

(19) DANMARK



(12) FREMLÆGGELSESSKRIFT (11) 144629 B

DIREKTORATET FOR  
PATENT- OG VAREMÆRKEVÆSENEN

- (21) Ansøgning nr. 890/76 (51) Int.Cl.<sup>3</sup> G 06 F 15/332  
(22) Indleveringsdag 2. mar. 1976  
(24) Løbedag 2. mar. 1976  
(41) Alm. tilgængelig 6. sep. 1976  
(44) Fremlagt 19. apr. 1982  
(86) International ansøgning nr. -  
(86) International indleveringsdag -  
(85) Videreførelsesdag -  
(62) Stamansøgning nr. -  
(30) Prioritet 5. mar. 1975, 7506861, FR  
  
(71) Ansøger TELECOMMUNICATIONS RADIOELECTRIQUES ET TELEPHONIQUES T.R.T.,  
75013 Paris, FR.  
(72) Opfinder Georges Bonnerot, FR.  
  
(74) Fuldmægtig Internationalt Patent-Bureau.

- (54) Kredsløb til beregning af fourier=  
koefficienter ud fra digitale ek=  
sempleringer af et reelt og sym=  
metrisk signal og til beregning  
af digitale eksempleringer ud fra  
en symmetrisk sekvens af koeffici=  
enter.

Opfindelsen angår et kredsløb til beregning af  $N$  dobbelte ulige, diskrete fourierkoefficienter  $C_0, C_1, C_2 \dots C_{N-1}$  ud fra en symmetrisk sekvens af  $N$  digitale eksempleringer  $X_0, X_1, X_2 \dots X_{N-1}$  af et reelt og symmetrisk indgangssignal, hvor  $N$  er et med en faktor 4 deleligt tal, hvilket kredsløb omfatter en lagerenhed til oplagring af de  $N$  digitale eksempleringer og med i det mindste en første og en anden udgang, en til lagerenhedens udgange koblet første multiplikator til multiplikation af komplekse tal og med en tilknyttet komplekstalsgenerator, samt en med multiplikatoren forbundet DFT (diskret fourier-transformation) beregnerenhed.

Et sådant kredsløb kan anvendes til spektralanalyse eller signalfiltrering.

Teknikkerne til beregning af den diskrete fouriertransformation for en serie ækvidistante eksempleringer af et signal har allerede været genstand for

UK 144629 B

mange publikationer. Se f.eks. litteraturhenvisning 1 umiddelbart efter figurfortegnelsen. Den mest effektive fremgangsmåde til beregning af den diskrete fouriertransformation (DFT) kendes under betegnelsen "Fast Fourier Transform" (FFT), dvs. den hurtige diskrete fouriertransformation.

Hvis tidssekvensen udgøres af  $N$  eksempleringer af et reelt signal, vil det antal operationer, der skal udføres til en FFT, være det samme som det antal beregninger, der udføres ved den hurtige fouriertransformation, hvis tidssekvensen udgøres af  $N$  komplekse eksempleringer. På grund af reelle signalers egenskaber er det ved en FFT udførte antal operationer unødigt højt, hvis der tilføres reelle signaleksempleringer. Som beskrevet i litteraturhenvisning 2 kan antallet af operationer på  $N$  reelle eksempleringer formindskes til et antal, som er tilnærmelsesvis lig med det antal operationer, der skal udføres på  $N/2$  komplekse eksempleringer.

Dette kendte kredsløb er baseret på en FFT, der er konstrueret på sædvanlig måde, og som udelukkende er egnet til behandling af komplekse signaleksempleringer og dannelse af komplekse fourierkoefficienter. Ved hjælp af et forbehandlingstrin og den første multiplikator omformes de reelle signaleksempleringer til komplekse tal, der tilføres FFT-elementet.

Hvis fourierkoefficienterne, som det er tilfældet for signaler med bestemte symmetriegenskaber, er reelle, kan antallet af operationer, der skal udføres, formindskes yderligere, idet dette antal operationer nemlig kan formindskes til tilnærmelsesvis  $N/4$  i sammenligning med antallet af operationer i en sædvanlig FFT (se litteraturhenvisning 3). For at opnå denne formindskelse i antallet af udførte operationer ændres den sædvanlige opbygning af FFT-elementet, hvilket er uønskværdigt eller endog umuligt med en FFT-beregnerenhed, der er udformet som et modul.

Det er en hensigt med opfindelsen at tilvejebringe et kredsløb af den i indledningen omtalte type til omformning af reelle eksempleringer af et reelt og symmetrisk tidssignal til reelle fourierkoefficienter, hvor ovennævnte yderligere formindskelse opnås med anvendelse af en sædvanlig FFT.

