



# (12)发明专利申请

(10)申请公布号 CN 105814603 A

(43)申请公布日 2016.07.27

(21)申请号 201480043658.9

蒂埃里·阿尔伯特·让-路易·布鲁

(22)申请日 2014.05.30

(30)优先权数据

1309689.6 2013.05.30 GB

(74)专利代理机构 深圳鼎合诚知识产权代理有限公司 44281

代理人 彭愿洁 彭家恩

(85)PCT国际申请进入国家阶段日

2016.02.01

(51)Int.Cl.

G06T 5/00(2006.01)

G06T 3/40(2006.01)

G06T 5/50(2006.01)

G06F 17/14(2006.01)

(86)PCT国际申请的申请数据

PCT/GB2014/051671 2014.05.30

(87)PCT国际申请的公布数据

W02014/191771 EN 2014.12.04

(71)申请人 帝国创新有限公司

地址 英国伦敦

申请人 香港中文大学

(72)发明人 何塞·安东尼奥·尤莉根

皮尔·路易吉·德拉古蒂

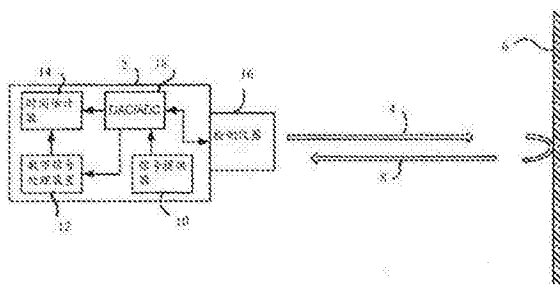
权利要求书3页 说明书34页 附图5页

(54)发明名称

方法和装置

(57)摘要

一种信号处理方法,用于从被一仪器函数所失真的采样序列中估计信号的频域表示,所述方法包括获取所述采样序列;获取一系列的系数,其适配使一系列的基本函数适于表征一复指数函数,其中所述一系列的基本函数包括多个基本函数,各基本函数被所述仪器函数在信号域的移位函数版本所定义;基于所述采样序列和所述系数估计所述信号的频域表示;其中,仪器函数的估计是基于所述仪器函数在频域内与所述复指数函数相关的频率处的特性。



1. 一种信号处理方法,用于从被一仪器函数所失真的采样序列中估计信号的频域表示,其特征在于,所述方法包括:

获取所述采样序列;

获取一系列的系数,其适配使一系列的基本函数适于表征一复指数函数,其中所述一系列的基本函数包括多个基本函数,各基本函数被所述仪器函数在信号域的移位函数版本所定义;

基于所述采样序列和所述系数估计所述信号的频域表示;

其中,仪器函数的估计是基于所述仪器函数在频域内与所述复指数函数相关的频率处的特性。

2. 如权利要求1所述的方法,其特征在于,所述采样在信号域内被一采样间间隔所隔开,所述各基本函数在信号域内被一整数的采样间间隔所移位,所述适配包括投影到被所述基本函数所定义的空间。

3. 如权利要求1所述的方法,其特征在于,所述采样在信号域内被一采样间间隔所隔开,所述各基本函数在信号域内被一非整数的采样间间隔所移位,所述适配通过降低一优值函数来实现。

4. 如权利要求1、2或3所述的方法,其特征在于,所述系数包括分别与所述基本函数中一个基本函数相对应的频域表示。

5. 如权利要求1至4中任一项所述的信号处理方法,其特征在于,所述复指数函数包括信号域振动分量,所述仪器函数通过其在所述频率处的特性被表示的频率,其包括所述振动分量的频率。

6. 如权利要求5所述的信号处理方法,其特征在于,所述频率均匀分布于所述频域。

7. 如权利要求5或6所述的信号处理方法,其特征在于,所述频率被选取用于减少所述仪器函数在所述频率处的幅度的变化,同时增加所述频率间的间隔。

8. 如权利要求5、6或7所述的信号处理方法,其特征在于,所述信号属于一种有限新息率信号,所述频率基于此种信号的新息参数的最大似然估计的表现被选取。

9. 如权利要求1至8中任一项所述的信号处理方法,其特征在于,还包括:基于其频域表示,提供所述信号的估计。

10. 如权利要求1-9中任一项所述的信号处理方法,其特征在于:

获取由所述系数和基本函数表征的所述复指数函数提供的所述表示的误差;

以及,基于所述误差,决定是否重新估计所述信号的频域表示。

11. 如权利要求10所述的信号处理方法,其特征在于,决定是否重新估计所述信号的频域表示,其包括:获取在原始信号中的噪声估计,基于所估计的噪声和在所述复指数函数的表示中的所述误差进行比较。

12. 如权利要求10或11所述的信号处是方法,其特征在于,重新估计所述信号的频域表示,其包括:确定一滤波器,用于使估计的所述信号的频域表示的能量最小化;以及基于所述滤波器对所述频域表示进行修正。

13. 如权利要求12所述的信号处理方法,其特征在于,基于所述滤波的修正包括:使用所述滤波器的零点获取所述信号在信号域上描述位置的参数的估计。

14. 如权利要求10或11所述的信号处理方法,其特征在于,重新估计所述信号的频域表

示包括:通过从一矩阵束问题得到特征值来获取所述信号在信号域上描述位置的参数的估计。

15. 如权利要求1至14中任一项所述的方法,其特征在于,所述信号包括一图像,所述方法还包括基于与所述复指数函数相关的频率对所述图像的频域表示进行标定;确定一系列的滤波器系数 $b_{kj}$ ,用于使所述图像的频域表示的能量最小化;以及确定从所述滤波器系数中在所述图像内确定一边界。

16. 一种图像配准方法,其包括权利要求15所述的方法,还包括:

确定一变换式,用于基于所述边界将所述图像与一第二图像进行配准,以及基于从所述第二图像中获取的边界将所述图像与第二图像进行配准。

17. 一种提高图像分辨率的方法,其特征在于,包括根据权利要求15所述的方法对多幅图像中的每一幅图像,都识别至少一条边界;为每边边界,都确定一变换式,用于将各边界与一被选取相关的边界进行配准;基于所述多幅图像和变换式确定一合成图像。

18. 如权利要求17所述的方法,其特征在于,确定所述合成图像包括基于从至少一幅图像的采样和与此幅图像相关的变换式确定所述合成图像中像素的值。

19. 一种校正信号采集设备的方法,所述信号采集设备包括一信号采集仪器,所述方法包括:

获取所述仪器的转移函数的估计;

选取一系列在频域内均匀分布的频率;

以及,基于所述转移函数在所述选取的频率处的采样在一存储设备内存储系数。

20. 如权利要求19所述方法,其特征在于,所述频率被选取用于减少仪器函数在所述频率处的幅度的变化,同时增加所述频率间的间隔。

21. 如权利要求19或20所述的方法,其特征在于,所述信号采集设备适用于采样有限新息率信号,所述频率基于此种信号的新息参数的最大似然估计的表现被选取。

22. 如权利要求19至22中任一项所述的方法,其特征在于,所述频率被选取用于减少一基于这些频率所确定的克拉美罗界。

23. 如权利要求19至22中任一项所述的方法,其特征在于,所述信号采集设备用于基于所述转移函数系数和信号域的函数版本确定采集的信号的频域表示。

24. 一种数字信号处理装置,其包括:

