

(12) NACH DEM VERTRAG ÜBER DIE INTERNATIONALE ZUSAMMENARBEIT AUF DEM GEBIET DES  
PATENTWESENS (PCT) VERÖFFENTLICHTE INTERNATIONALE ANMELDUNG

(19) Weltorganisation für geistiges Eigentum  
Internationales Büro



(43) Internationales Veröffentlichungsdatum  
4. Juli 2002 (04.07.2002)

PCT

(10) Internationale Veröffentlichungsnummer  
**WO 02/052402 A2**

- (51) Internationale Patentklassifikation<sup>7</sup>: **G06F 7/58** (71) **Anmelder** (für alle Bestimmungsstaaten mit Ausnahme von US): **INFINEON TECHNOLOGIES AG** [DE/DE]; St.-Martin-Str. 53, 81669 München (DE).
- (21) Internationales Aktenzeichen: PCT/DE01/04376 (72) **Erfinder; und**
- (22) Internationales Anmeldedatum: 22. November 2001 (22.11.2001) (75) **Erfinder/Anmelder** (nur für US): **DENK, Georg** [DE/DE]; Farrenpointstr. 5 b, 83026 Rosenheim (DE). **HILLERMEIER, Claus** [DE/DE]; Westerbuchberg 71, 83236 Übersee (DE). **SCHÄFFLER, Stefan** [DE/DE]; Paul-Linke-Str. 15, 86199 Augsburg (DE).
- (25) Einreichungssprache: Deutsch (74) **Anwalt: SCHWEIGER, Martin**; Leopoldstrasse 77, 80802 München (DE).
- (26) Veröffentlichungssprache: Deutsch (81) **Bestimmungsstaaten** (national): JP, KR, US.
- (30) Angaben zur Priorität:  
100 64 688.3 22. Dezember 2000 (22.12.2000) DE

[Fortsetzung auf der nächsten Seite]

(54) **Title:** METHOD FOR CONDUCTING THE NEED-ORIENTED GENERATION OF INDIVIDUAL RANDOM NUMBERS OF A SERIES OF RANDOM NUMBERS OF A 1/F NOISE

(54) **Bezeichnung:** VERFAHREN ZUM BEDARFSORIENTIERTEN ERZEUGEN EINZELNER ZUFALLSZAHLEN EINER FOLGE VON ZUFALLSZAHLEN EINES 1/F-RAUSCHENS

|                                                                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Initialisiere $\beta, \text{const}, n$                                                                                                                       | 1  |
| für alle Simulationszeitschritte                                                                                                                             | 2  |
| bestimme Zeitschritt<br>erhöhe $n$ um 1                                                                                                                      | 3  |
| Bestimme die Kovarianzmatrix $\underline{C}$                                                                                                                 | 4  |
| Berechne die Inverse der Kovarianzmatrix $\underline{C}$                                                                                                     | 5  |
| Berechne die Grösse $\sigma$                                                                                                                                 | 6  |
| für jeden gewünschten Vektor $\underline{y}$ von<br>1/f-verteilten Zufallszahlen                                                                             | 7  |
| Ergänze Vektor $\underline{x}$ der (0,1)-normalverteilten<br>Zufallszahlen um eine neue Zufallszahl                                                          | 8  |
| Berechne die Grösse $\mu$                                                                                                                                    | 9  |
| Transformiere die neue Zufallszahl mit<br>den Grössen $\mu$ und $\sigma$ und ergänze<br>somit den Vektor $\underline{y}$ der 1/f-verteilten<br>Zufallszahlen | 10 |

(57) **Abstract:** A method for adaptively generating a series of random numbers of a 1/f noise is based on the use of (0,1) normally distributed random numbers. The invention enables a need-oriented generation of random numbers of a 1/f noise, whereby additional random numbers of a 1/f noise are also possible during a simulation calculation.

(57) **Zusammenfassung:** Ein Verfahren zum adaptiven Erzeugen einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens beruht auf der Verwendung (0,1)-normalverteilter Zufallszahlen. Mit der Erfindung ist eine bedarfsorientierte Erzeugung von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens möglich, wobei zusätzliche Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens auch während einer Simulationsrechnung möglich sind.

- 1 INITIALIZE  $\beta, \text{CONST}, n$
- 2 FOR ALL SIMULATION TIME STEPS
- 3 DETERMINE TIME STEP  
INCREASE  $n$  BY 1
- 4 DETERMINE COVARIANCE MATRIX  $\underline{C}$
- 5 CALCULATE THE INVERSE OF COVARIANCE MATRIX  $\underline{C}$
- 6 CALCULATE VARIABLE  $\sigma$
- 7 FOR EACH SELECTED VECTOR  $\underline{y}$  OF 1/F-DISTRIBUTED RANDOM NUMBERS
- 8 COMPLETE VECTOR  $\underline{x}$  OF THE (0,1) NORMALLY DISTRIBUTED RANDOM NUMBERS BY  
ADDING A NEW RANDOM NUMBER
- 9 CALCULATE VARIABLE  $\mu$
- 10 TRANSFORM THE NEW RANDOM NUMBER WITH VARIABLES  $\mu$  AND  $\sigma$  AND USE IT TO  
COMPLETE VECTOR  $\underline{y}$  OF THE 1/F-DISTRIBUTED RANDOM NUMBERS

WO 02/052402 A2



**(84) Bestimmungsstaaten** (*regional*): europäisches Patent (AT, BE, CH, CY, DE, DK, ES, FI, FR, GB, GR, IE, IT, LU, MC, NL, PT, SE, TR).

*Zur Erklärung der Zweibuchstaben-Codes und der anderen Abkürzungen wird auf die Erklärungen ("Guidance Notes on Codes and Abbreviations") am Anfang jeder regulären Ausgabe der PCT-Gazette verwiesen.*

**Veröffentlicht:**

— *ohne internationalen Recherchenbericht und erneut zu veröffentlichen nach Erhalt des Berichts*

## Beschreibung

Verfahren zum bedarfsorientierten Erzeugen einzelner Zufallszahlen einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-

## 5 Rauschens

Die Erfindung betrifft ein Verfahren zum Erzeugen von Folgen von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens.

- 10 Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens können beispielsweise bei einer transienten Schaltkreissimulation eingesetzt werden, die Rauscheinflüsse berücksichtigt. Unter einem 1/f-Rauschen wird ein stochastischer Prozess mit einem bestimmten Frequenzspektrum verstanden, das mit der Gleichung
- 15

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta}, \beta \in ]0,1[$$

beschrieben werden kann.

- 20 1/f-Rauschquellen eignen sich zur Modellierung von Rauscheinflüssen in einer Vielzahl technischer und physikalischer Systeme sowie für Systeme zur Einschätzung und Vorhersage von Geschehnissen auf den Finanzmärkten. Insbesondere weisen viele elektronische Bauelemente wie beispielsweise pn-Dioden und MOS-Feldeffekttransistoren 1/f-
- 25 Rauschquellen auf.

- Es ist möglich, 1/f-Rauschquellen dadurch zu approximieren, daß eine Summation der Effekte vieler Rauschquellen durchgeführt wird, die als Frequenzspektrum jeweils ein Lorentz-Spektrum aufweisen. Solche Rauschquellen können
- 30 beispielsweise durch die Systemantwort eines linearen zeit-

tinvarianten Systems, das auch als LTI-System bezeichnet werden kann, modelliert werden, an dessen Systemeingang ein weisses Rauschen angelegt wird. Bei dieser Vorgehensweise ist von Nachteil, daß die Dimension des numerisch zu  
5 lösenden Differentialgleichungssystems über die Maßen aufgebläht wird. Dadurch ergeben sich lange Rechenzeiten und ein hoher Speicherbedarf eines Computersystems, das zur Simulation eines Systems verwendet wird, das dem Einfluß eines  $1/f$ -Rauschens unterliegt.

10

Es ist Aufgabe der Erfindung, ein Verfahren zum Erzeugen einer Folge von Zufallszahlen eines  $1/f$ -Rauschens anzugeben, das schnell und mit geringem Rechenaufwand durchgeführt werden kann. Es ist weiterhin Aufgabe der Erfindung,  
15 ein verbessertes Verfahren zur Simulation eines technischen Systems anzugeben, das einem  $1/f$ -Rauschen unterliegt. Schließlich soll auch ein Computersystem mit einem Computerprogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines  $1/f$ -Rauschens angegeben werden, das schnell ausgeführt werden kann und das nur wenig Ressourcen eines  
20 Computersystems beansprucht.

Diese Aufgabe wird durch die Gegenstände der unabhängigen Patentansprüche gelöst. Verbesserungen ergeben sich aus  
25 den jeweiligen Unteransprüchen.