Ifølge opfindelsen er et kredsløb af den indledningsvis angivne art ejendommeligt ved, at lagerenheden er indrettet til enten på sin første udgang at frembringe de lige nummererede digitale eksempleringer af en første sekvens af digitale eksempleringer dannet af de  $N/2$  digitale eksempleringer  $X_0, X_1, X_2 \dots X_{N/2-1}$  og på sin anden udgang frembringe de lige nummererede digitale eksempleringer af en anden sekvens af digitale eksempleringer dannet af de  $N/2$  digitale eksempleringer  $X_{N/2}, X_{N/2+1}, X_{N/2+2} \dots X_{N-1}$ , eller ved sin første udgang at frembringe de ulige nummererede digitale eksempleringer af nævnte første sekvens og ved sin anden udgang frembringe de ulige nummererede digitale eksempleringer af nævnte anden sekvens, at hver digital eksemplering  $X_i$  på den første udgang med en digital eks-

emplering  $X_{N/2+i}$  på den anden udgang danner et eksempleringsspar, hvilke  $N/4$  eksempleringsspar føres til den første multiplikator, der som svar på disse eksempleringsspar og på  $N/4$  komplekse tal fra den første komplekstalsgenerator frembringer  $N/4$  første komplekse produkter, som føres til DFT-beregnerenheden til frembringelse af  $N/4$  andre komplekse produkter, som føres til en anden multiplikator til multiplikation med komplekse tal fra en til den anden multiplikator knyttet anden komplekstalsgenerator, som frembringer  $N/4$  andre komplekse tal, hvilken anden multiplikator som svar på de  $N/4$  andre komplekse produkter og de  $N/4$  andre komplekse tal frembringer  $N/4$  tredje komplekse produkter, hvis reelle og imaginære dele udgør enten de lige nummererede koefficienter i henholdsvis den første serie af koefficienter  $C_0, C_1 \dots C_{N/2-1}$  og den anden serie af koefficienter  $C_{N/2}, C_{N/2+1} \dots C_{N-1}$  eller de ulige nummererede koefficienter i henholdsvis den første og den anden serie af koefficienter, og at de reelle og imaginære dele af de tredje komplekse produkter selektivt føres til inverterkredse til invertering af disse deles polaritet til frembringelse af de resterende koefficienter.

Ved benyttelse af forholdsreglerne ifølge opfindelsen kan der anvendes en FFT af ordenen  $N/4$ .

Opfindelsen angår tillige et kredsløb til beregning af  $N$  digitale eksempleringer  $X_0, X_1, X_2 \dots X_{N-1}$  for et reelt og symmetrisk signal ud fra en symmetrisk sekvens af  $N$  dobbelte, ulige, diskrete fourierkoefficienter  $C_0, C_1, C_2 \dots \dots \dots C_{N-1}$ , hvor  $N$  er et med en faktor 4 deleligt tal, hvilket kredsløb omfatter en lagerenhed til oplagring af de  $N$  koefficienter og med i det mindste en første og en anden udgang, en til lagerenhedens udgange koblet første multiplikator til multiplikation af komplekse tal til frembringelse af første komplekse produkter og med en tilknyttet komplekstalsgenerator samt en til multiplikatoren forbundet IDFT (invers-diskret fouriertransformation) -beregnerenhed. Svarende til det ovenfor anførte er et sådant kredsløb ifølge opfindelsen ejendommeligt ved, at lagerenheden er indrettet til enten på sin første udgang at frembringe de lige nummererede koefficienter i en først sekvens af koefficienter dannet af de  $N/2$  koefficienter  $C_0, C_1, C_2 \dots C_{N/2-1}$  og sin anden udgang frembringe de lige nummererede koefficienter i en anden sekvens af koefficienter dannet af de  $N/2$  koefficienter  $C_{N/2}, C_{N/2+1} \dots C_{N-1}$  eller ved sin første udgang at frembringe de ulige nummererede koefficienter i nævnte første sekvens og ved sin anden udgang frembringe de ulige nummererede koefficienter i nævnte anden sekvens, at en koefficient  $C_i$  ved den første udgang og en koefficient  $C_{N/2+i}$  ved den anden udgang hver gang danner et koefficientpar, hvilke  $N/4$  koefficientpar føres til den første multiplikator, der som svar på disse koefficientpar og på  $N/4$  komplekse tal fra den første komplekstalsgenerator frembringer  $N/4$  første komplekse produkter, som føres til IDFT-beregnerenheden til frembringelse af  $N/4$  andre komplekse produkter, som føres til en anden multiplikator til multiplikation af komplekse tal og med en tilknyttet anden

komplekstalsgenerator til frembringelse af  $N/4$  andre komplekse tal, hvilken anden multiplikator som svar på de  $N/4$  andre komplekse produkter og de  $N/4$  andre komplekse tal frembringer  $N/4$  tredje komplekse produkter, hvis reelle og imaginære dele enten udgør de lige nummererede digitale eksempleringer af henholdsvis den første serie af digitale eksempleringer  $X_0, X_1 \dots X_{N/2-1}$  og den anden serie af digitale eksempleringer  $X_{N/2}, X_{N/2+1} \dots X_{N-1}$  eller de ulige nummererede digitale eksempleringer af henholdsvis nævnte første og nævnte anden serie af digitale eksempleringer, og at de reelle og imaginære dele af de tredje komplekse produkter selektivt føres til inverterkredse til invertering af disse deles polaritet til frembringelse af de resterende digitale eksempleringer.

