



(12) 发明专利申请

(10) 申请公布号 CN 114608564 A

(43) 申请公布日 2022. 06. 10

(21) 申请号 202210507489.6

(22) 申请日 2022.05.11

(71) 申请人 北京航空航天大学
地址 100191 北京市海淀区学院路37号

(72) 发明人 王岩 杨悦婷 杨健 郭雷
陈泰航

(74) 专利代理机构 北京科迪生专利代理有限公司 11251
专利代理师 金怡 顾炜

(51) Int. Cl. .
G01C 21/02 (2006.01)
G01C 21/20 (2006.01)

权利要求书2页 说明书6页 附图2页

(54) 发明名称

一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法

(57) 摘要

本发明涉及一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法,首先,利用偏振传感器获取偏振矢量信息,利用星敏感器获得星光矢量信息,根据二者计算月亮矢量和星光矢量之间的夹角;其次,通过天体几何位置关系,建立上一步中得到的夹角和由观测者位置O指向月亮点M的矢量之间的关系,求出该矢量的最优解;再次,通过所求最优解,根据地球椭球体方程和以最优解为方向且过月亮点的直线方程,计算地球与该直线的交点坐标;最后,根据交点坐标计算观测者所在位置的经度、纬度值。本发明通过将夜间天空偏振信息和星光信息相结合,解决大气层内无人系统的自主定位问题。



1. 一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法,其特征在于,包括如下步骤:

(1) 利用偏振传感器获取两个不同观测方向上被观测天空点的偏振矢量 $\mathbf{p}_1^b, \mathbf{p}_2^b$, 利用星敏传感器获得星光矢量 $\mathbf{s}_k^b$, 其中, k 表示第 k 个星光矢量, b 表示载体坐标系, 由于偏振矢量 $\mathbf{p}_1^b, \mathbf{p}_2^b$ 和月亮矢量垂直, 从而获得月亮矢量和星光矢量之间的夹角 α_k ;

(2) 通过天体几何位置关系, 建立上一步中得到的夹角 α_k 和由观测者位置 O 指向月亮点 M 的矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的关系; 根据地球系下的星光矢量 $\mathbf{s}_k^e$ 和夹角 α_k , 定义矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的优化问题, 并求出该优化问题的最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$; 其中, 所述地球系为 e 系;

(3) 通过上一步得到的最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$, 根据地球椭球体方程和以最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 为方向且过观测者位置 O 、月亮点 M 的直线 OM 的直线方程, 计算地球与直线 OM 的交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 的坐标 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$, 其中, x_p, y_p, z_p 表示交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 在 e 系下的三维坐标值;

(4) 根据所述交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 的坐标 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$ 计算观测者位置的经度、纬度值 λ, L 。

2. 根据权利要求1所述的一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法, 其特征在于: 所述步骤(1)中, 所述夹角 α_k , 表示为:

$$\alpha_k = \arccos \left[\left(\mathbf{p}_1^b \times \mathbf{p}_2^b \right) \cdot \mathbf{s}_k^b \right] = \arccos \left(\left| \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^b & \mathbf{p}_2^b & \mathbf{s}_k^b \end{bmatrix}^T \right| \right)$$

其中, 夹角 α_k 的取值范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$ 。

3. 根据权利要求2所述的一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法, 其特征在于: 所述步骤(2)中, 通过天体几何位置关系, 建立 e 系下的夹角 α_k 和由观测者位置 O 指向月亮点 M 的矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的关系如下:

$$\cos \alpha_k = \left(\mathbf{s}_k^e \right)^T \mathbf{m}_o^e$$

其中, $\mathbf{s}_k^e$ 为 e 系下的星光矢量, 根据天文年历求取;

为了求解矢量 $\mathbf{m}_o^e$, 定义优化问题为:

$$\min_{\mathbf{m}_o^e} J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\left(\mathbf{s}_k^e \right)^T \mathbf{m}_o^e - \cos \alpha_k \right)^2 = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A} \mathbf{m}_o^e - \mathbf{B} \right\|_2^2$$

$$\text{s. t. } \left\| \mathbf{m}_o^e \right\|_2 = 1$$

其中, J 为目标函数, $\mathbf{A}$ 矩阵和 $\mathbf{B}$ 矩阵的具体表示如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^e & \mathbf{s}_2^e & \cdots & \mathbf{s}_n^e \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cdots & \cos \alpha_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$$