Gemäß der Erfindung wird das Problem der Rauschsimulation bei der Modellierung des zu simulierenden Systems in das Problem der Generierung einer Zufallszahlen-Sequenz überführt. Gemäß der Erfindung werden die Korrelationen dieser  
30 Zufallszahlen bestimmt, was zu einer einfachen und genauen Generierung der entsprechenden Zufallszahlen-Sequenzen verwendet wird.

Das erfindungsgemäße Verfahren zum Erzeugen wenigstens einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens, sieht dabei zunächst die folgenden Schritte vor:

- 5 - Bestimmen eines gewünschten Spektralwerts  $\beta$ ,
- Bestimmen einer Intensitätskonstante  $const$ .

Dadurch werden die Charakteristika des zu simulierenden 1/f-Rauschens festgelegt.

- 10 Danach wird die Anzahl der zu erzeugenden Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens und ein Startwert für eine zur Simulation benutzten Laufvariable  $n$  festgelegt.

Die Erfindung sieht solange, bis die gewünschte Anzahl von  
 15 Elementen  $y(n)$  eines oder mehrerer Vektoren  $\underline{y}$  der Länge  $n$  aus 1/f-verteiltern Zufallszahlen berechnet ist, das schleifenartige Wiederholen der folgenden Schritte vor:

- Erhöhen des aktuellen Werts der Laufvariable  $n$  um 1,
- Festlegen eines Simulationszeitschritts  $[t_{n-1}; t_n]$ ,
- 20 - Bestimmen der Elemente  $\underline{C}_{ij}$  einer Covarianzmatrix  $\underline{C}$  der Dimension  $(n \times n)$  nach der folgenden Vorschrift:

$$\underline{C}_{ij} := const \cdot \left( -|t_j - t_i|^{\beta+1} + |t_{j-1} - t_i|^{\beta+1} + |t_j - t_{i-1}|^{\beta+1} - |t_{j-1} - t_{i-1}|^{\beta+1} \right),$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

- Bestimmen einer Matrix  $\underline{C}^{-1}$  durch Invertieren der Covarianzmatrix  $\underline{C}$ ,
- 25 - Bestimmen einer Größe  $\sigma$  gemäß der Vorschrift

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / e(n, n) ),$$

wobei  $\text{sqrt}$  die Funktion "Quadratwurzel" und wobei  $e(n, n)$  das durch  $(n, n)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  bezeichnet,

- 30 - Bestimmen einer  $(0, 1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die die  $n$ -te Komponente eines Vektors  $\underline{x}$  der Länge  $n$  bildet,

- Bilden einer Größe  $\mu$  aus den ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  und den  $(n-1)$  Elementen des Vektors  $\underline{y}$ , die für einen vorausgehenden  $(n-1)$  Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu := - \frac{y_{(n-1)}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}}$$

- wobei  $y_{(n-1)}$  die ersten  $(n - 1)$  Komponenten des Vektors  $\underline{y}$  bezeichnet, wobei  $\underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}$  die ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet und wobei  $\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}$  das mit  $(n, n)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet,
- Berechnen eines Element  $y(n)$  eines Vektor  $\underline{y}$  der Länge  $n$  aus  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

$$Y(n) = x(n) * \sigma + \mu$$

Mit dem erfindungsgemäßen Verfahren können Simulationen von technischen Systemen beliebig verlängert werden. Hierzu können auf einfache Weise zusätzliche  $1/f$ -verteilte Zufallszahlen generiert werden, wenn bereits generierte  $1/f$ -verteilte Zufallszahlen vorliegen. Außerdem kann eine Simulation auf den Ergebnissen von zuvor simulierten Zeitintervallen aufgesetzt werden. Diese sogenannte Restart-Fähigkeit stellt eine für die Simulationspraxis sehr wichtige Eigenschaft dar. Gerade für  $1/f$ -Rauschquellen ist dies nur schwierig zu erreichen, weil Zufallszahlen, die eine  $1/f$ -Rauschquelle für ein gewisses Zeitintervall simulieren, von bereits numerisch bestimmten Zufallszahlen für frühere Zeitintervalle abhängen. Die vorliegende Erfindung gestattet auch die Verwendung einer adaptiven Schrittwei-

tensteuerung, ohne daß hierdurch die Rechenzeiten zur Simulation eines technischen Systems signifikant erhöht werden. Eine solche adaptive Schrittweitensteuerung steigert die Präzision und die Rechenzeiteffizienz bei der numerischen Bestimmung der Dynamik eines simulierten technischen Systems erheblich.

Es ist beim erfindungsgemäßen Verfahren nicht mehr notwendig, das zu simulierende Zeitintervall vorzugeben. Gerade durch das Vorsehen von variablen Schrittweiten kann auch eine Adaption an aktuelle Systemdynamiken erfolgen, was die Genauigkeit der Simulationen erhöht.

Die vorliegende Erfindung gibt ein Verfahren an, um Sequenzen von  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen sukzessive, also Element für Element, zu generieren. Dabei stellt das Verfahren sicher, daß jede neu generierte Zufallszahl auf korrekte Weise im stochastischen Sinne von den zuvor generierten  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen abhängt. Dadurch ist es möglich, im Verlauf der numerischen Simulation eines Schaltkreises die jeweils benötigten Zufallszahlen zu erzeugen.

Die Erfindung verwendet die Theorie bedingter Wahrscheinlichkeitsdichten, um eine  $1/f$ -verteilte Zufallszahl zu erzeugen, die korrekt den stochastischen Zusammenhang dieser Zufallszahl mit dem bereits erzeugten und für vorangegangene Simulationsschritte benötigten Zufallszahlen sicherstellt.

30

In einer besonders vorteilhaften Ausgestaltung des erfindungsgemäßen Verfahrens werden  $q$  Folgen von Zufallszahlen

eines 1/f-Rauschens gleichzeitig berechnet werden, wobei anstelle der schleifenartig zu wiederholenden Schritte:

- Bestimmen einer (0,1)-normalverteilten Zufallszahl, die die n-te Komponente eines Vektors  $\underline{x}$  der Länge n bildet,
- 5 - Bilden einer Größe  $\mu$  aus den ersten (n - 1) Komponenten der n-ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  und den (n-1) Elementen des Vektors  $\underline{y}$ , die für einen vorausgehenden (n-1) Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

$$10 \quad \mu := - \frac{y_{(n-1)}^T \cdot \underline{C}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{C}_{n, n}^{-1}}$$

wobei  $y_{(n-1)}$  die ersten (n - 1) Komponenten des Vektors  $\underline{y}$  bezeichnet, wobei  $\underline{C}_{\bullet, n}^{-1}$  die ersten (n - 1) Komponenten der n-ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  bezeichnet und wobei  $\underline{C}_{n, n}^{-1}$  das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  bezeichnet,

- 15 - Berechnen eines Element  $y(n)$  eines Vektor  $\underline{y}$  der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

$$Y(n) = x(n) * \sigma + \mu$$

20 die folgenden Schritte vorgesehen sind:

- Bestimmen von q Stück (0,1)-normalverteilte Zufallszahlen  $x_{k,n}$ , die die jeweils letzte Komponente der Vektoren  $\underline{x}_k$  der Länge n bilden, wobei  $k = 1, \dots, q$ . Hierbei ist zu beachten, dass die jeweils ersten (n - 1) Komponenten der Vektoren  $\underline{x}_k$  bereits im Schritt zuvor berechnet wurden.
- 25 - Bilden von q Größen  $\mu_k$  gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu_k := - \frac{y_{(n-1),k}^T \cdot \underline{C}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{C}_{n, n}^{-1}}$$



wobei  $y_{(n-1),k}$  die ersten  $(n - 1)$  Komponenten des Vektors  $\underline{y}_k$  bezeichnet, die für einen vorausgehenden Simulations-Zeitschritt berechnet wurden.  $\underline{C}_{\cdot,n}^{-1}$  bezeichnet die ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  und  $\underline{C}_{n,n}^{-1}$  bezeichnet das mit  $(n,n)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$ . Dies wird für  $k = 1, \dots, q$  durchgeführt,

5        - Berechnen von  $q$  Elementen  $y_{k,n}$ , die die jeweils  $n$ -te Komponente des Vektors  $\underline{y}_k$  der Länge  $n$  aus  $1/f$ -

10        verteilten Zufallszahlen bilden, und zwar nach folgender Vorschrift:

$$y_{k,n} = x_{k,n} * \sigma + \mu_k$$

15        wobei  $k = 1, \dots, q$ .