Opfindelsen beskrives nærmere i det følgende ved hjælp af udførelseseksempler under henvisning til tegningen, hvor

fig. 1 viser to diagrammer, der angiver forbindelsen mellem eksempleringer i tids- og frekvensdomænet ved en sædvanlig FFT,

fig. 2 et kredsløbsdiagram af en sædvanlig FFT,

fig. 3 kredsløbet ifølge opfindelsen,

fig. 4 en serie signaleksempleringer, der tilføres indretningen ifølge opfindelsen, og

fig. 5 to diagrammer, der angiver forbindelsen mellem eksempleringer i tids- og frekvensdomænet ved en indretning ifølge opfindelsen.

Der henvises til følgende litteratur:

1. "Digital Signal Processing", del 2, L.R. Rabiner og G.M. Radar; IEEE Press 1972.
2. "Real Signals Fast Fourier Transform Storage Capacity and Step Number Reduction by Means of an Odd Discrete Fourier Transform", J.L. Vernet; Proceedings of the IEEE October 1971; side 1531 - 1532.
3. "A Fast Fourier Transform Algorithm for Symetric Real Valued Series", H. Ziegler; IEEE Transactions on Audio and Elektroacoustics, Vol. AU-20, No. 5, December 1972; side 353-356.

Den sædvanlige DFT er defineret på følgende måde:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot \exp \left[ -2\pi j \frac{k \cdot n}{N} \right]. \quad (1)$$

I denne ligning angiver  $C_k$  den  $k$ 'ende fourierkoefficient, der skal beregnes,  $X_n$  en indgangssignaleksemplering og  $N$  det antal indgangssignaleksempleringer  $X_n$ , der er taget i betragtning, medens  $j = \sqrt{-1}$  og  $n$  og  $k$  betegner hele tal med værdien  $0, 1, 2, \dots, N-1$ .

På lignende måde er den inverse diskrete fouriertransformation defineret som:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot \exp \left[ 2\pi j \cdot \frac{k \cdot n}{N} \right]. \quad (2)$$

Den af den diskrete fouriertransformation eller den inverse diskrete fouriertransformation definerede forbindelse mellem tidsdomænet og frekvensdomænet er vist i diagramform i fig. 1. Diagram la viser N signaleksempleringer  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}$ . Disse signaleksempleringer fremkommer til tidspunkterne  $0, T, 2T, \dots, (N-1)T$ . Med disse N signaleksempleringer kan der beregnes N fourierkoefficienter  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$  ved hjælp af den i ligning (1) definerede DFT. Nærmere bestemt repræsenterer disse koefficienter eksempleringer af frekvensspektret for det signal, der er repræsenteret af signaleksempleringerne  $X_0, \dots, X_{N-1}$ . Disse frekvensseksempleringer er taget til frekvenserne  $0, \frac{1}{NT}, \frac{2}{NT}, \dots, (N-1)\frac{1}{NT}$ . Disse frekvensseksempleringer er vist i diagram lb.

Ved hjælp af den i ligning (2) definerede inverse diskrete fouriertransformation kan signaleksempleringerne  $X_0, X_{N-1}$  i diagram la omvendt afledes fra frekvensseksempleringerne  $C_0, \dots, C_{N-1}$  i diagram lb.

De beregninger, som må udføres ved benyttelse af ligning (1) og (2), er af den samme type. Den nedenfor følgende beskrivelse vil derfor være begrænset til udførelse af ligning (1).

De sædvanlige fouriertransformationer er udformet til behandling af komplekse signaleksempleringer og til frembringelse af komplekse fourierkoefficienter. En sådan fouriertransformation af N'te orden kan som vist i fig. 2 fremstilles som en beregnerenhed 1, der er forsynet med N par indgange  $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{N-1}, b_{N-1})$ , hvortil de komplekse tal  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  føres, og som er understyret med N par udgange  $(d_0, e_0), (d_1, e_1), \dots, (d_{N-1}, e_{N-1})$ , hvor de komplekse tal  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$  frembringes. Til beregnerenheden 1 føres ydermere de komplekse koefficienter  $\exp \left[ -2\pi j \frac{kn}{N} \right]$ , hvor  $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$  og  $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ . Disse komplekse koefficienter fremkommer fra en lagerenhed 2. Ud fra de komplekse koefficienter og de komplekse indgangstal  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  beregner enheden 1 i overensstemmelse med formlen (1) de komplekse tal  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ , der er tilgængelige på de ovennævnte udgangspar.

Med en sådan sædvanlig DFT udføres der mange overflødige beregninger, hvis der skal beregnes fourierkoefficienter for et reelt og symmetrisk tidssignal, som udelukkende har reelle eller udelukkende har imaginære fourierkoefficienter.