一数据获取器,用于获取信号的采样序列,其被一仪器函数所失真;

一数据标定器,用于使用系数标定所述采样序列,其中所述系数被选取用于通过一系列的基本函数近似一复指数函数,所述基本函数通过被若干采样所移位的仪器函数所定义;

一数据提供器,用于基于被标定的采样提供所述信号的频域表示;

其中,所述仪器函数是基于所述仪器函数在频域内与所述复指数函数相关的频率处的特性来表征。

25. 一种如权利要求24所述的数字信号处理装置,其用于执行如权利要求1至16中任一项所述的方法。

26. 一种如权利要求24或25所述的数字信号处理装置,其用于根据所述权利要深圳市19至23中任一项的方法装配。

27. 一种电脑程序产品,或电脑可读媒介,其包括用于对一处理器进行操作以执行如权利要求1至18中任一项所述的方法的程序指令。

28. 一种电脑可读媒介,其根据如权利要求19至23中任一项所述的方法进行装配。

## 方法和装置

### 技术领域

[0001] 本发明涉及信号的采集和重构,尤其涉及非带限信号像有限新息率(FRI,Finite Rate of Innovation)信号的采集和重构。

### 背景技术

[0002] 所有采样的基本问题都是从原始信号的离散序列采样点来估计原始信号。典型地,信号会因为采集测量值的仪器而失真,例如,因为将仪器的采样核与真实信号进行卷积而失真。在大部分信号处理过程中,上述失真的信号然后会被转换为若干离散采样点。众所周知,信号采样点的空间间隔会对其测量值的频率带宽产生限制。

[0003] 任何具体的信号采集仪器都有影响仪器实施测量的物理特征。这些特征可以使原始信号被采样之前就失真。这种失真的本质可以通过一仪器函数来表征。一个关于这样的仪器函数的例子是光学系统的点扩散函数。仪器函数描述了在原始信号被采样前仪器对它的失真的影响。

[0004] 有两种方法来提高基于信号测量值的采样对信号进行估计的精确度。第一种方法是增加采样带宽(提高采样频率)。第二种方法是降低仪器函数的失真影响,以一个光学系统为例,可以通过降低其点扩散函数的空间幅度来达到这个目的。

[0005] 对于某些种类的信号,像有限新息率(FRI,Finite Rate of Innovation)信号,一个解决信号恢复问题的理论方法是假定仪器函数属于被认为是指数再生核的这一类函数。这类函数是通过每个这样的核从位移的核的线性组合中重构任意复指数函数的能力来定义的。

[0006] 在实际使用的仪器中,仪器函数取决于仪器的实际物理限制,例如,在一个光学系统中,光模组中的光圈和其他部件定义了此仪器函数。因而,实际仪器的仪器函数通常不是指数再生核函数。另外,从FRI重构使用指数再生核发展而来的理论方法,其在有噪声时会遭受非常差的稳定性,例如,原始信号与模型参数之间的偏差。当然,噪声是固存于任何实际的物理测量中。因而,虽然上述理论方法在本领域被众所周知许多年,但这些理论方法还是没有应用到真实世界实用的系统中。

### 发明内容

[0007] 本申请是针对真实世界实际使用的系统在存在测量噪声的情况下信号的实际采样、频率空间估计和恢复。上述信号可以包括有限新息率(FRI,Finite Rate of Innovation)信号以及其他类型的信号。

[0008] 本申请的实施例基于仪器函数的知识通过修改信号的离散采样以提供一个对信号的频域估计从而来处理上述问题。特别地,这些采样点是通过一系列的系数 $C_{mn}$ 被标定。这些系数是被选择来使一系列的基本函数 $h_n$ 适合表达一复指数函数。每个这样的基本函数都通过仪器函数在信号域的转换后的其在信号域中表示来被定义。仪器函数的描述是基于在频域上以被选择的若干频率 $\omega_m$ 对仪器函数的描述。这些频率也与被用于选择上述系数

$C_{mn}$ 的复指数函数有关。被用于选择上述系数 $C_{mn}$ 的复指数函数可以包括 $\exp\{-amt\}$ ,其中 $t$ 表示信号域位移。例如,在其为时域函数的情况下,参数 $t$ 表示一个时间延迟,而当其为空间域函数的情况下, $t$ 可以表示一个空间位移而不是一个时间延迟。

[0009] 上述的那些频率 $am$ 可以是拉普拉斯变换意义上的复频率,其中复频率的虚部表示一振动分量频率,以及复频率的实部表示信号的衰减或增强。

[0010] 本申请的实施例涉及到通过基于仪器函数的估计为仪器选取上述的频率和生成相应的系数 $C_{mn}$ 来配置一信号处理装置12的方法。

[0011] 为了帮助理解本发明,本发明选取的一些具体的实施例在下面将会被讨论。这些实施例中的第一个实施例涉及到基于脉冲序列的飞行时间的距离测定。选择此例子是因为它涉及到一包括脉冲序列的信号的估计。具有技术背景的读者将会很欣喜,因为在本申请的文本中,大部分实用的信号和特别是脉冲序列将会通过一系列信号的点的时间和振幅被描述。因此,虽然上此例子是被提供用来作为了解本申请的一个途径,但是应该了解的是,本申请的装置和方法可以被应用到对任何信号的信号处理中。

[0012] 本申请可以特别地应用于FRI信号,但也可以被应用于其他类型的信号。FRI信号,顾名思义其每单位时间有有限数量的自由度,其要么是周期的,要么是非周期的。FRI信号的例子,包括狄拉克 $\delta$ 函数、非均匀样条函数、正弦函数和分段多项式的信号流。

[0013] 信号的这些类型的每一种都可以被它们的“新息参数”表征。例如,狄拉克 $\delta$ 函数序列的新息参数是 $\delta$ 函数在信号域(例如时间域或空间域)的位置 $t_k$ 和幅度 $a_k$ 。这种种类的FRI信号是被用作为下面大部分讨论的基础,因为几乎所有信号都可以简化为用一系列的 $\delta$ 函数来表示。但可以领会知道的是,本申请所讲授的也可以被应用于其他任何类型的信号。

[0014] 一方面,本申请提供一种信号处理方法,用于从被一仪器函数( $h$ )所失真的采样序列( $y_n$ )中估计信号( $x$ )的频率表示( $X$ ),所述方法包括:获取采样序列( $y_n$ );获取系数( $C_{mn}$ )序列,用于使一套基本函数( $h_n$ )适用于表达一复指数函数,其中此一套基本函数包括多个基本函数,每一个基本函数都通过在信号域里仪器函数的位移后的函数被定义;基于采样( $y$ )序列和系数( $C_{mn}$ )序列估计信号( $x$ )的频域表示( $X$ );其中仪器函数是基于在频域中以与复指数函数相关联的频率对仪器函数的表征特性。