Die  $q$  Vektoren  $\underline{y}_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) der Länge  $n$  aus  $1/f$ -verteiltern Zufallszahlen werden besonders vorteilhaft in einer Matrix NOISE angeordnet, die in einer Simulation die

20         $1/f$ -Rauscheinflüsse eines zu simulierenden Systems angeben.

Dem Konzept zur Simulation von  $1/f$ -Rauschen liegt gemäß der Erfindung der folgende Gedankengang zugrunde. Die Dynamik eines Systems, das stochastischen Einflüssen ausgesetzt ist, wird adäquat durch einen stochastischen Prozeß

25        modelliert. Zur Simulation einer solchen Systemdynamik werden im allgemeinen einzelne Zufalls-Realisierungen (so genannte Pfade) des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses numerisch berechnet. Zur Simulation von Systemen

30        mit  $1/f$ -Rauschquellen gilt es, Pfade von stochastischen

Integralen der Form  $\int_0^t Y(s) \eta_{\frac{1}{f}}(s) ds$  numerisch zu berechnen.

Hierbei bezeichnen  $s$  (Integrationsvariable) und  $t$  (obere Integrationsgrenze) die Zeit,  $\eta_{\frac{1}{f}}(s)ds$  eine  $1/f$ -Rauschquelle und  $Y(s)$  einen stochastischen Prozess, der die zeitliche  
 5 Dynamik einer Größe, z.B. der elektrischen Spannung in der Schaltkreissimulation, beschreibt.

Wenn man mit  $B_{FBM}(s)$  denjenigen stochastischen Prozess bezeichnet, dessen Ableitung (mathematisch: Ableitung im Distributionssinn) den  $1/f$ -Rauschprozess  $\eta_{\frac{1}{f}}(s)$  ergibt, so  
 10 lässt sich das zu berechnende stochastische Integral schreiben als

$$\int_0^t Y(s) \eta_{\frac{1}{f}}(s) ds = \int_0^t Y(s) dB_{FBM}(s) \quad (1.1)$$

15

Das Integral der rechten Seite ist als Riemann-Stieltjes-Integral des stochastischen Prozesses  $Y(s)$  mit dem Prozess  $B_{FBM}(s)$  als Integrator aufzufassen. Dieses Integral lässt sich durch eine Summe approximieren, indem das Integrationsintervall  $[0, t]$  gemäß  $0 \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_n \equiv t$  in  $n$  disjunkte Teilintervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i=1, \dots, n$ , zerlegt wird:

$$\int_0^t Y(s) dB_{FBM}(s) \approx \sum_{i=1}^n Y(t_{i-1}) [B_{FBM}(t_i) - B_{FBM}(t_{i-1})] \quad (1.2)$$

25

Diese Summe ist eine Zufallsvariable. Die Abhängigkeit vom Ergebnis  $\omega$  des Zufallsexperiments wurde konsistent weglassen.

Ein Prozess  $B_{FBM}(s)$ , dessen verallgemeinerte Ableitung ein  $1/f$ -Spektrum aufweist, ist in der Literatur unter dem Namen 'Fractional Brownian Motion' bekannt.  $B_{FBM}(s)$  ist ein Gaußscher stochastischer Prozess und als solcher vollständig charakterisiert durch seinen Erwartungswert

$$E(B_{FBM}(s)) = 0 \quad \forall s \in R \quad (1.3)$$

und durch seine Kovarianzfunktion

$$Cov(B_{FBM}(s), B_{FBM}(t)) = const \cdot (|s|^{\beta+1} + |t|^{\beta+1} - |t-s|^{\beta+1}) \quad (1.4)$$

Das erfindungsgemäße Verfahren zur bedarfsorientierten Generierung geeigneter Zufallszahlen führt die Simulation von  $1/f$ -Rauscheinflüssen im wesentlichen auf die Erzeugung von Realisierungen der Zufallsvariablen  $[B_{FBM}(t_i) - B_{FBM}(t_{i-1})]$ , also von Zuwächsen der Fractional Brownian Motion, zurück.

Die vorliegende Erfindung erlaubt es, die benötigten Realisierungen der Zufallsvariablen  $\Delta B_{FBM}(i)$  online, d.h. im Verlauf der sukzessiven Integration der Systemgleichungen, zu erzeugen. Daraus resultieren zwei Anforderungen an das Verfahren:

25

(a) Die Länge  $n$  der Sequenz von Zufallszahlen

$\{\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n)\}$  muß während eines Simulationslaufs variabel bleiben. Insbesondere muß es jederzeit möglich sein, die Simulation zu verlängern (Restart-Fähigkeit). Dies impliziert die Fähigkeit des Verfahrens, die hierfür benötigten zusätzlichen Zufallszahlen

30

len so zu generieren, daß sie auf korrekte Weise mit der bereits generierten Teilsequenz korrelieren.

- (b) Sei  $t_i$  die im Laufe einer Simulation aktuell erreichte  
 5 Zeit. Dann muß das Zeitintervall  $[t_i, t_{i+1}]$ , also die Schrittweite des nächsten Integrationsschritts aus der momentanen Systemdynamik heraus - also adaptiv - bestimmbar sein.
- 10 Die Erfindung wird beiden Anforderungen gerecht, indem sie eine Vorschrift angibt, wie eine Realisierung von  $\{\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n)\}$ , also eine Sequenz von Zufallszahlen, sukzessive, d.h. Element für Element generiert werden kann. Hierbei ist die Schrittweite  $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$  für jede  
 15 neue Zufallszahl frei wählbar.

Zunächst wird der Ansatz für sogenannte "bedingte Dichten" untersucht.

- 20 Es wird zunächst die Verteilung des Zufallsvariablen-Vektors  $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$  betrachtet.

Da die einzelnen Zufallsvariablen  $\Delta B_{FBM}(i)$  Zuwächse eines Gaußschen stochastischen Prozesses darstellen, ist der Zufallsvariablen-Vektor  $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$  eine  $n$ -  
 25 dimensionale Gauß-verteilte Zufallsvariable und somit durch seinen ( $n$ -dimensionalen) Erwartungswert  $\mathbf{E}$  und seine Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  vollständig bestimmt. Die beiden Größen lassen sich aus den Formeln (1.3) und (1.4) berechnen zu

11

$$E(\Delta B_{FBM}(i)) = 0, i=1, \dots, n$$

(3.5)

$$\begin{aligned} C_{ij} := \text{Cov}(\Delta B_{FBM}(i), \Delta B_{FBM}(j)) &= \text{const} \cdot \left( -|t_j - t_i|^{\beta+1} + |t_{j-1} - t_i|^{\beta+1} \right. \\ &\quad \left. + |t_j - t_{i-1}|^{\beta+1} - |t_{j-1} - t_{i-1}|^{\beta+1} \right), \\ i, j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.6)$$

Das erfindungsgemäße Online-Verfahren soll nun in Form einer vollständigen Induktion angegeben werden.

10

Induktionsanfang – und somit Startpunkt des Verfahrens – ist die Realisierung einer reellwertigen Gaußverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sum_{i=1} = 2 \cdot \text{const} \cdot | \Delta t_1 |^{\beta+1}$ .

15 Im Sinne eines Induktionsschlusses müssen wir angeben, wie wir eine Realisierung von  $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n-1))$  erweitern um eine Realisierung von  $\Delta B_{FBM}(n)$ , so daß sich insgesamt eine Realisierung von  $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$  ergibt. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei die bereits "gewürfelte" Teilsequenz von Zufallszahlen mit  $(y_1, \dots, y_{n-1}) =: y_{(n-1)}^T$   
20 und die noch zu würfelnde Realisierung von  $\Delta B_{FBM}(n)$  mit  $y_n$  bezeichnet.

Das Problem kann nun folgendermaßen formuliert werden:

Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale mittelwertfreie Gaußsche Zufallsvariable  $Z$  mit der Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$ . Die ersten  $n-1$  Elemente einer Realisierung von  $Z$  seien in Form eines Zufallszahlen-Vektors  $\underline{y}_{(n-1)}$  bereits gewürfelt und bekannt.

Gesucht ist nun die Verteilung, aus der das  $n$ -te Element  $y_n$  gezogen werden muß, um  $\underline{y}_{(n-1)}$  zu einer Realisierung  $\underline{y} = (\underline{y}_{(n-1)}, y_n)$  von  $Z$  zu vervollständigen.