Ved hjælp af indretningen ifølge den foreliggende opfindelse er det muligt på enkel måde at formindske lagerkapaciteten til en fjerdedel og antallet af udførte beregninger til tilnærmelsesvis en fjerdedel for store N.

Indretningen ifølge opfindelsen er vist i fig. 3. Denne indretning omfatter en lagerenhed 4. Signaleksempleringerne tilføres denne lagerenhed 4 gennem en indgang 3. Lagerenheden 4 er udførmet som et skifteregister med N registersektioner

4(0)-4(N-1), der hver er udformet til oplagring af en fuldstændig signaleksemplesering  $X_n$ . Lagerenheden omfatter ydermere en første multiplikator 5 med N/4 indgange R(0), R(2), R(4), ... R( $\frac{N}{2} - 2$ ) og N/4 indgange I(0), I(2), I(4), ... I( $\frac{N}{2} - 2$ ). De signaleksempleseringer, som er oplagret i registersektionerne med lige numre og beliggende i den venstre del af registret 4, tilføres indgangene R(i). De signaleksempleseringer, som er oplagret i registersektionerne med lige numre og hørende til den højre del af registret 4, tilføres indgangene I(i) i multiplikatoren 5 med omvendt polaritet. I figuren er det nævnte polaritetsskift symbolsk vist ved hjælp af invertionselementer 6, ... 8. Den til en indgang R(i) førte signaleksemplesering betragtes nu som den reelle del af et komplekst tal, hvis imaginære del er givet ved den signaleksemplesering, der tilføres den tilhørende indgang I(i). Således tilføres f.eks. det komplekse tal  $X_{2m} - j \frac{X_{\frac{N}{2} + 2m}}{2}$  til indgangsparret R(2m), I(2m).

I multiplikatoren 5 multipliceres dette komplekse tal ( $X_{2m} - j \frac{X_{\frac{N}{2} + 2m}}{2}$ ) med det komplekse tal  $\exp[-2\pi j \frac{m+1/8}{N}]$ , hvis værdi for hver værdi af m (m = 0, 1, 2, ... N/4 - 1) fremkommer fra en lagerenhed 9. Multiplikatoren frembringer herefter N/4 komplekse tal  $Z_{2m}$  (m = 0, 1, 2, ...  $\frac{N}{4} - 1$ ). Disse komplekse tal tilføres derefter et sædvanligt DFT-element 10 af ordenen N/4. Dette DFT-element frembringer N/4 komplekse tal  $\sigma_{2q}$  (q = 0, 1, 2, ...  $\frac{N}{4} - 1$ ). Til frembringelse af disse komplekse tal  $\sigma_{2q}$  føres der til DFT-elementet 10 koefficienter, som også dannes af lagerenheden 9. De N/4 komplekse tal  $\sigma_{2q}$  føres til indgangspar på en anden multiplikator 11, der er identisk med den første multiplikator 5. De komplekse tal  $\sigma_{2q}$  multipliceres igen med et komplekst tal  $\exp[-2\pi j \frac{q+1/8}{N}]$ , hvis værdi for hver værdi af q (q = 0, 1, 2, ...  $\frac{N}{4} - 1$ ) fremkommer fra lagerenheden 9. De på denne måde dannede N/4 produkter fremkommer som N/4 komplekse tal

$(C_{2q} + j \frac{C_{\frac{N}{2} + 2q}}{2})$  på komplekse par af udgange R'(0), I'(0), ... R'( $\frac{N}{2} - 2$ ), I'( $\frac{N}{2} - 2$ ) fra multiplikatoren 11. De ønskede N reelle eksempleringer i frekvensdomænet fremkommer nu på følgende måde: På de N/4 reelle udgange R'(2q) (q=0, 1, 2, ... N/4 - 1) er de N/4 eksempleringer  $C_{2q}$  tilgængelige. Ved at vende fortegn på disse eksempleringer  $C_{2q}$  ved hjælp af kredsene 12, 14 og 16 opnås de N/4 eksempleringer  $C_{n-1-2q}$ . De N/4 eksempleringer  $C_{\frac{N}{2} + 2q}$  er tilgængelige på de N/4 imaginære udgange I'(2q). Ved at vende fortegnet på disse eksempleringer  $C_{\frac{N}{2} + 2q}$  ved hjælp af kredsløb 13, 15 og 17 fås de N/4 eksempleringer  $C_{\frac{N}{2} - 1 - 2q}$ .

Kredsløbet ifølge opfindelsen er baseret på en ny diskret fouriertransformation. Denne nye transformation vil blive betegnet som en dobbelt ulige diskret fouriertransformation. Denne transformation er givet ved

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot \exp \left[ -2\pi j \frac{(2k+1)(2n+1)}{4N} \right] \quad (3)$$

Denne ligning, hvor  $n$  og  $k$  er hele tal, idet  $n$  og  $k$  hver har værdierne  $0, 1, 2, 3 \dots N-1$ , tilordner, på samme måde som det er tilfældet med den i ligning (1) definerede fouriertransformation,  $N$  fourierkoefficienter  $C_k$  til  $N$  eksempleringer  $X_n$  af et signal, hvor  $X_n$  og  $C_k$  i det almindelige tilfælde er komplekse tal.