[0015] 一方面,本申请也提供一种数字信号处理装置,其包括:一数据获取器,用于信号 $y$ ( $t$ )的采样序列 $y_n$ ,其与被仪器函数 $h$ 所失真的信号 $x$ 对应;一数据定标器,用于使用系数 $C_{mn}$ 对采样序列 $y_n$ 进行定标,其中系数 $C_{mn}$ 是被选取用于从一套基本函数 $h_n$ 中来近似一复指数函数,此基本函数 $h_n$ 是被若干采样点 $n$ 所位移的仪器函数定义;一数据提供器,用于基于被标定的采样提供信号 $x$ 的频域表示 $X$ ;其中仪器函数是基于在频域中以与复指数函数相关联的频率对仪器函数的表征特性。

[0016] 信号的采样点可以通过采样间隔或采样周期在信号域被隔开。每个基本函数都可以在信号域通过一采样间隔整数 $n$ 被位移至其它基本函数,在这些例子中,对复指数函数的适配可以包括被这些基本函数所定义的空间投影。在一些例子中,每个基本函数可以通过采样间隔非整数数字在信号域被位移,在这些例子中,对复指数函数的适可以通过降低优化函数来实施。各系数( $C_{mn}$ )可以包括与各自对应的基本函数( $h_n$ )的频域表示( $H_n$ )。复指数函数可以包括信号域振动分量,以及用于表征仪器函数的频率包括振动分量的频率。复指数函数可以唯一地由信号域的若干振动分量组成。上述被提供的信号估计对噪声有特别的

鲁棒性。

[0017] 在一些可能性中,上述系数包括在被选取的频率上的基本函数 $h_n$ 的频域表示 $H_n$ 的倒数。在一些可能性中,上述系数包括与基本函数 $h_n$ 的频域表示 $H_n$ 相反的表达。上述系数可以通过在信号域上与仪器函数自相关的Z变换被标定。

[0018] 被选取的频率在频域上可以是均匀分布的,在一些情况下,上述频率被选取用于降低以这些频率表征的仪器函数的在数量级的变化,同时增加上述各频率的间距。

[0019] 上述被提供的信号估计提高了对噪声的适应恢复性。在一些可能性中,信号有K个自由度,其中K是一个整数, $n=0,1,\dots,P$ ,其中 $P \leq 2K-1$ 。

[0020] 在一些可能性中,被估计的信号属于有限新息率(FRI, Finite Rate of Innovation)信号,频率的选取是基于上述种类的信号的新息参数的最大似然估计值的表现。这可以通过减小克拉美-罗界来实现。在一些可能性中,所述方法包括获取通过由系数( $C_{mn}$ )和基本函数( $h_n$ )构成的复指数函数的表示中的误差;以及基于此误差,决定是否重新估计信号的频域表示(X)。决定是否重新估计信号的频域表示(X),可以包括获取在原始信号中的噪声的估计;以及基于被估计的噪声和上述复指数函数的表示中的误差进行比较。

[0021] 在一些可能性中,重新估计信号的频域表示包括确定一滤波器,用于使信号(x)的频域估计表示(X)的能量最小化,以及基于此滤波器修正此频域表示。这可以通过用一个近似的零化滤波器来实现。在一些可能性中,基于上述滤波器的修正包括使用此滤波的若干零点来获取在信号域中描述上述信号的位置参数的估计。

[0022] 零化滤波器方法不一定需要被使用,例如,在一些可能性中,重新估计信号的频域估计表示包括通过从矩阵束问题中得到特征值来获取在信号域中描述上述信号的位置参数的估计。

[0023] 在一些可能性中,上述信号包括一图像,上述方法进一步包括基于与上述复指数函数相关的频率对图像的频域表示进行定标,确定滤波器系数序列,用于使此图像的频域表示的能量最小化,以及从滤波器系统中在图像里确定一边界。

[0024] 图像数据可以被这样处理,通过估计每一行的频域表示,然后估计每一列的频域表示,这将会是令人欣喜的。在一些可能性中,上述图像处理可以用于图像间的配准,在这种情况下,上述方法包括:确定一变换式,用于基于上述边界和基于为第二幅图像获取的一边界用第二幅图像来配准第一幅图像。

[0025] 本申请也提供了一种提高图像分辨率的方法,包括识别至少一边界,用于多幅图像中每一幅图像,以及对于每一边界,确定一变换式,用于使用被选取的参考边界来配准各边界,以及基于上述多幅图像和变换式确定一合成图像。

[0026] 确定上述合成图像可以包括基于从至少一幅图像的采样和与此图像相关的变换式来确定在合成图像中的像素值。

[0027] 一方面,本申请提供一种校正信号采集装置的方法,其包括一信号采集仪器,所述方法包括:获取此仪器的传递函数的估计;选择频率序列,其均匀分布于频域;以及基于用被选择的频率对所述传递函数的采样在此装置的存储装置里存储系数( $C_{mn}$ )。

[0028] 这些频率被选择用于降低以这些频率表征的仪器函数的在数量级的变化,同时增加上述各频率的间距。

[0029] 在一些可能性中,上述信号采集装置适用于采集有限新息率(FRI, Finite Rate

of Innovation)信号,频率的选取是基于上述种类的信号的新息参数的最大似然估计值的表现。

[0030] 这些频率可以被选择用于减小基于这些频率确定的克拉美-罗界,正如附件1中所讨论的那样。

### 附图说明

[0031] 本申请的实施例将通过给出的例子结合附图来被讨论,其中:

[0032] 图1为一包括信号处理装置的距离测定的结构示意图;

[0033] 图2为对一信号进行采样的处理流程示意图;

[0034] 图3为一距离测定的结构示意图,其展示了图1中信号处理装置12的详细结构示意图;

[0035] 图4为如图3所示的信号处理装置12进行操作的一种方法;

[0036] 图5为一图像处理方法和装置,其可以使用图3的信号处理装置12和/或图4的方法进行实施;

[0037] 图6为提高图像分辨率的方法;

[0038] 图7对图6所示的方法进一步的展示的实施例。

### 具体实施方式

[0039] 图1展示了一距离测定装置2,其用于基于信号的飞行时间确定距离。

[0040] 距离测定装置2被配置来引导一信号4飞向物体6以接收从此物体反射回来的信号号8,以及基于输出信号4的发送和反射信号8的接收这两者的时间延迟来确定此装置2与物体6的距离。

[0041] 距离测定装置2包括一信号提供器10,用于向物体6发送输出信号4。

[0042] 信号提供器10也可以提供一输出信号给一时间估计器。

[0043] 距离测定装置2也可以包括一用于检测上述反射(进入)信号的仪器。

[0044] 一模数转换器18(ADC)被连接于所述检测仪器16,用于将从仪器16接收到的信号转换为数字信号。

[0045] 所述模数转换器18连接于一数字信号处理装置12,用于向数字信号处理装置12提供所述接收信号的采样。

[0046] 所述数字信号处理装置12用于处理所述采样,以及提供处理过的采样给时间估计器14,时间估计器14用于估计此进入的反射信号的时间,以及确定输出信号和此反射信号之间的延迟。