在上式中, $\mathbf{s}_1^e, \mathbf{s}_2^e, \cdots, \mathbf{s}_n^e$ 为当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时对应的 $\mathbf{s}_k^e$ 值, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时对应的 α_k 值, $\mathbb{R}^{n \times 3}, \mathbb{R}^n$ 分别表示 $n \times 3$ 和 $n \times 1$ 维的实数集, 将 $\mathbf{m}_o^e$ 记为 $\mathbf{x}$, 则当拉格朗日乘子 μ 满足如下关系式时:

$$f(\mu) = \left\| (A^T A + \mu I)^{-1} A^T B \right\|_2^2 = 1$$

优化问题的最优解如下:

$$\mathbf{x}^* = (A^T A + \mu I)^{-1} A^T B$$

其中, I 为单位矩阵;

求解方程 $f(\mu) = 1$, 并挑选出其中对应目标函数 J 最小的解, 记为 μ^* , 进而得到优化问题最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 。

4. 根据权利要求3所述的一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法, 其特征在于: 所述步骤(3)中, 所述直线OM的直线方程表示为:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{p}_m^e + \mathbf{m}_o^{e*} t$$

其中, $\mathbf{p}^e = [x^e, y^e, z^e]^T$ 代表OM直线上的任意点, x^e, y^e, z^e 代表该点的三维坐标值, t 代表直线方程的参数, $\mathbf{p}_m^e$ 代表月亮位置, 根据天文年历求取;

上式定义了以最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 为方向向量且过月亮位置 $\mathbf{p}_m^e$ 的直线, 将地球椭球方程与该直线方程联立, 求解得到观测者位置, 即直线与地球的交点 $\mathbf{p}_{it}^e$, 假设 $\mathbf{p}_m^e = [x_0, y_0, z_0]^T$ 并且 $\mathbf{m}_o^{e*} = [m, n, p]^T$, 其中, x_0, y_0, z_0 表示月亮位置 $\mathbf{p}_m^e$ 在 e 系下的三维坐标值, m, n, p 表示最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 在 e 系下的三维坐标值; 那么交点 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$ 由上述直线方程求出, 其中直线方程的参数 t 计算如下:

$$t = \frac{-B_t \pm \sqrt{B_t^2 - 4A_t C_t}}{2A_t}$$

$$A_t = m^2 R_p^2 + n^2 R_p^2 + p^2 R_e^2$$

$$B_t = 2x_0 m R_p^2 + 2y_0 n R_p^2 + 2z_0 p R_e^2$$

$$C_t = x_0^2 R_p^2 + y_0^2 R_p^2 + z_0^2 R_e^2 - R_e^2 R_p^2$$

其中, R_e 和 R_p 分别为椭球长半轴和短半轴, 根据地球标准模型获得; 上述计算结果包含两个交点, 其中绝对值更小的直线方程的参数 t 对应的结果为待求的观测者位置, 即交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 。

5. 根据权利要求4所述的一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法, 其特征在于: 所述步骤(4)中, 根据上一步得到的交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 的坐标 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$ 计算观测者位置的经纬度, 计算公式为:

$$\lambda = \text{atan } 2(y_p, x_p)$$

$$\tan L = \frac{1}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \left[z_p + \frac{R_e e_f^2 \tan L}{\sqrt{1 + (1 - e_f^2) \tan^2 L}} \right]$$

其中, e_f 为地球椭球偏心率, 根据地球标准模型获得; λ 、 L 是观测者位置的经度、纬度。

一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法

技术领域

[0001] 本发明属于无人系统自主定位领域,具体涉及一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法。