Eine Lösung dieser Aufgabe kann gefunden werden, wenn man die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(y_n | y_{(n-1)})$  für  $y_n$  – unter der Bedingung, daß  $y_{(n-1)}$  bereits festliegt – betrachtet. Diese Größe läßt sich im vorliegenden Fall einer Gaußschen Normalverteilung berechnen zu

$$f(y_n | y_{(n-1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \frac{1}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}} (y_n - \mu)^2 \right\}.$$

(3.7)

Hierbei ergibt sich die Größe  $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$  aus folgender Schreibweise der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$ :

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{C}}_{(n-1)}^{-1} & \underline{\underline{C}}_{\bullet,n}^{-1} \\ \hline \left( \underline{\underline{C}}_{\bullet,n}^{-1} \right)^T & \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1} \end{array} \right),$$

(3.8)

wobei  $C_{(n-1)}^{-1} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ , wobei  $C_{\bullet, n}^{-1} \in R^{(n-1)}$  und wobei  $C_{n, n}^{-1} \in R$ .

Die Größe  $\mu$  steht für

$$\mu := - \frac{y_{(n-1)}^T \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}} \quad (3.9)$$

- 5 Die bedingte Dichte  $f(y_n | y_{(n-1)})$  ist also die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Gaußschen Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\frac{1}{\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}}$ .

Damit obige Varianz existiert, muß gelten  $\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1} \neq 0$ . Dies ist  
10 aufgrund folgender Argumentation sichergestellt:

$\underline{\underline{C}}$  und  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  haben die selben Eigenrichtungen und inverse  
Eigenwerte. Ein Eigenwert 0 der Matrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  hätte also eine  
unendliche Varianz des Zufallsvariablen-Vektors  
 $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$  zur Folge. Es kann daher vorausgesetzt  
15 werden, daß alle Eigenwerte von  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  ungleich Null sind. Da  
die Eigenwerte von  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  in jedem Fall nicht negativ sind,  
gilt somit: Die Matrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  ist symmetrisch und positiv definit.  
Durch Umbenennung der Koordinatenachsen kann diese  
Matrix von der Form (3.8) auf folgende Form gebracht werden:  
20 den:

$$\underline{\underline{C}}^{-1} := \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1} & \left( \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1} \right)^T \\ \hline \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1} & \underline{\underline{C}}_{(n-1)}^{-1} \end{array} \right) \quad (3.10)$$



Diese Matrix ist per constructionem ebenfalls symmetrisch und positiv definit. Gemäß des Sylvester-Kriteriums für symmetrische und positiv definite Matrizen folgt daraus, daß  $\left(\underline{\underline{C}}^{-1}\right)_{11} = \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1} > 0$ , und die Behauptung ist gezeigt.

- 5 Durch das erfindungsgemäße Verfahren wird die Simulation von  $\frac{1}{f}$ -Rauschquellen zurückgeführt auf die Generierung von Gauß-verteilten Zufallszahlen.

Um eine Zufallszahl  $y_n$  zu erzeugen, die mit einer bereits  
 10 erzeugten Sequenz  $y_{(n-1)}$  auf die geforderte Weise korreliert, wird die invertierte Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  (eine  $n \times n$ -Matrix) benötigt. Streng genommen ist nur die Kenntnis der  $n$ -ten Zeile dieser Matrix vonnöten, also die Kenntnis von  $\left(\left(\underline{\underline{C}}_{\cdot,n}^{-1}\right)^T, \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}\right)$ . Wie an Formel (3.6) abzulesen ist,  
 15 hängt die Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  von der Zerlegung des Simulationsintervalls  $[0, t_n]$  in disjunkte Teilintervalle (Schrittweiten)  $[t_{i-1}, t_i]$  ab. Insbesondere hängt die letzte Spalte von  $\underline{\underline{C}}$  (wegen der Symmetrie von  $\underline{\underline{C}}$  identisch mit der letzten Zeile) ab von  $t_n$  und damit von der aktuellen Schritt-  
 20 weite  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ .

Die linke obere  $(n-1) \times (n-1)$ -Teilmatrix  $\tilde{\underline{\underline{C}}}$  der  $n \times n$ -Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  ist genau die Covarianzmatrix für eine Zufallszahlen-Sequenz der Länge  $n-1$ . Diese Covarianzma-  
 25 trix mußte bereits für die Berechnung von  $y_{(n-1)}$  (bzw. für die Berechnung des letzten Elements ( $y_{n-1}$ ) bestimmt und invertiert werden. Zur Beschleunigung des Verfahrens kann

somit auf inkrementelle Verfahren zur Matrixinversion, z.B. mittels des Schur-Komplements, zurückgegriffen werden.

- 5 Die Erfindung ist auch in einem Verfahren zur Simulation eines technischen Systems verwirklicht, das einem  $1/f$ -Rauschen unterliegt. Dabei werden bei der Modellierung und/oder bei der Festlegung der an Eingangskanälen des Systems anliegenden Größen Zufallszahlen verwendet werden,  
10 die mit einem erfindungsgemäßen Verfahren bestimmt worden sind.

- Ebenso ist ein Computersystem und/oder ein Computerprogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines  
15  $1/f$ -Rauschens oder zur Ausführung der anderen erfindungsgemäßen Verfahren vorgesehen. Die Erfindung ist auch in einem Datenträger mit einem solchen Computerprogramm verwirklicht. Weiterhin ist die Erfindung in einem Verfahren verwirklicht, bei dem ein erfindungsgemäßes Computerpro-  
20 gramm aus einem elektronischen Datennetz wie beispielsweise aus dem Internet auf einen an das Datennetz angeschlossenen Computer heruntergeladen wird.

- Die Erfindung ist in der Zeichnung anhand eines Ausführungsbeispiels erläutert.  
25

Die Erfindung ist in der Zeichnung anhand mehrerer Ausführungsbeispiele erläutert.

- 30 Figur 1 zeigt eine schematische Darstellung eines zu simulierenden technischen Systems,  
Figur 2 zeigt ein Struktogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines  $1/f$ -Rauschens,

Figur 3 zeigt anhand seiner Unterfiguren 3a bis 3f ein Berechnungsbeispiel für einen ersten Simulations-Zeitschritt,

Figur 4 zeigt anhand seiner Unterfiguren 4a bis 4f ein Berechnungsbeispiel für einen zweiten Simulations-Zeitschritt,

Figur 5 zeigt anhand seiner Unterfiguren 5a bis 5f ein Berechnungsbeispiel für einen dritten Simulations-Zeitschritt.

10

Figur 1 zeigt eine schematische Darstellung eines rauschbehafteten Systems, das simuliert werden soll.

Das System wird durch ein als Kasten angedeutetes Systemmodell 1 beschrieben, das das Systemverhalten beschreibt. Das Systemverhalten ergibt sich aus den Eingangskanälen 2, die auch als Vektor INPUT bezeichnet werden, und aus den Ausgangskanälen 3, die auch als OUTPUT bezeichnet werden. Weiterhin ist ein systembedingtes Rauschen vorgesehen, das an Rauscheingangskanälen 4 anliegt und das auch als Vektor bzw. Matrix NOISE bezeichnet wird. Eine Matrix NOISE liegt dann vor, wenn das Rauschen mit mehreren Kanälen berücksichtigt wird, wobei jede Spalte der Matrix NOISE einen Vektor von Rauschwerten enthält, die an einem Rauscheingangskanal anliegen.

30

Das Rauschen an den Rauscheingangskanälen 4 wird vorzugsweise als rauschbedingte Veränderung des Systemmodells 1 aufgefaßt.

Das Verhalten der Eingangskanäle 2 und der Ausgangskanäle 3 kann durch ein System von Differentialgleichungen oder durch ein System von Algebra-Differentialgleichungen be-

schrieben werden, so daß zuverlässige Vorhersagen des Systemverhaltens möglich sind.

Zu jedem Zeitschritt der Simulation des in Figur 1 gezeigten Systems wird für einen an den Eingangskanälen 2 anliegenden Vektor INPUT und für einen an den Rauscheingangskanälen 4 anliegenden Vektor NOISE ein Vektor OUTPUT der Ausgangskanäle 3 berechnet.

10 Sinnvollerweise werden zur Simulation über einen längeren Zeitraum die Vektoren INPUT, OUTPUT, NOISE als Matrix angegeben, wobei je eine Spalte  $k$  der betreffenden Matrix die Werte der entsprechenden Zeitreihe des betreffenden INPUT, OUTPUT, NOISE enthält.

15

Figur 2 veranschaulicht, wie man zu je einem Vektor  $y_k$  gelangt, der eine Spalte  $k$  der Matrix NOISE für die Rauscheingangskanäle 4 des Systemmodells 1 bildet. Jeder Vektor  $y_k$  dient zur Simulation einer Rauschquelle.

20

In einem ersten Schritt wird ein gewünschter Spektralwert  $\beta$  sowie die Intensitätskonstante  $const$  festgelegt. Weiterhin wird der Zähler  $n$  des aktuellen Simulationszeitintervalls auf 0 gesetzt.