[0047] 这使距离测定装置基于信号的飞行时间来确定与物体6的距离成为可能。

[0048] 如图2所示,被仪器接收的反射信号8,包括一时域信号 $x(t)$ 。

[0049] 检测仪器16会使进入的信号失真,例如通过引入延迟和衰减使进入的信号失真。

[0050] 这种失真可以通过一仪器函数来描述,例如,仪器16的脉冲响应。

[0051] 信号 $x(t)$ 被检测仪器所失真后的 $y(t)$ ,接着被ADC18采样,以提供此失真信号的离散表示 $y(n)$ 。

[0052] 为了确定距离测定装置2和物体6的距离,距离测定装置2基于信号数字转换的表

示 $y(n)$ 确定发送输出信号4和接着反射信号8之间的延迟。

[0053] 测试的精度是受到由仪器函数引入的失真和ADC的精度限制。

[0054] 相应地,本文中距离估计的问题归纳为所有采样的基本问题——如上面所提,例如,如何从信号的离散采样序列中恢复原始信号。

[0055] 基于脉冲序列来进行距离测定的例子,被用于理解本申请,在本申请中,具有专业背景的读者可以领会知道,许多实际的信号,包括脉冲序列,也可以通过一系列的 $\delta$ 函数所表示。

[0056] 因而,虽然在距离估计中描述了这个例子,但是这些原则可以被应用到任何信号,尤其是可以被一系列的 $\delta$ 函数所表示的信号。

[0057] 图3描绘了与图1和图2相关的距离测定装置更详细的例子。

[0058] 图3所示的装置包括一用于获取测试信号的仪器,一用于提供被测信号的采样序列的模数转换器(ADC)18,一信号处理装置12,以及一时间估计器。

[0059] 信号处理装置12用于接收来自上述ADC的采样,以及提供被仪器测量的信号的频域表示的估计给时间估计器。

[0060] 信号的信号域表示可以从其频域表示中得到。

[0061] 相应地,时间估计器14可以基于所述信号处理装置的输出估计出被发送的信号与其信号域表示之间时间域上的延迟。

[0062] 信号处理装置12可以单独被地提供,其与图3所示的距离测定装置的剩余部分是分开的。

[0063] 信号处理装置12及其操作方法可以被应用于本文其它地方。

[0064] 信号处理装置12及其操作方法可以被应用于本文其它地方。

[0065] 信号处理装置12包括数据获取器22,用于从一模数转换器中获取信号的采样 $y(n)$ 。

[0066] 数据获取器2与数据定标器30连接,所述数据定标器30与系数提供器20连接。

[0067] 数据定标器30还与数据提供器34相连,数据提供器34用于从所述信号处理装置中提供一输出。

[0068] 进一步地,信号处理装置12还包括数据调谐器32,其分别与数据提供器34、系数提供器20和数据获取器22相连。

[0069] 数据获取器22包括一存储器24,用于存储信号的采样;一输入接口26,用于使数据从一数字采样源像ADC18中被提供到存储器24中。

[0070] 数据获取器2还包括一耦合器,用于使数据定标器30和数据调谐器32可以从存储器24读取信号采样。

[0071] 系数提供器20包括一存储器21,用于存储系数 $C_{mn}$ ,以及提供所述系数给所述数据定标器。

[0072] 所述系数 $C_{mn}$ 是被选取以通过定义一系列基本函数的线性组合来近似一复指数函数,例如:

$$[0073] \quad \sum_n C_{mn} h_n(t) \cong \exp\{\alpha_m t\} \quad (1)$$

[0074] 所述基本函数 $h_n(t)$ 是被在信号域的仪器函数 $h_n$ 的各位移版本所定义。

[0075] 其中表示在信号域的位移,例如通过多个采样间隔 $n$ ;频率 $\alpha_m$ 可以是复频率,其中复频率的虚部表示一振动分量频率,以及复频率的实部表示信号的衰减或增强(衰退或增加)。

[0076] 在图3所示的例子中,系数提供器20包括系数 $C_{mn}$ ,其通过下列关系被选取:

$$[0077] \quad C_{mn} = \frac{\exp\{\alpha_m n\}}{H(\alpha_m)} \quad (2)$$

[0078] 其中 $H(\alpha_m)$ 包括以频率 $\alpha_m$ 被采样的仪器函数的频率表示版本 $h_n$ 。所述频率 $\alpha_m$ 是被选取用来减少以这些频率采样的仪器函数 $|H(\alpha_m)|$ 在量级上的变化,同进增加了所述频率的间隔。

[0079] 如上面所看到的一样,参数 $n$ 与在信号域的位移有关。

[0080] 数据定标器30用于通过数据获取器22来获取信号采样 $y(n)$ 。

[0081] 数据定标器30用于用所述系数 $C_{mn}$ 对所述采样进行定标,以及用于通过下面关系将被标定的采样相加以估计所述信号的频域表示 $X(\alpha_m)$ 。

$$[0082] \quad X(\alpha_m) = \sum_n C_{mn} y_n \quad (3)$$

[0083] 数据定标器30用于提供信号的频域表示的估计 $X(\alpha_m)$ 给所述数据提供器。

[0084] 在此步骤中为了达到完整性,我们注意到(参数附件1),所述估计 $X(\alpha_m)$ 可以被写成如下表述:

$$[0085] \quad X(\alpha_m) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m - \zeta_m \quad (4)$$

[0086] 其中:

$$[0087] \quad u_k = \exp\left\{\lambda \frac{t_k}{T}\right\}, \quad x_k = a_k \exp\left\{\alpha_0 \frac{t_k}{T}\right\},$$

其中 $a_k$ 和 $t_k$ 是信号的新息参数(例如一系列 $\delta$ 函数表示的信号的时间 $a_k$ 和幅度 $t_k$ )。

[0088]  $\zeta_m$ 表示在估计中的衰减。参数 $\alpha_0$ 和 $\lambda$ 是复参数,其用于根据下列关系在复平面来定义复频率 $\alpha_m$ :

$$[0089] \quad \alpha_m = \alpha_0 + m\lambda,$$

[0090] 其中 $m$ 是一整数, $0 \leq m \leq 2K-1$ ,以及 $K$ 定义信号的自由度的数量。

[0091] 数据提供器34包括一用于存储数据的存储器35,以及一耦合器36,用于使数据定标器30和数据调谐器32可以从存储器35中读取和写入数据。

[0092] 数据提供器34还包括一输出接口38,用于使数据被数据作为输出,例如输出给时间估计器。

[0093] 数据调谐器32用于获取来自数据获取器的测试噪声估计 $E$ ,以及获取来自数据提供器的估计 $X(\alpha_m)$ 。

[0094] 数据定标器32还用于根据下列关系估计信号的频域表示的估计 $X(\alpha_m)$ 的误差 $\zeta_m$ :

$$[0095] \quad \zeta_m = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varepsilon_m \left(\frac{t_k}{T}\right) \quad (5)$$