背景技术

[0002] 夜间环境具有能见度低、可视性差的特点,具备夜间导航能力对于无人系统完成任务有着重要的意义。针对夜间陌生的导航环境,单一的导航方式都存在各自的局限性,因此,在实际应用中常采用多种手段组合进行导航。惯性、天文和卫星的组合模式是目前常用的导航方法。但是,惯导存在误差积累,卫星导航在城市建筑区域或电磁干扰环境下容易失效。天文导航是常用的自主导航手段,基于星光信息的天文导航常采用星敏感器作为测量仪器,具有高精度的优点。但由于星光距离地球很远,而地球上载体的运动又不足以改变星矢量的指向,因此,星敏感器需要结合其他导航方式进行组合。而现有的惯性/天文组合定位又会受到惯导所提供的水平基准的精度限制,随着惯导误差的积累,定位精度也会逐渐下降。

[0003] 偏振光导航也是一种基于天空信息的导航方法,具有隐蔽性好,误差不随时间积累,不易受到外界干扰的优点。不同于遥远的星光,夜间的偏振光由地球的近天体——月亮产生。因此,由月光形成的天空偏振信息和星光信息之间的夹角会随着载体在地球上观测位置的不同而改变,这一夹角可以直接由偏振传感器和星敏感器测得,不依赖于载体先验姿态信息,因此,通过结合夜间偏振光和星光的信息特点,可实现大气层内夜间环境下不依赖于惯导姿态平台的自主定位方法,在卫星信号失效条件下,仍提供高精度的位置信息。

[0004] 现有组合定位方法,如论文“一种基于 INS/GPS/CNS的全信息导航滤波算法”利用了GPS的信息,系统抗干扰能力较弱,自主性差;而基于偏振和星光信息的组合定位方法,如已授权的中国发明专利“一种基于偏振/天文辅助的自主导航定位方法(ZL201911250913.8)”利用了惯导系统提供的姿态平台,定位结果会受到惯导精度的限制。

发明内容

[0005] 考虑现有技术存在的问题,本发明提出一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法,该方法通过将夜间天空偏振信息和星光信息相结合,解决大气层内无人系统的自主定位问题。

[0006] 为达到上述目的,本发明采用的技术方案为:

一种基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法,包括如下步骤:

(1) 利用偏振传感器获取两个不同观测方向上被观测天空点的偏振矢量 p_1^b, p_2^b , 利用星敏感器获得星光矢量 s_k^b , 其中, k 表示第 k 个星光矢量, b 表示载体坐标系, 由于偏振矢量 p_1^b, p_2^b 和月亮矢量之间存在垂直关系, 因此, 获得月亮矢量和星光矢量之间的夹角 α_k ;

(2) 通过天体几何位置关系, 建立上一步中得到的夹角 α_k 和由观测者位置 O 指向

月亮点M的矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的关系。根据地球系下的星光矢量 $\mathbf{s}_k^e$ 和夹角 α_k ,定义矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的优化问题,并求出该问题的最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$;其中,所述地球系为e系;

(3)通过上一步得到的最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$,根据地球椭球体方程和以最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 为方向且过观测者位置0、月亮点M的直线OM的直线方程,计算地球与直线OM的交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 的坐标 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$,其中, x_p, y_p, z_p 表示交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 在e系下的三维坐标值;

(4)根据交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 的坐标 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$ 计算观测者位置的经度、纬度值 λ, L 。

[0007] 进一步地,所述步骤(1)中,所述夹角 α_k ,表示为:

$$\alpha_k = \arccos \left[\left(\mathbf{p}_1^b \times \mathbf{p}_2^b \right) \cdot \mathbf{s}_k^b \right] = \arccos \left(\left[\mathbf{p}_1^b \quad \mathbf{p}_2^b \quad \mathbf{s}_k^b \right]^T \right)$$

其中,夹角 α_k 的取值范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$ 。

[0008] 进一步地,所述步骤(2)中,通过天体几何位置关系,建立e系下的夹角 α_k 和由观测者位置0指向月亮点M的矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的关系如下:

$$\cos \alpha_k = \left(\mathbf{s}_k^e \right)^T \mathbf{m}_o^e$$

其中, $\mathbf{s}_k^e$ 为e系下的星光矢量,根据天文年历求取;

为了求解矢量 $\mathbf{m}_o^e$,定义优化问题为:

$$\min_{\mathbf{m}_o^e} J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\left(\mathbf{s}_k^e \right)^T \mathbf{m}_o^e - \cos \alpha_k \right)^2 = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A} \mathbf{m}_o^e - \mathbf{B} \right\|_2^2$$

$$\text{s.t. } \left\| \mathbf{m}_o^e \right\|_2 = 1$$

其中, J 为目标函数, $\mathbf{A}$ 矩阵和 $\mathbf{B}$ 矩阵的具体表示如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^e & \mathbf{s}_2^e & \cdots & \mathbf{s}_n^e \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cdots & \cos \alpha_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$$