25

Nun wird sukzessive für jeden Simulations-Zeitschritt die folgende Abfolge von Rechenschritten durchgeführt.

Zunächst wird der aktuelle Simulations-Zeitschritt festgelegt. Äquivalent hierzu kann auch das Ende des aktuellen Simulationszeitschritts festgelegt werden, wodurch sich der nächste Betrachtungszeitpunkt ergibt.

30

Danach wird der Zähler  $n$  des aktuellen Simulationszeitschritts um eins hochgezählt.

Anschließend wird die Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  der Dimension  $(n \times n)$  nach Gleichung (3.6) bestimmt.

Hierauf folgt der Schritt des Invertierens der Matrix  $\underline{\underline{C}}$ , beispielsweise mittels einer Cholesky-Zerlegung. Zur Steigerung der Effizienz kann dabei auch auf die inverse Matrix des vorherigen Schrittes zugegriffen werden, beispielsweise bei Verwendung von Schurkomplement-Techniken.

Als nächstes wird die Größe  $\sigma$  aus der Formel

$$\sigma = \sqrt{1 / e(n,n)}$$

berechnet, wobei  $\sqrt{\phantom{x}}$  die Funktion "Quadratwurzel" und wobei  $e(n,n)$  das durch  $(n,n)$  indizierte Element der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet.

20

Außerdem wird ein Wert einer  $(0,1)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $X_k$  gezogen und damit der Vektor  $\underline{x}_k$  der normalverteilten Zufallszahlen ergänzt. Die gezogene Zufallszahl weist den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf.

25 Dieser Schritt wird für jede zu simulierende Rauschquelle durchgeführt.

Des weiteren wird eine Größe  $\mu_k$  gebildet. Sie wird aus den ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  und aus der Sequenz von  $(n-1)$  1/f-verteilten Zufallszahlen gebildet, die für die vorausgehenden  $(n-1)$  Simulations-Zeitschritte berechnet wurden.

Hierzu wird gemäß Formel (3.9) vorgegangen. Dieser Schritt wird für jede zu simulierende Rauschquelle  $k$  durchgeführt.

Schließlich wird dasjenige Element der Matrix NOISE berechnet, dessen Spaltenindex  $k$  die zu simulierende Rauschquelle angibt und dessen Zeilenindex gleich  $n$  ist. Hierdurch wird der aktuelle Simulations-Zeitschritt bezeichnet. Das aktuell berechnete Element  $r(k,n)$  der Matrix NOISE stellt eine Zufallszahl dar, die zusammen mit den darüberstehenden  $(n-1)$  Elementen derselben Spalte  $k$  von NOISE einen Vektor  $\underline{y}_k$  der Länge  $n$  aus 1/f-verteilten Zufallszahlen bildet. Dieser Vektor  $\underline{y}_k$  dient zur Simulation einer der Rauschquellen für die ersten  $n$  Simulationszeitschritte.

Jedes Element  $y_k$  der  $n$ -ten Zeile von NOISE wird dann aufgrund der Gleichungen (3.7)–(3.9) aus der letzten Zufallszahl  $x_k$  des Vektors  $\underline{x}$  und den Größen  $\mu_k$  und  $\sigma$  bestimmt, und zwar nach folgender Vorschrift:

20

$$y_k = x_k * \sigma + \mu_k.$$

In den Figuren 3 bis 5 sind Ausführungsbeispiele wiedergegeben, die konkrete Berechnungsergebnisse wiedergeben.

25

Der Wert des Spektralwerts  $\beta$  wird dabei stets als 0.5 angenommen. Der Wert der Intensität  $const$  wird willkürlich als 1.0 angenommen. Es werden jeweils drei Zufallszahlen gleichzeitig verarbeitet, entsprechend der Simulation von drei gleichzeitig an separaten Kanälen auf das zu simulierende System einwirkenden Rauschquellen, die jeweils in einem Vektor  $\underline{y}_k$  angeordnet sind, wobei  $k$  ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3 ist.

30

Figur 3 zeigt anhand ihrer Teilfiguren 3a bis 3f ein Berechnungsbeispiel für einen ersten Simulations-Zeitschritt  $[t_0, t_1] = [0, 0.5]$ .

5

Figur 3a zeigt die Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  der Dimension  $1 \times 1$  zur Erzeugung einer  $1/f$ -verteilten Zufallszahl bei der Simulations-Schrittweite.  $\underline{\underline{C}}$  stellt hier nur einen Skalar mit dem Wert 0.70 dar, denn  $\underline{\underline{C}}(1,1)$  - also mit  $i=j=1$  - ergibt sich  
10 unter Anwendung von Gleichung (3.6) zu

$$1.0 \cdot \left( -|t_1 - t_1|^{0.5+1} + |t_{1-1} - t_1|^{0.5+1} + |t_1 - t_{1-1}|^{0.5+1} - |t_{1-1} - t_{1-1}|^{0.5+1} \right) = \\ 0 + 0.5^{1.5} + 0.5^{1.5} - 0 = 0.707106... ;$$

15 Figur 3b zeigt die Inverse der Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  aus Figur 3a, was hier mittels einer nicht näher dargestellten Cholesky-Zerlegung erfolgte. Eine Überprüfung von  $(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{C}}^{-1}) = (0.707106... \ 0.707106...^{-1})$  ergibt den richtigen Wert 1, was die Richtigkeit des Werts für  $\underline{\underline{C}}(1,1)$  veranschaulicht.

20

Figur 3c zeigt eine Größe  $\sigma$  für den ersten Simulations-schritt  $n=1$ . Sie ergibt sich aus der Gleichung

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / 0.707106...),$$

25

wobei sqrt die Quadratwurzel und  $e(1,1)$  das durch (1,1) indizierte Element 0.707106... der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet.

30 Figur 3d zeigt drei Werte  $x_1, x_2, x_3$  einer  $(0,1)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $X_k$  für je eine zu simulierende Rauschquelle. Diese Werte bilden die ersten Elemente

je eines Vektors  $\underline{x}_k$  der normalverteilten Zufallszahlen. Die gezogenen Zufallszahlen weisen den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf.

5 Figur 3e zeigt drei Größen  $\mu_k$  für jede der drei zu simulierenden Rauschquellen. Die Größe  $\mu_k$  ergibt sich gemäß Formel (3.9) aus den ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  sowie aus der Sequenz von  $(n - 1)$  Stück  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen,  
 10 die für die vorausgehenden  $(n - 1)$  Simulations-Zeitschritte berechnet wurden. Im ersten Simulations-schritt haben diese beiden Vektoren jeweils die Länge 0. Somit ergibt sich für alle Größen  $\mu_k$  im ersten Simulations-schritt:  $\mu_k = 0$ ;

15

Figur 3f zeigt drei Vektoren  $\underline{y}_k$  der Länge 1 von  $1/f$ -verteilte Zufallszahlen, die das Verhalten von drei  $1/f$ -verteilten Rauschquellen für den ersten Simulations-Zeitschritt  $[0, t_1]=[0, 0.5]$  simulieren. Die Matrix NOISE  
 20 ergibt sich aus den drei Vektoren  $\underline{y}_k$ . Der Wert  $k$  ist dabei ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3. Jedes Element  $y_k$  der ersten Zeile von NOISE wird aufgrund von Gleichungen (3.7)-(3.9) nach folgender Vorschrift aus der letzten Zufallszahl  $x_k$  des zugehörigen Vektors  $\underline{x}$  und den Größen  $\mu_k$   
 25 und  $\sigma_1$  bestimmt. Beispielfhaft wird nachfolgend das erste Element  $y_1(n=1)$  des ersten Vektors  $\underline{y}_1$  berechnet:

$$\begin{aligned} y_1(n=1) &= \underline{x}_1(n=1) * \sigma + \mu_1 = \\ &= -0.35... * 0.84... + 0.00... = \\ 30 \quad &= -0.30...; \end{aligned}$$

$\underline{y}_2(n=1)$  und  $\underline{y}_3(n=1)$  werden analog hierzu berechnet.



Figur 4 zeigt anhand ihrer Teilfiguren 4a bis 4f ein Berechnungsbeispiel für einen zweiten Simulations-Zeitschritt  $[t_1, t_2] = [0.5, 0.75]$ . Der Wert  $n$  für den zweiten Simulations-Zeitschritt ist stets gleich 2.

5

Figur 4a zeigt die Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  der Dimension  $(n \times n) = 2 \times 2$ , die zur Erzeugung je einer weiteren Zufallszahl pro Rauschquelle benötigt wird. Die so neu erzeugte Zufallszahl bildet zusammen mit dem Resultat gemäß Figur 3f  
 10 einen Vektor  $\underline{y}_k$  der Länge 2 aus 1/f-verteilten Zufallszahlen. Je Rauschquelle wird dabei ein Vektor  $\underline{y}_k$  erzeugt. Die Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  wird dabei nach Gleichung (3.6) bestimmt.