Hvis  $T$  er intervallet mellem eksempleringerne  $X_n$  af tidssignalet, kan eksponentialfunktionen i den dobbelte ulige diskrete fouriertransformation ifølge ligning (3) skrives på følgende måde:

$$\exp \left[ -2\pi j \cdot \frac{(2k+1)}{2NT} (2n+1) \frac{T}{2} \right].$$

Heraf følger det at eksponentialfunktionens værdier skal tages til tidspunkter  $(2n+1)\frac{T}{2}$ , som er ulige multipla af  $\frac{T}{2}$ , og med frekvenser  $\frac{2k+1}{2NT}$ , der er ulige multipla af frekvensen  $\frac{1}{2NT}$ .

Det fremgår heraf, at den dobbelte ulige DFT (3) ud fra eksempleringer  $X_n$  af et tidssignal, der er taget til tidspunkter  $(2n+1)\frac{T}{2}$ , dvs. til ulige multipla af  $\frac{T}{2}$ , frembringer fourierkoefficienter  $C_k$ , der er beliggende ved ulige multipla af frekvensen  $\frac{1}{2NT}$ . Dette er vist i diagramform i fig. 5. Nærmere bestemt viser diagrammet 5a signaleksempleringerne  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ , der fremkommer til tidspunkterne  $\frac{T}{2}, 3\frac{T}{2}, \dots, (2N-1)\frac{T}{2}$ . Diagram 5b viser fourierkoefficienterne  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ , der dannes ved den dobbelte ulige DFT, og som fremkommer ved frekvenserne  $\frac{1}{2NT}, \frac{3}{2NT}, \dots, \frac{2N-1}{2NT}$ .

Foruden en dobbelt ulige diskret fouriertransformation kan der også defineres en dobbelt ulige invers fouriertransformation, nemlig på følgende måde:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot \exp \left[ 2\pi j \cdot \frac{(2k+1) \cdot (2n+1)}{4N} \right]. \quad (4)$$

Ved benyttelse af eksponentialfunktionens egenskaber kan det vises, at den dobbelte ulige DFT har følgende egenskaber:

- Hvis eksempleringerne  $X_n$  af et signal er reelle, vil det for de komplekse fourierkoefficienter gælde, at:

$$C_k = -\bar{C}_{N-1-k} \quad (5)$$

hvor  $\bar{C}_{N-1-k}$  repræsenterer den komplekst konjugerede værdi af  $C_{N-1-k}$ ;

- Hvis fourierkoefficienterne  $C_k$  er reelle, vil det for de komplekse signaleksempleringer gælde, at:

$$X_n = -\bar{X}_{N-1-n}; \quad (6)$$

- Af de to egenskaber (5) og (6) følger det, når både eksempleringerne  $X_n$  og fourierkoefficienterne  $C_k$  er reelle, at:

$$X_n = -X_{N-1-n} \quad (7)$$

$$C_k = -C_{N-1-k}. \quad (8)$$

Ved hjælp af de foregående ligninger skal det nu vises, at der i kredsløbet ifølge opfindelsen i fig. 3 udføres en dobbelt ulige fouriertransformation.

Det følger af ligning (8) at det kun er nødvendigt at beregne koefficienter med lige eller ulige numre, fordi koefficienterne med henholdsvis ulige eller lige numre kan afledes herfra. Hvis specielt koefficienterne med lige numre beregnes og hvis  $k$  kan forudsættes at være lig med  $2q$  (hvor  $q = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ), vil ligning (3) omformes til:

$$C_{2q} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot \exp \left[ -2\pi j \cdot \frac{(4q+1) \cdot (2n+1)}{4N} \right] \quad (9)$$

Serien på  $N$  eksempleringer  $X_n$  (hvor  $0 \leq n \leq N-1$ ) kan opspaltes i en serie med  $N/2$  eksempleringer  $X_n$  (hvor  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ ) og en serie med  $N/2$  eksempleringer  $X_{\frac{N}{2} + n}$  (hvor  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ ). Ved udnyttelse af eksponentialfunktionens kendte egenskaber omformes ligning (9) til:

$$C_{2q} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (X_n - j X_{\frac{N}{2} + n}) \exp \left[ -2\pi j \cdot \frac{(4q+1) \cdot (2n+1)}{4N} \right]. \quad (10)$$

Hvis serien af eksempleringer  $X_n$  og  $X_{\frac{N}{2} + n}$  herefter betragtes som sammensat af eksempleringer  $X_{2m}$  og  $X_{\frac{N}{2} + 2m}$  med lige positioner og eksempleringer  $X_{2m+1}$  og

$X_{\frac{N}{2} + 2m + 1}$  med ulige positioner, hvor  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, N/4 - 1$ , kan ligning

(10) skrives på følgende måde:

$$C_{2q} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} (X_{2m} - j X_{\frac{N}{2} + 2m}) \cdot \exp \left[ -2\pi j \cdot \frac{(4q+1) \cdot (4m+1)}{4N} \right] \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} (X_{2m+1} - j X_{\frac{N}{2} + 2m+1}) \cdot \exp \left[ -2\pi j \cdot \frac{(4q+1) \cdot (4m+3)}{4N} \right].$$

Ligning (11) definerer  $\frac{N}{2}$  fourierkoefficienter  $C_{2q}$ , hvor  $q = 0, 1, 2, (\frac{N}{2} - 1)$ .