在上式中, $\mathbf{s}_1^e \quad \mathbf{s}_2^e \quad \cdots \quad \mathbf{s}_n^e$ 为当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时对应的 $\mathbf{s}_k^e$ 值, $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n$ 为当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时对应的 α_k 值, $\mathbb{R}^{n \times 3}$, $\mathbb{R}^n$ 分别表示 $n \times 3$ 和 $n \times 1$ 维的实数集,将 $\mathbf{m}_o^e$ 记为 $\mathbf{x}$,则当拉格朗日乘子 μ 满足如下关系式时:

$$f(\mu) = \left\| \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \right\|_2^2 = 1$$

其中, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵;

优化问题的最优解如下:

$$\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$$

求解方程 $f(\mu)=1$,并挑选出其中对应目标函数 J 最小的解,记为 μ^* ,进而得到优化问题最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 。

[0009] 进一步地,所述步骤(3)中,所述直线OM的直线方程表示为:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{p}_m^e + \mathbf{m}_o^{e*} t$$

其中, $\mathbf{p}^e = [x^e, y^e, z^e]^T$ 代表OM直线上的任意点, x^e, y^e, z^e 代表该点的三维坐标值, t 代表直线方程的参数, $\mathbf{p}_m^e$ 代表月亮位置, 根据天文年历求取;

上式定义了以最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 为方向向量且过月亮位置 $\mathbf{p}_m^e$ 的直线, 将地球椭球方程与该直线方程联立, 求解得到观测者位置, 即直线与地球的交点 $\mathbf{p}_{it}^e$, 假设 $\mathbf{p}_m^e = [x_0, y_0, z_0]^T$ 并且 $\mathbf{m}_o^{e*} = [m, n, p]^T$, 其中, x_0, y_0, z_0 表示月亮位置 $\mathbf{p}_m^e$ 在 e 系下的三维坐标值, m, n, p 表示最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 在 e 系下的三维坐标值。那么交点 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$ 由上述直线方程求出, 其中直线方程的参数 t 计算如下:

$$t = \frac{-B_t \pm \sqrt{B_t^2 - 4A_t C_t}}{2A_t}$$

$$A_t = m^2 R_p^2 + n^2 R_p^2 + p^2 R_e^2$$

$$B_t = 2x_0 m R_p^2 + 2y_0 n R_p^2 + 2z_0 p R_e^2$$

$$C_t = x_0^2 R_p^2 + y_0^2 R_p^2 + z_0^2 R_e^2 - R_e^2 R_p^2$$

其中, R_e 和 R_p 分别为椭球长半轴和短半轴, 根据地球标准模型获得; 上述计算结果包含两个交点, 其中绝对值更小的直线方程的参数 t 对应的结果为待求的观测者位置, 即交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 。

[0010] 进一步地, 所述步骤(4)中, 根据上一步得到的交点坐标 $\mathbf{p}_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$ 计算观测者位置的经纬度, 计算公式为:

$$\lambda = \text{atan } 2(y_p, x_p)$$

$$\tan L = \frac{1}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \left[z_p + \frac{R_e e_f^2 \tan L}{\sqrt{1 + (1 - e_f^2) \tan^2 L}} \right]$$

其中, e_f 为地球椭球偏心率, 根据地球标准模型获得; λ 、 L 是观测者位置的经度、纬度。

[0011] 本发明与现有技术相比优点在于:

(1) 本发明与现有基于偏振/星光信息的定位方法相比, 不依赖于先验姿态信息, 不受惯导精度的限制。

[0012] (2) 本发明所设计组合方式在大气层内夜间陌生环境中具有较强的适用性, 可作为卫星信号失效条件下的一种有效的自主定位手段。

[0013] (3) 本发明可用于无人机、无人船、无人车等无人系统的位置获取, 提高无人系统在无卫星信号下的自主导航能力。

附图说明

[0014] 图1为本发明的基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法流程图;
图2为本发明的定位原理示意图。