15 Beispielhaft wird dies am Element  $\underline{\underline{C}}(2,1)$  - also mit  $i=2$  und  $j=1$  - durchgeführt. Unter Anwendung von Gleichung (3.6) ergibt sich  $\underline{\underline{C}}(2,1)$  zu

$$\begin{aligned}
 & 1.0 \cdot \left( -|t_1 - t_2|^{0.5+1} + |t_{1-1} - t_2|^{0.5+1} + |t_1 - t_{2-1}|^{0.5+1} - |t_{1-1} - t_{2-1}|^{0.5+1} \right) = \\
 & = \left( -|0.5 - 0.75|^{0.5+1} + |0 - 0.75|^{0.5+1} + |0.5 - 0.5|^{0.5+1} - |0 - 0.5|^{0.5+1} \right) = \\
 & \quad -0.125 \quad + \quad 0.6495.. \quad + \quad 0 \quad - \quad 0.3535... = 0.1709... ;
 \end{aligned}$$

20 Figur 4b zeigt die Inverse der Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  aus Figur 4a. Eine hier nicht dargestellte Überprüfung der Bedingung  $(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{C}}^{-1})$  ergibt eine Matrix der Dimension  $2 \times 2$ , bei der die mit  $(1,1)$  und  $(2,2)$  indizierten Elemente gleich 1 sind. Die anderen Elemente haben den Wert 0.

25

Figur 4c zeigt eine Größe  $\sigma$ , die aus der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  von Schritt 4b berechnet wird. Die Größe  $\sigma$  ergibt sich als

30 
$$\begin{aligned}
 \sigma &= \text{sqrt}(1 / e(n,n)) = \text{sqrt}(1 / e(2,2)) = \\
 &= \text{sqrt}(1 / 4.79...) = 0.45...;
 \end{aligned}$$

wobei  $\sqrt{\phantom{x}}$  die Quadratwurzel und  $e(2,2)$  das durch  $(2,2)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  aus Figur 4b bezeichnen.

5

Figur 4d zeigt drei Vektoren  $\underline{x}_k$  von unabhängigen  $(0,1)$ -normalverteilte Zufallszahlen, wobei die Vektoren  $\underline{x}_k$  jeweils die Länge 2 haben. Pro zu simulierender Rauschquelle wird eine  $(0,1)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $x_k$  gezogen. Die gezogene Zufallszahl weist jeweils den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf. Damit werden die Vektoren  $\underline{x}_k$  der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 3d ergänzt, so daß sich die Vektoren  $\underline{x}_k$  der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 4d ergeben.

15

Figur 4e zeigt drei Größen  $\mu_k$ , die aus der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  gemäß Schritt 4b und aus den drei Zufallszahlen gemäß Schritt 3f berechnet worden sind. Für jede zu simulierende Rauschquelle wird die Größe  $\mu_k$  aus den  $(n - 1)$  ersten Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  und aus der Sequenz von  $(n-1)$  Stück  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen berechnet, die gemäß Formel (3.9) für die vorausgegangenen  $(n - 1)$  Simulationszeitschritte berechnet wurden. Im zweiten Simulations

Schritt wird die Größe  $\mu_k$  also aus der ersten Komponente der zweiten Zeile von  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  sowie aus der ersten Komponente des Vektors  $y_k$  berechnet. Beispielhaft wird dies anhand des Werts  $\mu_1$  durchgeführt:

30

$$\mu_1 = \frac{y_{(n-1),1}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{\bullet,n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}} =$$

25

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-0.30... \cdot -1.15...}{4.79...} = \\
 &= -0.07...;
 \end{aligned}$$

Figur 4f zeigt drei Vektoren  $\underline{y}_k$  der Länge 2 mit  
 5 1/f-verteilten Zufallszahlen, die das Verhalten von drei  
 1/f-verteilten Rauschquellen für den zweiten Simulations-  
 Zeitschritt  $[t_1, t_2]=[0.5, 0.75]$  simulieren. Die Matrix  
 NOISE ergibt sich aus den drei Vektoren  $\underline{y}_k$ . Der Wert  $k$  ist  
 dabei ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3. Jedes Element  $y_k$   
 10 der zweiten Zeile von NOISE wird aufgrund der Gleichungen  
 (3.7)-(3.9) nach folgender Vorschrift aus der letzten Zu-  
 fallszahl  $x_k$  des zugehörigen Vektors  $\underline{x}$  und den Größen  $\mu_k$   
 und  $\sigma$  bestimmt. Beispielfhaft wird nachfolgend das zweite  
 Element  $y_1(n=2)$  des ersten Vektors  $\underline{y}_1$  berechnet:

15

$$\begin{aligned}
 y_1(n=2) &= \underline{x}_1(n=2) * \sigma + \mu_1 = \\
 &= 0.39... * 0.45... - 0.07... = \\
 &= 0.10...;
 \end{aligned}$$

20 Figur 5 zeigt anhand ihrer Teilfiguren 5a bis 5f ein Be-  
 rechnungsbeispiel für einen dritten Simulations-  
 Zeitschritt  $[t_2, t_3]=[0.75, 1.25]$ . Der Wert  $n$  während des  
 dritten Simulations-Zeitschritts ist stets gleich 3.

25 Figur 5a zeigt die Covarianzmatrix  $\underline{C}$  der Dimension  $(n \times n) = 3 \times 3$ , die zur Erzeugung je einer weiteren Zufallszahl  
 pro Rauschquelle benötigt wird. Die so neu erzeugte Zu-  
 fallszahl bildet zusammen mit dem Resultat gemäß Figur 4f  
 einen Vektor  $\underline{y}_k$  der Länge 3 aus 1/f-verteilten Zufallszah-  
 30 len. Je Rauschquelle wird dabei ein Vektor  $\underline{y}_k$  erzeugt. Die  
 Covarianzmatrix  $\underline{C}$  wird dabei nach Gleichung (3.6) be-  
 stimmt.

Beispielhaft wird dies am Element  $\underline{\underline{C}}(3,1)$  - also mit  $i=3$  und  $j=1$  - durchgeführt. Unter Anwendung von Gleichung (3.6) ergibt sich  $\underline{\underline{C}}(3,1)$  zu

5

$$\begin{aligned}
 & 1.0 \cdot \left( -|t_1 - t_3|^{0.5+1} + |t_{1-1} - t_3|^{0.5+1} + |t_1 - t_{3-1}|^{0.5+1} - |t_{1-1} - t_{3-1}|^{0.5+1} \right) = \\
 & = \left( -|0.5 - 1.25|^{0.5+1} + |0 - 1.25|^{0.5+1} + |0.5 - 0.75|^{0.5+1} - |0 - 0.75|^{0.5+1} \right) = \\
 & \quad -0.6495... \quad + \quad 1.3975.. \quad + \quad 0.125 \quad - \quad 0.6495... = 0.22 \dots ;
 \end{aligned}$$

- Figur 5b zeigt die Inverse  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  der Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}$  aus
- 10 Figur 5a. Eine hier nicht dargestellte Überprüfung der Bedingung  $(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{C}}^{-1})$  ergibt eine Matrix der Dimension  $3 \times 3$ , bei der die mit  $(1,1)$ ,  $(2,2)$  und  $(3,3)$  indizierten Elemente gleich 1 sind. Die anderen Elemente haben den Wert 0.
- 15 Figur 5c zeigt eine Größe  $\sigma$ , die aus der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  von Schritt 5b berechnet wird. Die Größe  $\sigma$  ergibt sich als

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \text{sqrt}(1 / e(n,n)) = \text{sqrt}(1 / e(3,3)) = \\
 20 \quad &= \text{sqrt}(1 / 1.75...) = 0.75...;
 \end{aligned}$$

wobei sqrt die Quadratwurzel und  $e(3,3)$  das durch  $(3,3)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  aus Figur 5b bezeichnen.

25

- Figur 5d zeigt drei Vektoren  $\underline{x}_k$  von unabhängigen  $(0,1)$ -normalverteilte Zufallszahlen, wobei die Vektoren  $\underline{x}_k$  jeweils die Länge 3 haben. Pro zu simulierender Rauschquelle wird eine  $(0,1)$ -normalverteilte Zufallsvariable  $x_k$  gezogen.
- 30 Die gezogene Zufallszahl weist jeweils den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf. Damit werden die Vektoren

ren  $\underline{x}_k$  der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 4d ergänzt, so daß sich die Vektoren  $\underline{x}_k$  der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 5d ergeben.