[0096] 其中被估计的信号可以被视点 $K$ 个 $\delta$ 函数, $t_k$ 表示这些 $\delta$ 函数在信号域的位置(例如

它们的时间)以及 $a_k$ 表示它们的幅度。

[0097] 根据上面的等式4,所述幅度 $a_k$ 可以通过频域表示 $X(\alpha_m)$ 被估计(例如通过设置 $\zeta_m = 0$ ,从而基于当前估计的 $X(\alpha_m)$ 来解出等式4)。

[0098] 式5中的参数 $\alpha_m$ 表示复指数函数 $\exp\{\alpha_m t\}$ 和由信号域的被系数 $C_{mn}$ 标定的仪器函数 $h_n(t)$ 的移位版本所组合的模型的失配度,即:

$$[0099] \quad \varepsilon_m(t) = \left| \exp\{\alpha_m t\} - \sum_n C_{mn} h_n(t) \right| \quad (6)$$

[0100] 数据调谐器32用于比较误差估计 $\zeta_m$ 和测试噪声估计 $E$ ,以及用于确定是否基于所述比较结果重新进行信号估计。

[0101] 若信号要被重新估计,则数据调谐器32通过确定一滤波器 $F$ 来重新估计所述信号,所述滤波器 $F$ 用于减少估计的频域表示 $X(\alpha_m)$ 的能量,例如,通过选取用于将卷积积分 $F * X$ 向0修正的滤波器 $F$ 的系数来达到目的。

[0102] 这可以通过使用在Y.Hua和T.K.Sakar在IEEE关于声音、语音和信号处理杂志1990年5月第38卷814-824页(IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.38, pp.814-824, May 1990)所述的“一种矩阵束方法,用于估计噪声中以指数方式衰减的不衰减正弦曲线的参数(Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Undamped Sinusoids in Noise)”中的矩阵束方法来实现,或者使用M.Vetterli、P.Marliliano.和T.Blu在IEEE信号处理杂志2002年6月第50卷1417-1428页(IEEE Transactions on Signal Processing, vol.50, pp.1417-1428, June 2002)记载的“用有限新息率进行信号采样(Sampling signals with finite rate of innovation)”定义的零化滤波器方法来实现。

[0103] 数据调谐器32用于获取所述滤波器 $F$ 的 $Z$ 变换为零的 $u_k$ (例如,在复平面 $F$ 的 $Z$ 变换为零的点),以及用于基于下列关系确定 $K$ 个 $\delta$ 函数的时间参数 $t_k$ 的新估计。

$$[0104] \quad u_k = \exp\left\{\lambda \frac{t_k}{T}\right\} \quad (7)$$

[0105] 其中, $T$ 是采样间隔, $\lambda$ 表示频率 $\alpha_m$ 在复平面上的间隔。

[0106] 进一步地,数据调谐器32还基于时间 $t_k$ 的新估计来确定幅度 $a_k$ 的新估计。

[0107] 进一步地,数据调谐器32还用于根据下列关系通过修正已存在的 $X(\alpha_m)$ 的估计来重新估计信号的频域表示:

$$[0108] \quad X(\alpha_m)^{i+1} = X(\alpha_m)^i + \sum_{k=0}^{K-1} a_k^i \varepsilon_m\left(\frac{t_k}{T}\right) \quad (8)$$

[0109] 其中,上标表示迭代次数,例如, $X(\alpha_m)^{i+1}$ 表示第 $(i+1)$ 次迭代的被估计的信号的频域表示,以及 $X(\alpha_m)^i$ 表示第 $i$ 次迭代的已存在的估计。数据调谐器32用于重复确定滤波器 $F$ 和重新估计信号的频域表示 $X$ 的过程,直到参数 $a_k$ 和 $t_k$ 收敛。收敛的判断标准可以基于在连接迭代过程中被估计的参数 $a_k$ 和 $t_k$ 的绝对变率或相对变率选取,和/或基于在原始信号中的测试噪声的估计(例如迭代中的修正是否少于被估计的测试噪声的决定)。

[0110] 信号处理装置12的操作方法将通过图4来讨论。

[0111] 在操作方法中,步骤100、数据定标器30从数据获取器22中获取采样序列 $y_n$ 以及步

骤102、从系数提供器20中获取系数 $C_{mn}$ 。步骤104、所述数据定标器30使用所述系数对所述采样进行定标,以根据上式3提供估计的信号的频域表示。

[0112] 步骤106、数据调谐器32从数据获取器获取原始信号中估计的测试噪声。步骤110、数据调谐器32接着使用根据上式5中定义的关系从 $X(\alpha_m)$ 中获取的估计的幅度 $a_k$ 对模型的失配度进行定标,以确定在估计的 $X(\alpha_m)$ 中误差 $\zeta_m$ 的估计。

[0113] 步骤112、数据调谐器32比较估计的测试噪声和在上式5中定义的误差的估计。如果所述测试噪声是比与模型失配度相关的所述误差大,那数据调谐器32不会调整估计,以及步骤114、数据提供器34提供所述估计 $X(\alpha_m)$ 。

[0114] 步骤108、数据调谐器32基于在上式6中定义的通过所述系数 $C_{mn}$ 和所述基本函数 $h_n$ 提供的复指数函数的表示中的误差获取“模型失配度”的估计。

[0115] 步骤116、数据调谐器32通过一滤波器F获取幅度 $a_k$ ,其中滤波器F用于减少估计的频域表示X的能量,例如通过选取用于将卷积积分 $F*X$ 趋向0修正的所述滤波器F的系数来达到目的。步骤118、数据调谐器32确定所述滤波器在Z变换上的零点 $u_k$ (见式7),其反过来可求解时间 $t_k$ ,以及根据重新估计的X来求解幅度 $a_k$ 。这可以通过使用在Y. Hua和T. K. Sakar在IEEE关于声音、语音和信号处理杂志1990年5月第38卷814-824页(IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 38, pp. 814-824, May 1990)所述的“一种矩阵束方法,用于估计噪声中以指数方式衰减的不衰减正弦曲线的参数(Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Undamped Sinusoids in Noise)”中的矩阵束方法来实现。

[0116] 步骤122、 $t_k$ 和 $a_k$ 的值接着被测验是否收敛,如上述图3所述。若两者的值是收敛的,那么数据提供器提供估计的所述信号X的频域表示。若两者的值是不收敛的,那么重新进行步骤116、118、120和122。

[0117] 信号的 $x(t)$ 的频域估计 $X(\alpha_m)$ 可以被用于估计在信号域的信号 $x(t)$ ,从而使时间估计器14来确定发送信号和反射信号之间的时间延迟。所述估计可以通过确定矩阵束的特征值来确定新息参数,或者通过使用“零化”滤波器方法或一近似“零化”滤波器方法,或者通过对附件1中定义的Prony方法(Prony's method)的应用来实现。