具体实施方式

[0015] 为了使本发明的目的、技术方案及优点更加清楚明白,以下结合附图及实施例,对本发明进行进一步详细说明。应当理解,此处所描述的具体实施例仅仅用以解释本发明,并不用于限定本发明。此外,下面所描述的本发明各个实施方式中所涉及到的技术特征只要彼此之间未构成冲突就可以相互组合。

[0016] 如图1所示,本发明的基于夜间月光偏振-星光信息融合的组合定位方法的具体实现步骤如下:

步骤1、利用偏振传感器获取两个不同观测方向上被观测天空点的偏振矢量 $\mathbf{p}_1^b$, $\mathbf{p}_2^b$, 利用星敏传感器获得星光矢量 $\mathbf{s}_k^b$, 其中, k 表示第 k 个星光矢量, b 表示载体坐标系, 由于偏振矢量 $\mathbf{p}_1^b$, $\mathbf{p}_2^b$ 和月亮矢量之间存在垂直关系, 因此, 获得月亮矢量和星光矢量之间的夹角 α_k :

$$\alpha_k = \arccos [(\mathbf{p}_1^b \times \mathbf{p}_2^b) \cdot \mathbf{s}_k^b] = \arccos \left(\left| \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^b & \mathbf{p}_2^b & \mathbf{s}_k^b \end{bmatrix}^T \right| \right) \quad (1)$$

其中, 夹角 α_k 的取值范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$ 。

[0017] 步骤2、通过天体几何位置关系, 如图2所示, 图中 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 在 b 系下的表示即为上述步骤中的 $\mathbf{p}_1^b, \mathbf{p}_2^b$, 图中 $\mathbf{s}_k$ 表示星光矢量, 其在地球系 (e 系) 和 b 系下的表示分别为 $\mathbf{s}_k^e$ 和 $\mathbf{s}_k^b$, 图中 E 表示地球球心, P_{it} 表示观测者位置的三维坐标; 建立 e 系下夹角 α_k 和由观测者位置 O 指向月亮点 M 的矢量 $\mathbf{m}_o^e$ 的关系如下:

$$\cos \alpha_k = (\mathbf{s}_k^e)^T \mathbf{m}_o^e \quad (2)$$

其中, $\mathbf{m}_o^e$ 为图2中矢量 $\mathbf{m}_o$ 在 e 系下的表示, $\mathbf{s}_k^e$ 为 e 系下的星光矢量, 根据天文年历求取;

为了求解矢量 $\mathbf{m}_o^e$, 定义优化问题为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{m}_o^e} J &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left((\mathbf{s}_k^e)^T \mathbf{m}_o^e - \cos \alpha_k \right)^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{m}_o^e - \mathbf{B}\|_2^2 \\ \text{s. t. } &\|\mathbf{m}_o^e\|_2 = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, J 为目标函数, $\mathbf{A}$ 矩阵和 $\mathbf{B}$ 矩阵的具体表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^e & \mathbf{s}_2^e & \cdots & \mathbf{s}_n^e \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 3} \\ \mathbf{B} &= [\cos \alpha_1 \quad \cos \alpha_2 \quad \cdots \quad \cos \alpha_n]^T \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

在上式中, $\mathbf{s}_1^e \quad \mathbf{s}_2^e \quad \cdots \quad \mathbf{s}_n^e$ 为当 $k=1, 2, \dots, n$ 时对应的 $\mathbf{s}_k^e$ 值, $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n$ 为当 $k=1, 2, \dots, n$ 时对应的 α_k 值, $\mathbb{R}^{n \times 3}$, $\mathbb{R}^n$ 分别表示 $n \times 3$ 和 $n \times 1$ 维的实数集, 将公式 (3) 二范数展开, 并将 $\mathbf{m}_o^e$ 记为 $\mathbf{x}$, 则这一优化问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \\ \text{s. t. } \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

该优化问题的最优性条件如下:

$$\begin{cases} (A^T A + \mu I) \mathbf{x} - A^T \mathbf{B} = \mathbf{O} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{O}$ 表示 0 向量, 维度为 3×1 , I 为单位矩阵。则当拉格朗日乘子 μ 满足如下关系式时:

$$f(\mu) = \left\| (A^T A + \mu I)^{-1} A^T \mathbf{B} \right\|_2^2 = 1 \quad (6)$$