- 5 Figur 5e zeigt drei Größen  $\mu_k$ , die aus der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  gemäß Schritt 5b und aus den drei Zufallszahlen gemäß Schritt 4f berechnet worden sind. Für jede zu simulierende Rauschquelle wird die Größe  $\mu_k$  aus den (n-1) ersten Komponenten der n-ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  und aus der Sequenz von (n-1) Stück 1/f-verteilten Zufallszahlen berechnet, die gemäß Formel (3.9) für die vorausgegangenen (n - 1) Simulationszeitschritte berechnet wurden. Im zweiten Simulations-
- 10 schritt wird die Größe  $\mu_k$  also aus der ersten beiden Komponenten der dritten Zeile von  $\underline{C}^{-1}$  sowie aus den ersten beiden Komponenten des Vektors  $y_k$  berechnet. Beispielhaft wird dies anhand des Werts  $\mu_1$  durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{y_{(n-1),1}^T \cdot \underline{C}_{\bullet,n}^{-1}}{\underline{C}_{n,n}^{-1}} = \\
 20 \quad &= \frac{-0.30... \cdot -0.31... + 0.10... \cdot -0.98}{1.75...} = \\
 &= -0.00...;
 \end{aligned}$$

- Figur 5f zeigt drei Vektoren  $\underline{y}_k$  der Länge 3 mit 1/f-verteilten Zufallszahlen, die das Verhalten von drei
- 25 1/f-verteilten Rauschquellen für den dritten Simulationszeitschritt  $[t_2, t_3]=[0.75, 1.25]$  simulieren. Die Matrix NOISE ergibt sich aus den drei Vektoren  $\underline{y}_k$ . Der Wert k ist dabei ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3. Jedes Element  $y_k(n=3)$  der dritten Zeile von NOISE wird aufgrund der
- 30 Gleichungen (3.7)-(3.9) nach folgender Vorschrift aus der

letzten Zufallszahl  $x_k(n=3)$  des zugehörigen Vektors  $\underline{x}$  und den Größen  $\mu_k$  und  $\sigma$  bestimmt. Beispielhaft wird nachfolgend das dritte Element  $y_1(n=3)$  des ersten Vektors  $\underline{y}_1$  berechnet:

5

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(n=3) &= \underline{x}_1(n=3) * \sigma + \mu_1 = \\ &= -0.90... * 0.75... + 0.00... = \\ &= 0.67... ; \end{aligned}$$

10

Zur konkreten Ausführung der gezeigten Berechnungsbeispiele sind noch folgende Bedingungen zu beachten.

Die in den Figuren 3, 4 und 5 gezeigten Zahlenwerte geben  
15 Zwischen- und Endergebnisse der mit Bezug auf Figur 2 beschriebenen Rechenschritte für ein erstes, für ein zweites und für ein drittes Simulationsintervall wieder. Dabei wurden alle Werte nach genauer numerischer Berechnung nach der zweiten Kommastelle abgebrochen, um diese besser wiedergeben zu können. Bei einem rechnerischen Nachvollziehen  
20 der Ausführungsbeispiele muß daher nicht mit den in den Figuren gezeigten Zwischenwerten, sondern mit den exakten Zwischenwerten weitergerechnet werden, um ausgehend von den angegebenen  $x$ -Vektoren zu den angegebenen  $\underline{y}$ -Vektoren  
25 zu gelangen.

In den Figuren 3c, 4c und 5c sind jeweils Vektoren von  $(0,1)$ -normalverteilten Zufallsvariablen gezeigt. Dabei stellt jeweils eine Zufallsvariable eine Rauschquelle dar.  
30 Hier wird der Einfachheit halber nicht dargestellt, wie man zu solchen Zufallszahlen mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1 gelangt. Dies ist dem Fachmann geläufig.



## Patentansprüche

1. Verfahren zum Erzeugen wenigstens einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens, das die folgenden Schritte aufweist:
- Bestimmen eines gewünschten Spektralwerts  $\beta$ ,
  - Bestimmen der Anzahl der zu erzeugenden Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens,
  - Bestimmen einer Intensitätskonstante  $const$ ,
  - Festlegen eines Startwerts für eine Laufvariable  $n$ , wobei solange, bis die gewünschte Anzahl von Elementen  $y(n)$  eines Vektor  $\underline{y}$  der Länge  $n$  aus 1/f-verteiltern Zufallszahlen berechnet ist, das schleifenartige Wiederholen der folgenden Schritte vorgesehen ist:
  - Erhöhen des aktuellen Werts der Laufvariable  $n$  um 1,
  - Festlegen eines Simulationszeitschritts  $[t_{n-1}; t_n]$ ,
  - Bestimmen der Elemente  $\underline{C}_{ij}$  einer Covarianzmatrix  $\underline{C}$  der Dimension  $(n \times n)$  nach der folgenden Vorschrift:
- $$\underline{C}_{ij} := const \cdot \left( -|t_j - t_i|^{\beta+1} + |t_{j-1} - t_i|^{\beta+1} + |t_j - t_{i-1}|^{\beta+1} - |t_{j-1} - t_{i-1}|^{\beta+1} \right),$$
- $$i, j = 1, \dots, n$$
- Bestimmen einer Matrix  $\underline{C}^{-1}$  durch Invertieren der Covarianzmatrix  $\underline{C}$ ,
  - Bestimmen einer Größe  $\sigma$  gemäß der Vorschrift
 
$$\sigma = \text{sqrt}(1 / e(n, n)),$$
 wobei sqrt die Funktion "Quadratwurzel" und wobei  $e(n, n)$  das durch  $(n, n)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{C}^{-1}$  bezeichnet,
  - Bestimmen einer  $(0, 1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die die  $n$ -te Komponente eines Vektors  $\underline{x}$  der Länge  $n$  bildet,



- 5 - Bilden einer Größe  $\mu$  aus den ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  und den  $(n-1)$  Elementen des Vektors  $\underline{y}$ , die für einen vorausgehenden  $(n-1)$  Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu := - \frac{y_{(n-1)}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}}$$

- wobei  $y_{(n-1)}$  die ersten  $(n - 1)$  Komponenten des Vektors  $\underline{y}$  bezeichnet, wobei  $\underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}$  die ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet und wobei  $\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}$  das mit  $(n, n)$  indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet,
- 10 - Berechnen eines Element  $y(n)$  eines Vektor  $\underline{y}$  der Länge  $n$  aus  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:
- 15

$$Y(n) = x(n) * \sigma + \mu$$

2. Verfahren nach Anspruch 1,
- 20 dadurch gekennzeichnet, daß
- $q$  Folgen von Zufallszahlen eines  $1/f$ -Rauschens gleichzeitig berechnet werden, wobei anstelle der folgenden gemäß Anspruch 1 schleifenartig zu wiederholenden Schritte:
- 25 - Bestimmen einer  $(0,1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die die  $n$ -te Komponente eines Vektors  $\underline{x}$  der Länge  $n$  bildet,
- Bilden einer Größe  $\mu$  aus den ersten  $(n - 1)$  Komponenten der  $n$ -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  und den  $(n-1)$  Elementen des Vektors  $\underline{y}$ ,
- 30

die für einen vorausgehenden (n-1) Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu := - \frac{y_{(n-1)}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}}$$

- 5 wobei  $y_{(n-1)}$  die ersten (n - 1) Komponenten des Vektors  $\underline{y}$  bezeichnet, wobei  $\underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}$  die ersten (n - 1) Komponenten der n-ten Zeile der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet und wobei  $\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}$  das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  bezeichnet,
- 10 - Berechnen eines Element  $y(n)$  eines Vektor  $\underline{y}$  der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

15 
$$Y(n) = x(n) * \sigma + \mu$$

die folgenden Schritte vorgesehen sind:

- Bestimmen von q Stück (0,1)-normalverteilte Zufallszahlen  $x_{k,n}$ , die die jeweils letzte Komponente der Vektoren  $\underline{x}_k$  der Länge n bilden, wobei  $k = 1, \dots, q$ ,
- 20 - Bilden von q Größen  $\mu_k$  gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu_k := - \frac{y_{(n-1),k}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n, n}^{-1}}$$

- 25 wobei  $y_{(n-1),k}$  die ersten (n - 1) Komponenten des Vektors  $\underline{y}_k$  bezeichnet, die für einen vorausgehenden Simulations-Zeitschritt berechnet wurden.  $\underline{\underline{C}}_{\bullet, n}^{-1}$  bezeichnet die ersten (n - 1) Komponenten n-ten Zeile

der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  und  $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$  bezeichnet das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{C}}^{-1}$ . Dies wird für  $k = 1, \dots, q$  durchgeführt.

