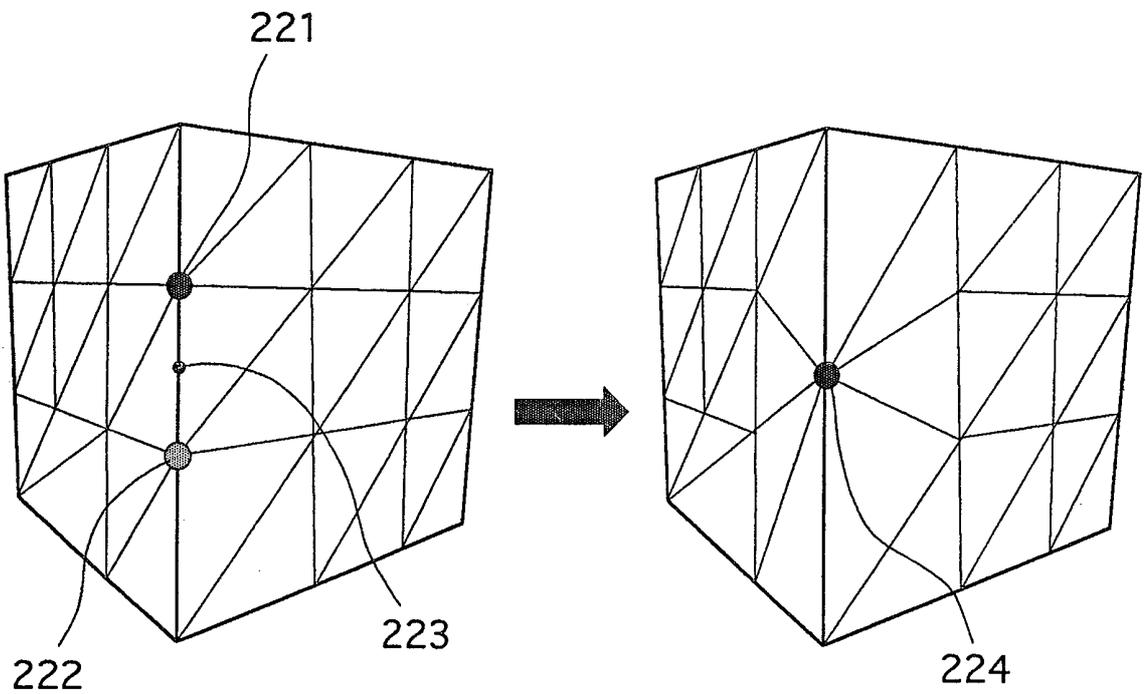


Fig. 20

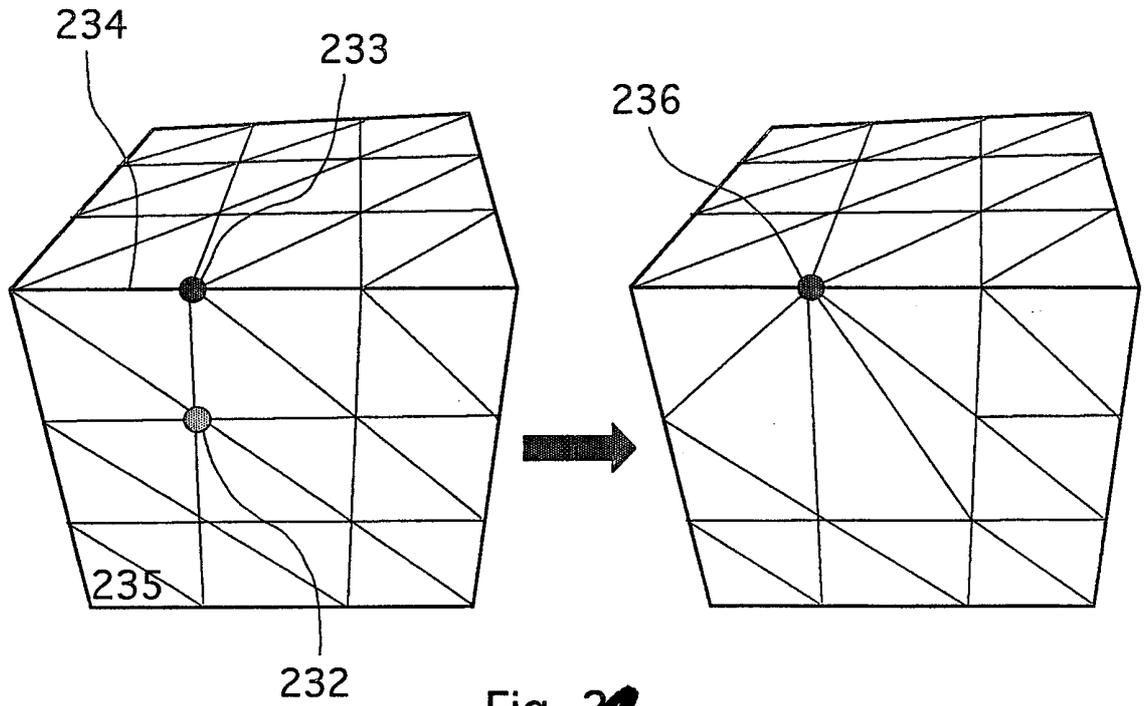


Fig. 21