[0118] 可以领会的是,虽然到目前为止被描述的例子是关于时间域信号、空间域信号,但是像图像也可以被以同样的方法处理。正如脉冲序列可以通过狄拉克 $\delta$ 函数的时间和幅度来表征,因此图像也可以通过像素的位置和强度来定义,或者通过位置、幅度和图像边界的梯度来表征,相应地,它们也可以被作为FRI信号来处理。图3和图4描述的信号处理装置12及其方法也可以被应用于确定一图像的新息参数。

[0119] 图5给出了一个具体的例子,此例子涉及到在一二维图像中定义在区域中间的边界。

[0120] 图5展示了一种图像处理装置的例子。如图5所示有一幅原始图像,以及所述图像通过一仪器函数和被采样成像素的第二个版本。图5的例子中,图像第二个版本的像素值相当于原始信号的采样 $y(n)$ 。

[0121] 图5中的装置包括一个如图3和图4描述的信号处理装置12。信号处理装置12连接于一边界确定器,边界确定器144连接于一插值器。

[0122] 信号处理装置12用于接收所述像素值,以及用图4描述的方法对像素值进行操作

以提供所述图像的频域表示。所述图像的频域表示,如图3和4所描述的例子一样,是基于频率 $\alpha_m$ ,其中所述图像处理装置的仪器函数是通过以所述频率 $\alpha_m$ 采样而被表征。自然而然地,所述频率可以包括水平和垂直分量,因此所述频率表示可以被表示为 $X(\alpha_{mx}, \alpha_{my})$ 。

[0123] 边界确定器114用于通过图像中位置频率对值 $X(\alpha_{mx}, \alpha_{my})$ 定标以提供经过定标的频域图像数据 $I(x, y)$ ,如下所示:

$$[0124] \quad I(\alpha_{mx}, \alpha_{my}) = (\alpha_{mx} + j\alpha_{my})X(\alpha_{mx}, \alpha_{my}) \quad (9)$$

[0125] 其中 $\alpha_{mx} = \frac{j2\pi xp}{M}$ ,  $\alpha_{my} = \frac{j2\pi yq}{N}$ ,  $j$ 表示-1的平方根, $M$ 和 $N$ 分别表示所述图像在 $x$ 和 $y$ 方向上的维度, $p$ 和 $q$ 为下标指数。

[0126] 进一步地,边界确定器14用于确定一系列的系数 $b$ ,其中系数 $b$ 用于通过解出或发现下式中近似解(例如在一最佳匹配)来将总量 $I$ 朝0降低:

$$[0127] \quad b_{pq} * I_{pq} = 0 \quad (10)$$

[0128] 其中 $*$ 表示卷积符号。这与发现一使总量 $I$ 归零的滤波器类似,以及可以使用附件1中描述的零化滤波器或矩阵束方法来接近。一旦 $b_{pq}$ 被确定,边界确定器144就用于求解系统等式来确定边界作为 $f(x, y) = 0$ 处图像中位置 $(x, y)$ :

$$[0129] \quad f(x, y) = \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^L b_{pq} \exp\{-\alpha_{mx}\} \exp\{-\alpha_{my}\} = 0, \quad (11)$$

$$[0130] \quad \text{其中, } \alpha_{mx} = \frac{j2\pi xp}{M}, \quad \alpha_{my} = \frac{j2\pi yq}{N}。$$

[0131] 在系统等式中, $M$ 和 $N$ 是原始图像的维度, $j$ 表示-1的平方根。此结果的验证可以在2011年五月于新加坡举行的采样处理理论和应用会议(Proc.of Sampling Theory and Application Conference)上H.Pan,T.Blu,and P.L.Dragotti发表的“使用有限新息率采样曲线”(Sampling Curves with Finite Rate of Innovation)中找到。

[0132] 插值器146用于获取来自所述边界确定器的边界数据,以及基于所述图像的采样 $(n)$ 在所述边界间进行插值。被插值的图像接着把从所述边界获取的信息和初始图像数据值合并进来以提供一幅所述图像被增强的版本。

[0133] 除了在边界间插值以提供图像增强外,本申请的实施例包括合成图像方法以提供改善的分辨率。一种这样的方法是在图6和图7中被描述。

[0134] 如图6和图7所示,步骤702、在所述方法中第一图像812被获取,所述图像的频率空间表示 $X1(\alpha_{mx}, \alpha_{my})$ 可以根据图3、4和5中描述来估计。步骤704、基于上述等式9-11第一边界在第一图像812中被识别。

[0135] 步骤706、第二图像810被获取,所述图像的率空间表示 $X2(\alpha_{mx}, \alpha_{my})$ 被估计;步骤708、第二边界在所述第二图像中被识别。这可以像第一图像一样做,但是可以领会的是,第一边界和第二边界不需要以同样的方法获取,也不需要同时获取。

[0136] 步骤710、确定一用于配准所述第一边界和第二边界的变换式,例如一仿射变换式。例如,这可以通过基于两边界间不同之处来找出一降低(例如最小化)一优值函数的变换式来实现。

[0137] 步骤714、从所述变换式中确定一系列图像像素位置806,以提供一系列拥有比所

述第一图像812和第二图像810分辨率更高的像素位置806。所述变换接着被应用于第一图像数据812,以提供经过变换的第一图像数据802。

[0138] 步骤716、接着,所述经过变换的第一图像数据802和第二图像数据810通过在各自的新像素位置806进行插值而被合成,以确定出合成图像数据820。

[0139] 自然,虽然上述方法是用两幅图像的配准来描述,但是它也可以应用于任何数量的图像。

[0140] 为了帮助理解本发明,图2所示的信号处理装置12功能是被明显地细分成若干个功能要素。可以领会的是,这些功能要素不需要被提供于明显的物理结构中,其中的一些或全部可以被提供于一个共同的物理结构,以及其中的一些或全部也可以进一步被细分。一个具体例子,信号处理装置12可以通过一信号处理器被提供,数据提供器34和数据获取器22可以包括存储元素,像可以读和/或写的累加寄存器或缓存器。例如,数据提供器34和数据获取器22可以是存储缓存,像在所述处理器芯片上的缓存。另外,上述功能也可以通过其它合适的处理器来提供,像专用集成电路(ASIC,application specific integrated circuit)、现场可编程门阵列(FPGA,field programmable gate array)或数字逻辑电路的组合。在一些实施例中,所述功能通过一电脑程序被提供。所述电脑程序包括可操作运行的程序指令,用于对一处理器进行编程,以提供所述信号处理装置的功能。所述电脑程序可以以易失或非易失性的形式存储。

[0141] 图1介绍了一个本申请中一实施例如何被使用的例子。所述具体的例子涉及到距离测定,选择此例子是因为它涉及到一包括脉冲序列的信号估计。技术领域内的人员在阅读本申请的全文中,应当可以领会的是,任何信号都可以被单点序列所描述(例如,狄拉克 $\delta$ 函数序列)。因此,虽然所述例子被提供作为理解本申请的一个途径,但是可以理解的是,本申请的所述装置和方法可以被应用于许多其它环境下的信号处理。估计脉冲序列仅仅是其中一个例子。所述仪器函数的例子包括一滤波器的脉冲响应,以及一光学系统的点扩散函数。