- 5        - Berechnen von  $q$  Elementen  $y_{k,n}$ , die die jeweils  $n$ -te Komponente des Vektors  $\underline{y}_k$  der Länge  $n$  aus  $1/f$ -verteilten Zufallszahlen bilden, und zwar nach folgender Vorschrift:

$$10 \quad y_{k,n} = x_{k,n} * \sigma + \mu_k$$

wobei  $k = 1, \dots, q$ .

3. Verfahren zur Simulation eines technischen Systems, das einem  $1/f$ -Rauschen unterliegt, bei dem bei der Modellierung und/oder bei der Festlegung der an Eingangskanälen des Systems anliegenden Größen Zufallszahlen verwendet werden, die nach einem Verfahren gemäß den vorhergehenden Ansprüchen bestimmt worden sind.

- 20
4. Computerprogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines  $1/f$ -Rauschens, das so ausgebildet ist, daß ein Verfahren gemäß einem der vorhergehenden Ansprüche ausführbar ist.

- 25
5. Datenträger mit einem Computerprogramm nach Anspruch 4.

6. Verfahren, bei dem ein Computerprogramm nach Anspruch 4 aus einem elektronischen Datennetz wie beispielsweise aus dem Internet auf einen an das Datennetz angeschlossenen Computer heruntergeladen wird.

7. Computersystem, auf dem ein Verfahren zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines  $1/f$ -Rauschens nach einem der Ansprüche 1 bis 3 ausführbar ist.

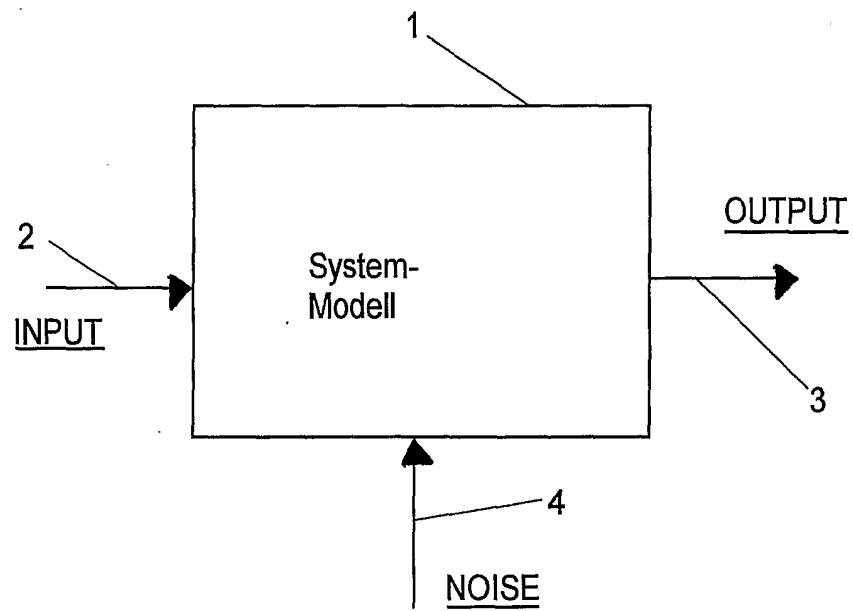


Fig. 1

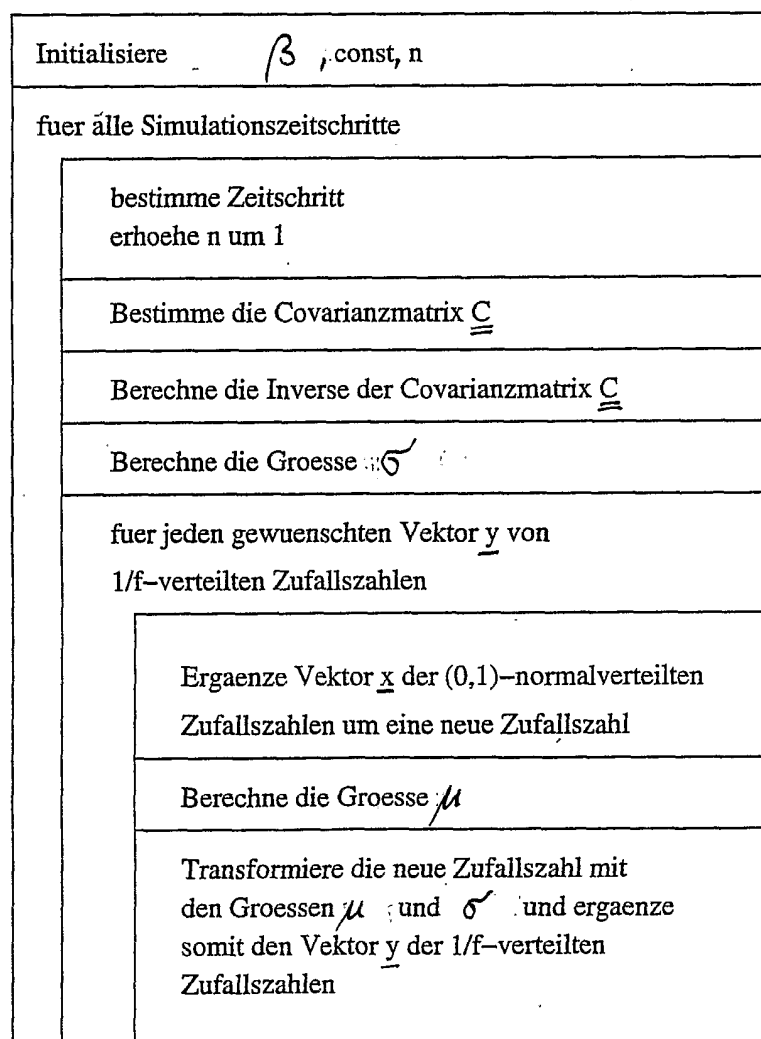


Fig. 2

$$\underline{\underline{c}} = [0.70]$$

Fig. 3a

$$\underline{\underline{c}}^{-1} = [1.41]$$

Fig. 3b

$$\sigma = 0.84$$

Fig. 3c

x-Vektor Nr. 1: [-0.35]

x-Vektor Nr. 2: [1.73]

x-Vektor Nr. 3: [0.79]

Fig. 3d

$\mu$  für x-Vektor Nr. 1: 0.00

$\mu$  für x-Vektor Nr. 2: 0.00

$\mu$  für x-Vektor Nr. 3: 0.00

Fig. 3e

y-Vektor Nr. 1: [-0.30]

y-Vektor Nr. 2: [ 1.45]

y-Vektor Nr. 3: [ 0.66]

Fig. 3f

Fig. 3

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.17 \\ 0.17 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Fig. 4a

$$\mathbb{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.69 & -1.15 \\ -1.15 & 4.79 \end{bmatrix}$$

Fig. 4b

$$\sigma = 0.45$$

Fig. 4c

x-Vektor Nr. 1: [-0.35, 0.39]

x-Vektor Nr. 2: [ 1.73, 2.24]

x-Vektor Nr. 3: [ 0.79, -0.46]

Fig. 4d

$\mu$  für x-Vektor Nr. 1: -0.07

$\mu$  für x-Vektor Nr. 2: 0.35

$\mu$  für x-Vektor Nr. 3: 0.16

Fig. 4e

y-Vektor Nr. 1: [-0.30, 0.10]

y-Vektor Nr. 2: [ 1.45, 1.37]

y-Vektor Nr. 3: [ 0.66, -0.05]

Fig. 4f

Fig. 4



$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.17 & 0.22 \\ 0.17 & 0.25 & 0.17 \\ 0.22 & 0.17 & 0.70 \end{bmatrix}$$

Fig. 5a

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.75 & -0.98 & -0.31 \\ -0.98 & 5.34 & -0.98 \\ -0.31 & -0.98 & 1.75 \end{bmatrix}$$

Fig. 5b

$$\sigma = 0.75$$

Fig. 5c

x-Vektor Nr. 1: [-0.35, 0.39, -0.90]

x-Vektor Nr. 2: [ 1.73, 2.24, -0.26]

x-Vektor Nr. 3: [ 0.79, -0.46, 0.53]

Fig. 5d

$\mu$  für x-Vektor Nr. 1: 0.00

$\mu$  für x-Vektor Nr. 2: 1.03

$\mu$  für x-Vektor Nr. 3: 0.09

Fig. 5e

y-Vektor Nr. 1: [-0.30, 0.10, -0.67]

y-Vektor Nr. 2: [ 1.45, 1.37, 0.83]

y-Vektor Nr. 3: [ 0.66, -0.05, 0.49]

Fig. 5f

Fig. 5