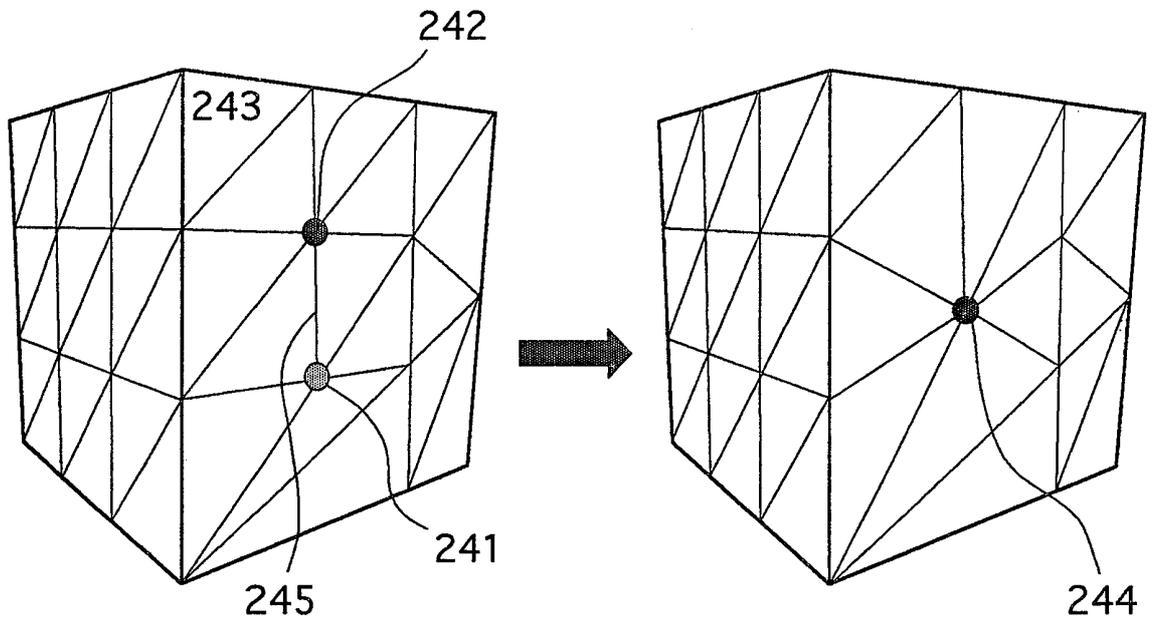
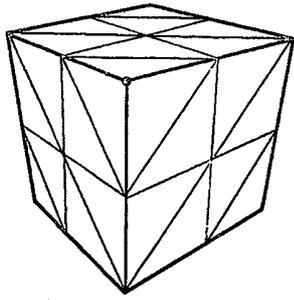
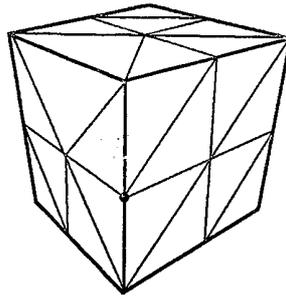