优化问题的最优解如下:

$$\mathbf{x}^* = (A^T A + \mu I)^{-1} A^T \mathbf{B} \quad (7)$$

为了求解作为未知数的拉格朗日乘子 μ , 令矩阵 $\mathbf{P} = A^T A$ 以及 $\mathbf{q} = A^T \mathbf{B}$, $\mathbf{P}$ 可以分解为 $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}$, 其中 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为正交矩阵, $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示 3×3 的实数集, $\mathbf{\Lambda}$ 是以矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值 μ_1, μ_2, μ_3 为对角线元素的对角阵。进一步, 将 $\mathbf{P}, \mathbf{q}$ 的表示代入公式 (6), 可将 $f(\mu)$ 转换为:

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{q}_i^2}{(\mu_i + \mu)^2} \quad (8)$$

其中, $\tilde{q}_i$ 代表由 $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}$ 计算得到的向量的第 i 个元素。

[0018] 进一步, 求解一元方程 $f(\mu) = 1$, 并挑选出其中对应目标函数 J 最小的解, 记为 μ^* 。其中, 目标函数 J 和 μ 的关系可以由公式 (3) 和公式 (7) 化简得到, 表示为:

$$J = \frac{1}{2} \left\| A \mathbf{x}^* - \mathbf{B} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2 \tilde{b}_i^2}{(\mu_i + \mu)^2} + \sum_{i=4}^n \tilde{b}_i^2 \quad (9)$$

其中, $\tilde{b}_i$ 代表由 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}$ 计算得到的向量的第 i 个元素。 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对 $\mathbf{A}$ 进行 SVD 分解得到的正交矩阵。将 μ^* 代入公式 (7), 即可得到优化问题最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 。

[0019] 步骤 3、通过上一步得到的 $\mathbf{m}_o^{e*}$, 计算地球与以 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 为方向且过月亮点 $\mathbf{M}$ 的直线 $\mathbf{OM}$ 的交点, $\mathbf{OM}$ 的直线方程表示为:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{p}_m^e + \mathbf{m}_o^{e*} t \quad (10)$$

其中, $\mathbf{p}^e = [x^e, y^e, z^e]^T$ 代表 $\mathbf{OM}$ 直线上的任意点, x^e, y^e, z^e 代表该点的三维坐标值, t 代表直线方程的参数, $\mathbf{p}_m^e$ 代表月亮位置, 可以根据天文年历求取;

上式定义了以最优解 $\mathbf{m}_o^{e*}$ 为方向向量且过月亮位置 $\mathbf{p}_m^e$ 的直线, 为求该直线与地球的交点, 需表示出地球方程, 地球椭球体的方程描述为:

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1 \quad (11)$$

其中, x, y, z 代表椭球上任意一点的三维坐标值, R_e 和 R_p 分别为椭球长半轴和短半轴, 根据地球标准模型获得; 将上面两式联立, 求解得到观测者位置的三维坐标, 即直线与地球的交点 $\mathbf{p}_{it}^e$ 的三维坐标, 对应图 2 中 $\mathbf{p}_{it}$ 在 e 系下的表示, 假设 $\mathbf{p}_m^e = [x_0, y_0, z_0]^T$ 并且 $\mathbf{m}_o^{e*} = [m, n, p]^T$, 其中, x_0, y_0, z_0 表示月亮位置 $\mathbf{p}_m^e$ 在 e 系下的三维坐标值, m, n, p 表示最优解

m_o^{e*} 在 e 系下的三维坐标值;那么 p_{it}^e 的坐标的计算公式如公式(10),直线方程的参数 t 计算如下:

$$t = \frac{-B_t \pm \sqrt{B_t^2 - 4A_t C_t}}{2A_t}$$

$$A_t = m^2 R_p^2 + n^2 R_p^2 + p^2 R_e^2 \quad (12)$$

$$B_t = 2x_0 m R_p^2 + 2y_0 n R_p^2 + 2z_0 p R_e^2$$

$$C_t = x_0^2 R_p^2 + y_0^2 R_p^2 + z_0^2 R_e^2 - R_e^2 R_p^2$$

上述计算结果包含两个交点,其中绝对值更小的 t 对应的结果为待求的观测者位置,即交点 p_{it}^e 的三维坐标。

[0020] 步骤4、根据上一步得到的交点坐标 $p_{it}^e = [x_p, y_p, z_p]^T$,其中, x_p, y_p, z_p 表示 p_{it}^e 在 e 系下的三维坐标值,计算观测者位置的经纬度,计算公式为:

$$\lambda = \text{atan } 2(y_p, x_p)$$

$$\tan L = \frac{1}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \left[z_p + \frac{R_e e_f^2 \tan L}{\sqrt{1 + (1 - e_f^2) \tan^2 L}} \right] \quad (13)$$

其中, e_f 为地球椭球偏心率,根据地球标准模型获得; λ, L 是观测者位置的经度、纬度。

[0021] 本发明说明书中未作详细描述的内容属于本领域专业技术人员的公知技术。本领域的技术人员容易理解,以上所述仅为本发明的较佳实施例而已,并不用以限制本发明,凡在本发明的精神和原则之内所作的任何修改、等同替换和改进等,均应包含在本发明的保护范围之内。

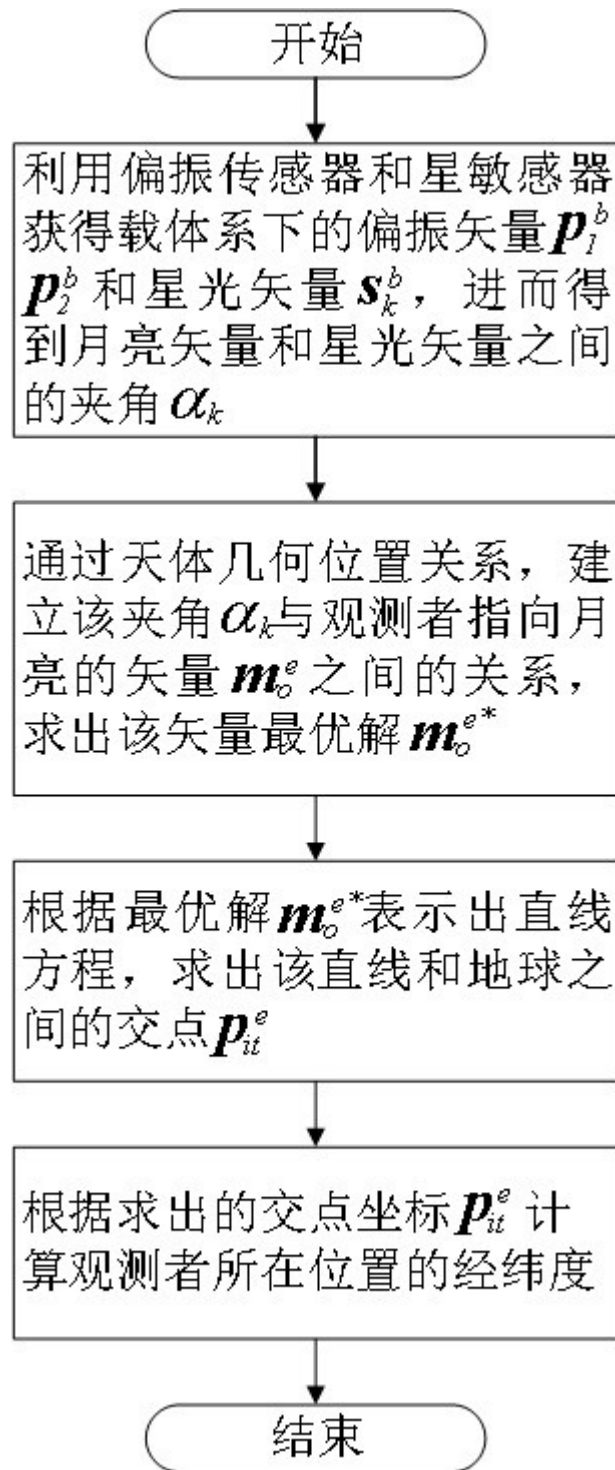


图1