Disse  $\frac{N}{2}$  fourierkoefficienter kan opspaltes i  $N/4$  fourierkoefficienter  $C_{2q}$ , hvor  $q = 0, 1, 2, \dots, N/4 - 1$ , og  $N/4$  fourierkoefficienter  $C_{\frac{N}{2} + 2q}$ , hvor  $q = 0, 1, 2, \dots, N/4 - 1$ .

Ved benyttelse af ligning (11) til beregning af koefficienterne  $C_{2q}$

(hvor  $0 \leq q \leq \frac{N}{4} - 1$ ) samt ved anvendelse af eksponentialfunktionens

kendte egenskaber kan det bevises, at der kan tilvejebringes  $N/4$  komplekse tal

$C_{2q} + j C_{\frac{N}{2} + 2q}$ , der tilfredsstiller ligningen:

$$C_{2q} + j C_{\frac{N}{2} + 2q} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{4} - 1} (X_{2m} - j X_{\frac{N}{2} + 2m}) \cdot \exp \left[ -2\pi j \frac{(4q+1)(4m+1)}{4N} \right]. \quad (12)$$

Denne ligning kan yderligere reduceres til:

$$C_{2q} + j C_{\frac{N}{2} + 2q} = \frac{2}{N} \cdot \exp \left[ -2\pi j \frac{q + \frac{1}{8}}{N} \right] \times \quad (13)$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{4} - 1} \left[ (X_{2m} - j X_{\frac{N}{2} + 2m}) \cdot \exp \left( -2\pi j \frac{m + \frac{1}{8}}{N} \right) \right] \exp \left[ -2\pi j \frac{mq}{N} \right].$$

Hvis indgangssignalet nu tilfredsstiller ligning (7), er alle fourierkoefficienter reelle, og den reelle og den imaginære del af ligningen (12) eller (13) vil således hver repræsentere en fourierkoefficient. De  $N/4$  komplekse udgangstal fra multiplikatoren 11 i fig. 3 svarer følgelig til  $N/2$  reelle fourierkoefficienter. De øvrige  $N/2$  fourierkoefficienter beregnes nu ved hjælp af ligning (8).

I det foregående er der kun beskrevet det tilfælde, hvor reelle tidssignaleksempleringer omformes til reelle frekvenssignaleksempleringer, nemlig ved anvendelse af ligning (3). Med udgangspunkt i ligning (4) kan det bevises, at indretningen ifølge fig. 3 også er egnet til omformning af reelle frekvenssignaleksempleringer til reelle tidssignaleksempleringer.

Af det foranstående fremgår det, at tallet  $N$  skal være et multiplum af 4, hvilket naturligvis ikke er nogen begrænsning, hvad angår antallet af eksempleringer der skal omformes. Hvis  $N/4$  er en potens af 2, vil de kendte algoritmer for DFT fortrinsvis blive anvendt til realisering af elementet 10.