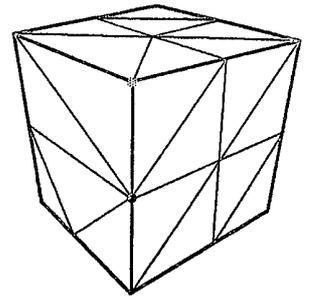
Fig. 22



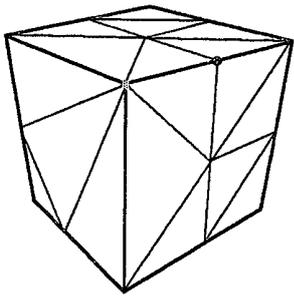
(a) Modèle original



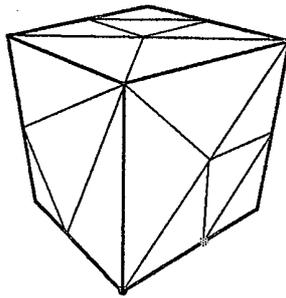
(b) Itération 1



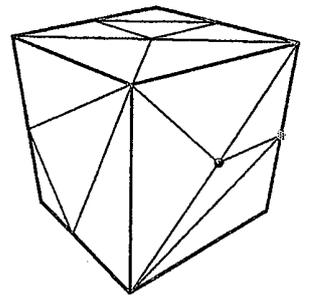
(c) Itération 2



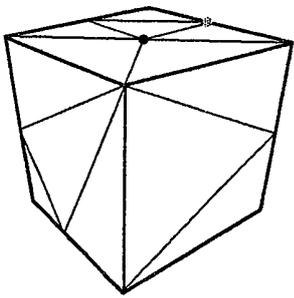
(d) Itération 3



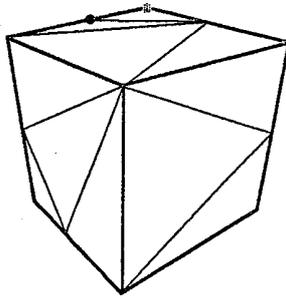
(e) Itération 4



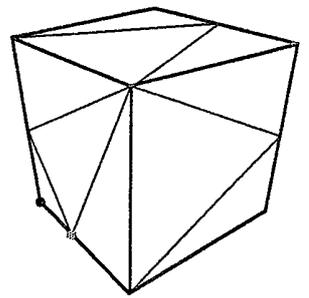
(f) Itération 5



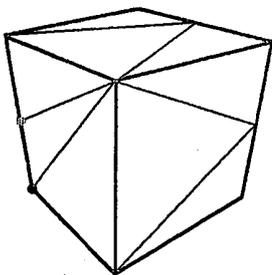
(g) Itération 6



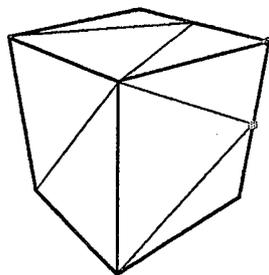
(h) Itération 7



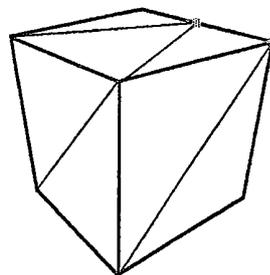
(i) Itération 8



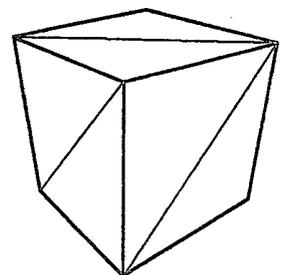
(j) Itération 9



(k) Itération 10



(l) Itération 11



(m) Itération 12

Fig. 23

12 / 12

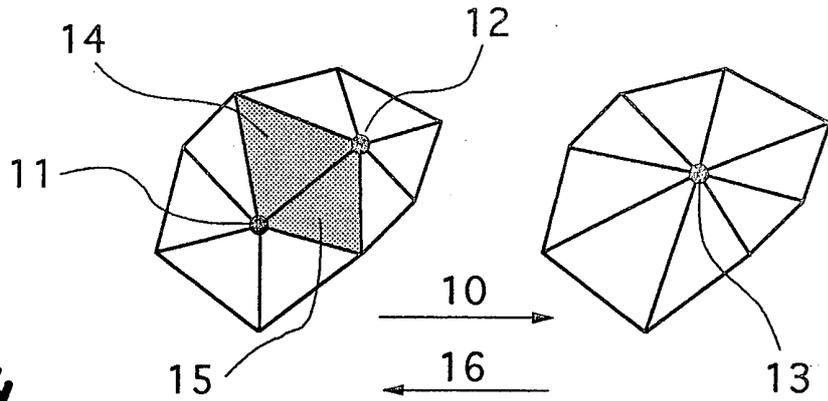
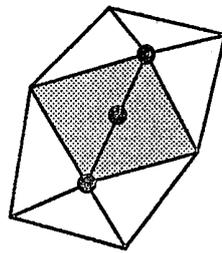
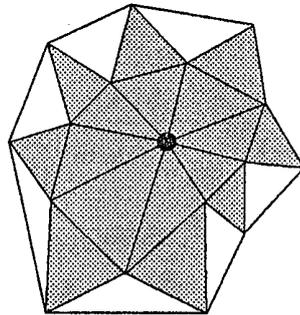
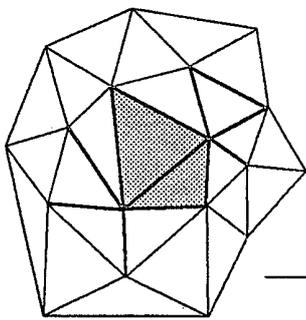


Fig. 24



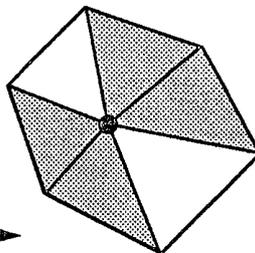
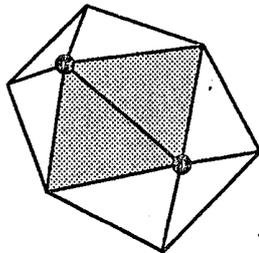
-  Faces à supprimer
-  Positions initiales

Fig. 25



-  Transformation à mettre à jour
-  Arête modifiée
-  Arête fusionnée
-  Sommet à optimiser

Fig. 26



-  Transformations nouvelles

Fig. 27

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International Application No

PCT/FR 99/02524

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER
IPC 7 G06T17/20

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)
IPC 7 G06T

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practical, search terms used)

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
X	US 5 590 248 A (ZARGE JONATHAN A ET AL) 31 December 1996 (1996-12-31) column 3, line 13 -column 4, line 59 ---	1-13, 17-21
X	KLEIN R ET AL: "MESH REDUCTION WITH ERROR CONTROL" VISUALIZATION '96. PROCEEDINGS OF THE VISUALIZATION CONFERENCE, SAN FRANCISCO, OCT. 27 - NOV. 1, 1996, 27 October 1996 (1996-10-27), pages 311-318, XP000704204 YAGEL R; NIELSEN G M page 312, left-hand column, line 38 -page 313, left-hand column, line 37 -----	1-13, 17-21

Further documents are listed in the continuation of box C.

Patent family members are listed in annex.