[0142] 多种多样的信号都可以被用于图1例子的距离测定,像光信号或声音信号(例如超声波)。但是,在本申请的全文中,应该领会的是,所述模数转换器的时间分辨率、输出信号和反射信号的速度(例如光信号的光速),限定了测量的精度。

[0143] 所述仪器函数可以通过它对单位脉冲的响应来表征,另一个途径是测量所述仪器对已知频率和幅度的信号的响应,例如使用已知频率的正弦信号。其他表征检测仪器的方法对于阅读本申请的技术人员来讲是十分明显的。

[0144] 在上述的讨论中,参数n是被用于在信号域对采样进行编号,以及用于表示在信号域的位移,例如,所述信号是一个时域信号,那么参数n就与时间延迟有关,所述信号是空间变化信号,那么参数n就与空间置换有关。

[0145] 所述延迟n可以包括整数的采样,在这种情况下所述系数 $C_{mn}$ 可以通过所述复指数函数 $\exp\{\alpha_m t\}$ 在被移位的基本函数上的正交投影被获取。但是,在一些实施例中,所述延迟n可以包括整数和非整数的采样。在这种情况下,所述系数 $C_{mn}$ 可以通过基于降低描述所述模型失配的优值函数来进行的适配步骤被获取,像:

$$[0146] \quad \varepsilon_m(t) = \left| \exp\{\alpha_m t\} - \sum_n C_{mn} h_n(t) \right|$$

[0147] 一种选择所述系数 $C_{mn}$ 的方法是,根据上述等式2定义的关系。但是,其他数值和解析的解决方法也可以被使用。例如:

$$[0148] \quad C_{mn} = \frac{H(-\alpha_m)}{\hat{a}_H(\exp\{\alpha_m\})} \exp\{\alpha_m n\}$$

[0149] 其中,  $\hat{a}_H(\exp\{\alpha_m\}) = \sum_{l \in Z} a_H[l] \exp\{-\alpha_m l\}$  是使用  $z = \exp\{\alpha_m\}$  为自变量的仪器函数  $a_H = \langle h(t-1), h(t) \rangle$  的信号域表示的自相关的Z变换。

[0150] 所述系数 $C_{mn}$ 可以通过其他方法被选取。例如,所述系数可以基于约束所述模型失配来获取在特殊位置的特殊值(例如,在一个被预设的误差度内成为0)被选取。所述方法的一个例子是,确保所述模型  $\Sigma C_{mn} h_n$  精确地插值于所述指数函数  $\exp\{\alpha_m t\}$  的  $t$  为整数处。使用这种方法,所述系数可以被定义:

$$[0151] \quad C_{mn} = \frac{1}{\sum_{l \in Z} \exp\{\alpha_m l\} h(l)} \exp\{\alpha_m n\}$$

[0152] 其他用于降低一被所述模型失配所决定的优值函数的系数也可以被使用。这样的系数的例子典型地包括所述仪器函数的频域表示。

[0153] 所述频率 $\alpha_m$ 被描述为被选择以降低以这些频率采样表征的仪器函数 $H(\alpha_m)$ 的幅度的变化,同时增加了所述频率的间隔。这可以通过许多方法来实现。在一些实施例中,信号属于一种有限新息率(FRI, Finite Rate of Innovation)信号,所述频率 $\alpha_m$ 基于此种类型的信号中新息参数的最大似然估计值的表现被选取。一种实现的方法是,通过选择那些可以减小(例如最小化)被附件1中等式16所定义的克拉美罗界的频率 $\alpha_m$ 。其他的方法也可以被使用来选取这些频率。一个或多个系列的系数 $C_{mn}$ 可以通过所述系数提供器20被存储。另外,所述模型失配 $\epsilon_m(t)$ 也可以被存储于一存储器中,例如可以被数据调谐器获取。

[0154] 在所述距离测定的例子中,所述原始信号为时域信号,因而相关的频率和信号域应当在这种情况下被理解。其他有关图像处理的例子,在这种情况下信号是空间域座号,因而相关的频率和信号域应当在那种情况下被理解。阅读本申请的技术人员应当领会,所西安市频域和信号域的联系可以通过任何一个被选择的变换式来被提供,像傅里叶级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z变换或其他任何的频率变换。

[0155] 特别地,本申请的信号处理方法和装置可以被用于神经信号的估计,或用于地震学中,或用于图像处理中。本申请的例子提供了多通道的数据采集装置,其中每一个通道都包括一像图3所描述的信号处理装置12。

[0156] 应当领会,本申请公开了一种信号处理方法,用于通过对信号的采样序列来估计所述信号的频域表示,其中所述信号的采样序列是通过一仪器被采集,以及会被所述仪器的与所采样的信号相关的仪器函数所失真。也应当领会,所述方法可以被应用于其中被描述的任何一种方法中。例如,所述方法可以包括:获取所述采样序列;获取用于适配一系列基本函数以来表征复指数函数的一系列系数,其中所述基本函数包括多个基本函数,其每一个都在信号域上被仪器函数的移位版本所定义;基于所述采样序列和系数估计所述信号的频域表示;其中所述仪器函数是基于与所述复指数函数相关的仪器函数在频率以所述频率采样来表征的。所述方法中的每一个技术特征都可以在一个或多个被描述的应用中被实施,被推广,或进一步地提炼。

[0157] 因而应当理解,所描述的实施例是被理解为例证。更多的实施例可以被构想。应当理解,与任何其中一实施例相关的所描述的任何技术特征可以被单独地使用,或者与其他被描述的技术特征一起使用,也可以与其他任何实施例中一个或多个技术特征一起使用,或者与其他任何实施例一起使用。进一步地,在不脱离本申请的精神下,上述没有被描述的相等置换和变换都可以被应用,这被定义于相关的权利要求中。

[0158] 一般地,参照所述附图,应当理解,原理功能框图是用于表示所描述系统和装置的功能。然而应当理解,所述功能也不需要一定要以那种方式来划分,这不应该被暗示为有任何上述被描述和要求的具体的硬件结构。被展示于附图中的所述功能中的一个或多个元素可以被更一进地细分,和/或分布于所述本申请的装置中任何地方。在一些实施例中,附图中的所述功能中的一个或多个元素可以被集成于一单独的功能单元中。

[0159] 在一些例子中,一个或多个存储元素可以存储数据和/或用于执行所描述的操作的程序指令。本申请的实施例提供有形的、非易失性的存储媒介,其包括用于对一处理器进行操作的程序指令,以执行一个或多个所描述的方法和/要求,和/或提供所描述的方法和/要求的数据处理装置。