## P A T E N T K R A V

1. Kredsløb til beregning af  $N$  dobbelte, ulige, diskrete fourierkoefficienter  $C_0, C_1, C_2 \dots C_{N-1}$  ud fra en symmetrisk sekvens af  $N$  digitale eksempleringer  $X_0, X_1, X_2 \dots X_{N-1}$  af et reelt og symmetrisk indgangssignal, hvor  $N$  er et med en faktor 4 deleligt tal, hvilket kredsløb omfatter en lagerenhed (4) til oplagring af de  $N$  digitale eksempleringer og med i det mindste en første og en anden udgang, en til lagerenhedens udgange koblet første multiplikator (5) til multiplikation af komplekse tal og med en tilknyttet komplekstalsgenerator (9), samt en med multiplikatoren (10) forbundet DFT (diskret fourier-transformation)-beregnerenhed, k e n d e t e g n e t ved, at lagerenheden (4) er indrettet til enten på sin første udgang at frembringe de lige nummererede digitale eksempleringer af en første sekvens af digitale eksempleringer dannet af de  $N/2$  digitale eksempleringer  $X_0, X_1, X_2 \dots X_{N/2-1}$  og på sin anden udgang frembringe de lige nummererede digitale eksempleringer af en anden sekvens af digitale eksempleringer dannet af de  $N/2$  digitale eksempleringer  $X_{N/2}, X_{N/2+1}, X_{N/2+2} \dots X_{N-1}$ , eller ved sin første udgang at frembringe de ulige nummererede digitale eksempleringer af nævnte første sekvens og ved sin anden udgang frembringe de ulige nummererede digitale eksempleringer af nævnte anden sekvens, at hver digital eksemplering  $X_i$  på den første udgang med en digital eksemplering  $X_{N/2+i}$  på den anden udgang danner et eksempleringsspar, hvilke  $N/4$  eksempleringsspar føres til den første multiplikator(S), der som svar på disse eksempleringsspar og på  $N/4$  komplekse tal fra den første komplekstalsgenerator (9) frembringer  $N/4$  første komplekse produkter, som føres til DFT-beregnerenheden (10) til frembringelse af  $N/4$  andre komplekse produkter, som føres til en anden multiplikator (11) til multiplikation med komplekse tal fra en til den anden multiplikator knyttet anden komplekstalsgenerator (9), som frembringer  $N/4$  andre komplekse tal, hvilken anden multiplikator som svar på de  $N/4$  andre komplekse produkter og de  $N/4$  andre komplekse tal frembringer  $N/4$  tredje komplekse produkter, hvis reelle og imaginære dele udgør enten de lige nummererede koefficienter i henholdsvis den første serie af koefficienter  $C_0, C_1 \dots C_{N/2-1}$  og den anden serie af koefficienter  $C_{N/2}, C_{N/2+1} \dots C_{N-1}$  eller de ulige nummererede koefficienter i henholdsvis den første og den anden serie af koefficienter, og at de reelle og imaginære dele af de tredje komplekse produkter selektivt føres til inverterkredse (13,15,17) til invertering af disse deles polaritet til frembringelse af de resterende koefficienter.

2. Kredsløb til beregning af  $N$  digitale eksempleringer  $X_0, X_1, X_2 \dots X_{N-1}$  af et reelt og symmetrisk signal ud fra en symmetrisk sekvens af  $N$  dobbelte, ulige, diskrete fourierkoefficienter  $C_0, C_1, C_2 \dots C_{N-1}$ , hvor  $N$  er et med en faktor 4 deleligt tal, hvilket kredsløb omfatter en lagerenhed (4) til oplagring af de  $N$  koefficienter og med i det mindste en første og en anden udgang, en til lagerenhedens udgange koblet første multiplikator (5) til multiplikation af komplekse tal til frembringelse af første komplekse produkter og med en tilknyttet komplekstalsgenerator (9) samt en til multiplikatoren forbundet IDFT (10) (invers-diskret fouriertransformation) -beregnerenhed, kendt ved, at lagerenheden (4) er indrettet til enten på sin første udgang at frembringe de lige nummererede koefficienter i en første sekvens af koefficienter dannet af de  $N/2$  koefficienter  $C_0, C_1, C_2 \dots C_{N/2-1}$  og sin anden udgang frembringe de lige nummererede koefficienter i en anden sekvens af koefficienter dannet af de  $N/2$  koefficienter  $C_{N/2}, C_{N/2+1} \dots C_{N-1}$  eller ved sin første udgang at frembringe de ulige nummererede koefficienter i nævnte første sekvens og ved sin anden udgang frembringe de ulige nummererede koefficienter i nævnte anden sekvens, at en koefficient  $C_i$  ved den første udgang og en koefficient  $C_{N/2+i}$  ved den anden udgang hver gang danner et koefficientpar, hvilke  $N/4$  koefficientpar føres til den første multiplikator (5), der som svar på disse koefficientpar og på  $N/4$  komplekse tal fra den første komplekstalsgenerator (9) frembringer  $N/4$  første komplekse produkter, som føres til IDFT-beregnerenheden (10) til frembringelse af  $N/4$  andre komplekse produkter, som føres til en anden multiplikator (11) til multiplikation af komplekse tal og med en tilknyttet anden komplekstalsgenerator (9) til frembringelse af  $N/4$  andre komplekse tal, hvilken anden multiplikator som svar på de  $N/4$  andre komplekse produkter og de  $N/4$  andre komplekse tal frembringer  $N/4$  tredje komplekse produkter, hvis reelle og imaginære dele enten udgør de lige nummererede digitale eksempleringer af henholdsvis den første serie af digitale eksempleringer  $X_0, X_1 \dots X_{N/2-1}$  og den anden serie af digitale eksempleringer  $X_{N/2}, X_{N/2+1} \dots X_{N-1}$  eller de ulige nummererede digitale eksempleringer af henholdsvis nævnte første og nævnte anden serie af digitale eksempleringer, og at de reelle og imaginære dele af de tredje komplekse produkter selektivt føres til inverterkredse (13,15,17) til invertering af disse deles polaritet til frembringelse af de resterende digitale eksempleringer.