Special categories of cited documents:

- "A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance
- "E" earlier document but published on or after the international filing date
- "L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)
- "O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means
- "P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

- "T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention
- "X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone
- "Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art.
- "&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search <p style="text-align: center;">11 January 2000</p>	Date of mailing of the international search report <p style="text-align: center;">19/01/2000</p>
Name and mailing address of the ISA European Patent Office, P.B. 5818 Patentlaan 2 NL - 2280 HV Rijswijk Tel. (+31-70) 340-2040, Tx. 31 651 epo nl, Fax: (+31-70) 340-3016	Authorized officer <p style="text-align: center;">Burgaud, C</p>

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

Information on patent family members

International Application No

PCT/FR 99/02524

Patent document cited in search report	Publication date	Patent family member(s)	Publication date
US 5590248	A	31-12-1996	NONE

RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Der : Internationale No

PCT/FR 99/02524

A. CLASSEMENT DE L'OBJET DE LA DEMANDE
CIB 7 G06T17/20

Selon la classification internationale des brevets (CIB) ou à la fois selon la classification nationale et la CIB

B. DOMAINES SUR LESQUELS LA RECHERCHE A PORTE

Documentation minimale consultée (système de classification suivi des symboles de classement)
CIB 7 G06T

Documentation consultée autre que la documentation minimale dans la mesure où ces documents relèvent des domaines sur lesquels a porté la recherche

Base de données électronique consultée au cours de la recherche internationale (nom de la base de données, et si réalisable, termes de recherche utilisés)

C. DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS

Catégorie	Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indication des passages pertinents	no. des revendications visées
X	US 5 590 248 A (ZARGE JONATHAN A ET AL) 31 décembre 1996 (1996-12-31) colonne 3, ligne 13 -colonne 4, ligne 59 ---	1-13, 17-21
X	KLEIN R ET AL: "MESH REDUCTION WITH ERROR CONTROL" VISUALIZATION '96. PROCEEDINGS OF THE VISUALIZATION CONFERENCE, SAN FRANCISCO, OCT. 27 - NOV. 1, 1996, 27 octobre 1996 (1996-10-27), pages 311-318, XP000704204 YAGEL R;NIELSEN G M page 312, colonne de gauche, ligne 38 -page 313, colonne de gauche, ligne 37 -----	1-13, 17-21

Voir la suite du cadre C pour la fin de la liste des documents

Les documents de familles de brevets sont indiqués en annexe

o Catégories spéciales de documents cités:

- "A" document définissant l'état général de la technique, non considéré comme particulièrement pertinent
- "E" document antérieur, mais publié à la date de dépôt international ou après cette date
- "L" document pouvant jeter un doute sur une revendication de priorité ou cité pour déterminer la date de publication d'une autre citation ou pour une raison spéciale (telle qu'indiquée)
- "O" document se référant à une divulgation orale, à un usage, à une exposition ou tous autres moyens
- "P" document publié avant la date de dépôt international, mais postérieurement à la date de priorité revendiquée

- "T" document ultérieur publié après la date de dépôt international ou la date de priorité et n'appartenant pas à l'état de la technique pertinent, mais cité pour comprendre le principe ou la théorie constituant la base de l'invention
- "X" document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme nouvelle ou comme impliquant une activité inventive par rapport au document considéré isolément
- "Y" document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme impliquant une activité inventive lorsque le document est associé à un ou plusieurs autres documents de même nature, cette combinaison étant évidente pour une personne du métier
- "&" document qui fait partie de la même famille de brevets

Date à laquelle la recherche internationale a été effectivement achevée

Date d'expédition du présent rapport de recherche internationale

11 janvier 2000

19/01/2000

Nom et adresse postale de l'administration chargée de la recherche internationale
Office Européen des Brevets, P.B. 5818 Patentlaan 2
NL - 2280 HV Rijswijk
Tel. (+31-70) 340-2040, Tx. 31 651 epo nl,
Fax: (+31-70) 340-3016

Fonctionnaire autorisé

Burgaud, C

RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Renseignements relatifs : membres de familles de brevets

Der e Internationale No

PCT/FR 99/02524

Document brevet cité au rapport de recherche	Date de publication	Membre(s) de la famille de brevet(s)	Date de publication
US 5590248	A	31-12-1996	AUCUN