Fremdragne publikationer:

---

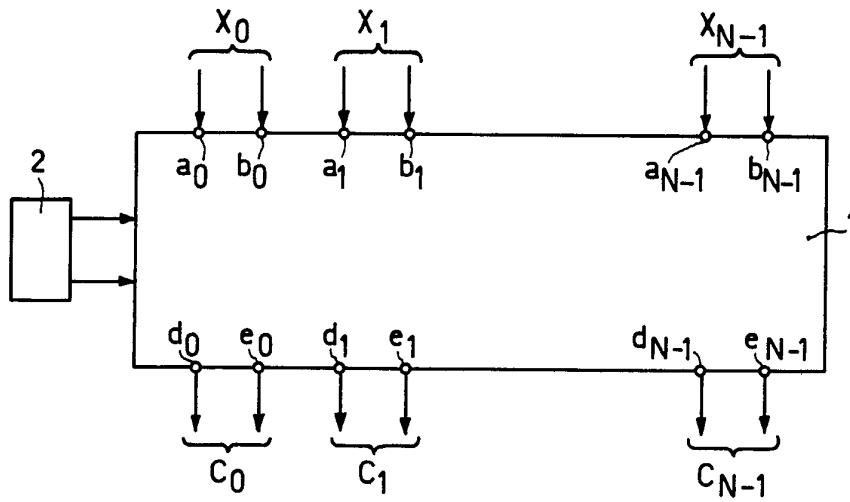


Fig. 2

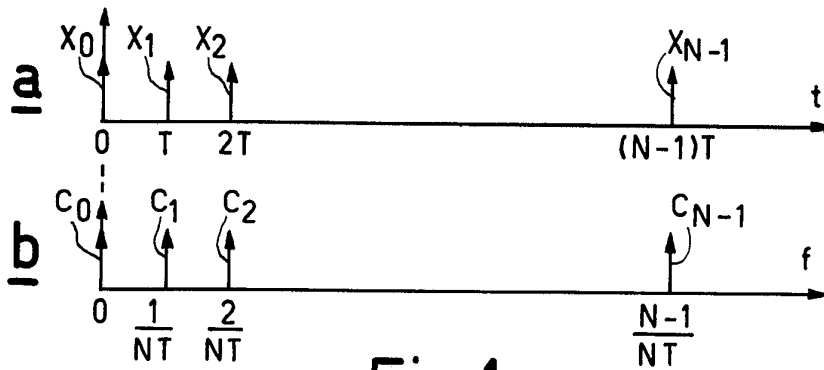


Fig. 1

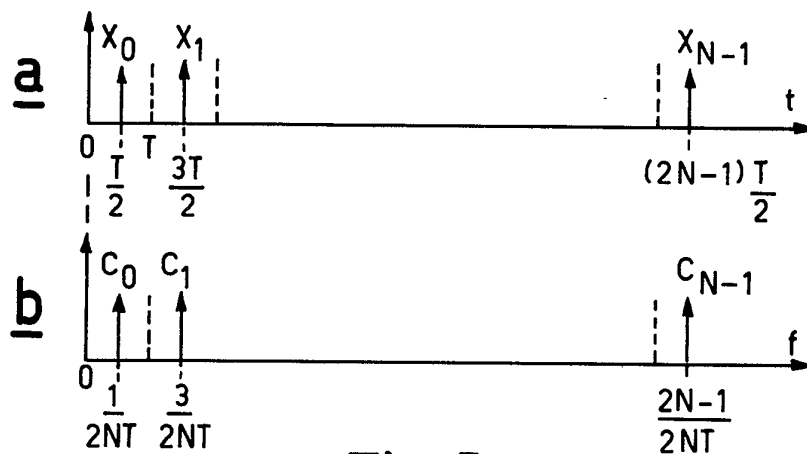


Fig. 5



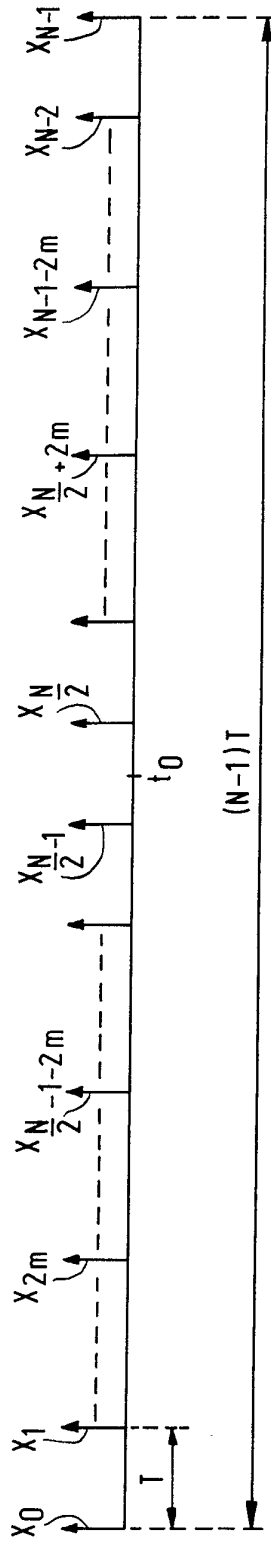


Fig.4