[0160] 被概括的活动和装置可以通过控制器和/或处理器被执行,其通过固定逻辑像集合的逻辑门或可编程逻辑像软件和/或被一处理器执行的电脑程序指令被提供。其他各类的可编程逻辑包括可编程处理器、可编程数字逻辑(像现场可编程门阵列(FPGA))、可擦可编程只读存储器(EPROM)、电可擦可编程只读存储器(EEPROM)、专利用集成电路(ASIC)、或其他任何种类的数字逻辑、软件、代码、电子指令、闪存、光盘、只读光盘存储器(CD-ROMs)、数字化视频光盘存储器(DVD ROMs)、磁卡或光卡,其他类型的适于存储电子指令的机器可读媒介,或者它们适合的组合。

[0161] 附件1

[0162] 下面是本申请可以被作为的一种方法实现的详细描述。同时,不同的技术特征可以被认为是基本的或必要的,这仅仅是在对于被讨论具体例子的情况下,例如,由于其他被具体数字情况所强加的要求是处于考虑中。因而,这些陈述不应该被认为是以任何方式限制本发明。

[0163] 近似斯特朗-菲克斯(Strang-Fix)

[0164] 用任意核函数进行有限新息率采样

[0165] Jose Antonio Urigüen\*,Thierry Blu<sup>+</sup>,and Pier Luigi Dragotti,

[0166] 在近些年,几种新方法被发展用于对非带限信号这种特殊种类的信号进行采集和精确重构,非带限信号众所周知的例如是有限新息率(FRI)信号。这可以通过使用合理采样核和重构方案来实现。在[1]中使用的采样核是被称为指数再生核,其满足广义上的Strong-Fix条件。这些可以确保这些核和其再生多项式或指数的移位版本的合适线性组合。

[0167] 本论文的第一个贡献在于提供一个清楚的指导方针,关于当从具有噪声的采样中估计FRI信号时如何选择正确的指数再生核。接着,脱离这种情况,我们可以选择采样核以及发展出一种新的策略,其对于任何核都具有普遍意义。我们这样做,是通过注意到满足精确的指数再生条件是太严格的一个约束,我们允许一个受控的误差在再生公式中,这是为了用任何核都使用指数再生的思想,以及发展出一个对噪声具有更鲁棒的重构方案。

[0168] 数值结果验证了本文的各项贡献,尤其展示了近似指数再生策略会导致重构结果比那些使用传统精确恢复方法来获得的重构结果更稳定。

[0169] 索引词

[0170] 采样,有限新息率,噪声,密西根数学系数(MOMS),矩阵束

[0171] EDICS分类:数字信号处理-采样

[0172] I、介绍

[0173] 大多数数字信号采集系统涉及信号从模拟到数字的转换,采样定理提供了连接世界和离散时间世界的桥梁。通常地,采集过程是如图1展示的模式,其中平滑函数 $\phi(t)$ 是被称为采样核,正常地,由于采样设备会有信号失真。被过滤的连接时间信号 $y(t) = x(t) * \phi(-\frac{t}{T})$ 是被均匀地以速率 $f_s = \frac{1}{T}$ 被采样。根据此设定,测量结果被给如下:

$$[0174] \quad y_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi\left(\frac{t}{T} - n\right) dt = \left\langle x(t), \phi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle.$$

$$[0175] \quad x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \phi\left(-\frac{t}{T}\right)} \xrightarrow{y(t)} \overset{\uparrow T}{\longrightarrow} y_n$$

[0176] 图1、传统采样方案。连接时间输入信号 $x(t)$ 被 $h(t)$ 滤波以及每隔 $T$ 秒被采样。采样是通过 $y_n = (x * h)(t) |_{t=nT}$ 被给出。

[0177] 采样的基本问题是使用一系列的采样 $y_n$ 恢复原始连接时间波形 $x(t)$ 。在信号是带限的情况下,由于香农,答案是众所周知的。最近,在[2]、[1]、[3]中被展示了,它是有可能对特殊种类的非带限信号进行采样和完美重构。这样的信号被称为有限新息率(FRI)信号,由于它们可以被每时间单元有限数量的自由参数来完全描述。完美重构可以通过使用Prony方法的变种来实现,比如众所周知的零化滤波器方法[4]。在这种框架下可以被采样的信号,包括脉冲流,像狄拉克[2]、[1]、[3]、[5],分段多项式信号,分段正弦信号[6]和2-D种类信号[7]、[8]、[9]、[10]。存在噪声的情况下,FRI重构技术变得不稳定,用于提供对噪声的抵抗力的方法被展示在中[11]、[12]、[13]、[14]、[15]、[10]。

[0178] 我们注意到,不同的采样核可以被用于完全重构FRI信号,像正弦和高斯函数,这首先在关于FRI的原始论文[2]被提出,以及牢固地支集了这些核,像正弦和的家庭函数[3]、多项式和指数再生核[1]、[16]。虽然它们在无噪声背景下全部都允许完美重构,但是当存在噪声时会改变这种情况。因而,人们自然地试图弄清楚哪个清楚导致了表现的下降,以及提供精确的指导方案,关于如何设计具有最高噪声抵抗力的核。

[0179] 在本论文中,我们聚焦于指数再生核家族[1],以及提供指导方案,关于如何设备最稳定的核。我们出于两个原因聚焦于指数再生核:首先它们可以牢固地支集当处理有噪声测量时在其本身中什么是一个好的性质。其次,更为重要的是,到目前为止使用图1中的设定被用于FRI采样的牢固支集核,是指数再生核家族的一个特例。我们在附件B中证明了这个事实。

[0180] 我们的贡献是双倍的:我们首先解释了在嘈杂环境下进行FRI信号采样和重构时如何设计最有效的指数再生核。由于FRI恢复相当于在噪声中对一系列参数进行估计,我们实现通过发现使此FRI估计问题中克拉美罗界(Cramér-Rao bound)最小化的指数再生核的家族来实现最优设计。在第二个贡献中,我们脱离我们被允许将核以最能满足我们满足的方式塑造的这种情况,来考虑我们对采样设备无法控制的情况。在这种情况下,我们发展了

一个新的用于FRI采样的策略,其具有普遍性而不必管使用的是什麼核。与现有技术试图找出输入的精确参数相反的是,我们描述当噪声存在时如何实现一个高精度的近似的恢复。我们新方法的优势在于,它可以应用任何采样核。而且,它可以代替传统精确恢复框架中用像多项式样条曲线这样的核可以在理论上达到的完美重构但实际上却非常不稳定的情况。通过用新的近似框架代替原来的精确恢复策略,我们展示了一个在嘈杂噪声背景下FRI信号的可靠性重构是可能的,即使使用的是“不稳定的”核。

[0181] 本论文的大纲如下。在II部分中,我们介绍了无噪声环境下对典型的FRI信号进行采样和完美重构:一连串的狄拉克函数。在III部分,我们处理更实际的设定,即当噪声是存在于所述采样过程中。这里,我们描述实际技术来取回狄拉克函数串,以及计算对于此问题的克拉美罗界。在IV部分,我们设计了对噪声最具有抵抗力的指数再生核的家族。接着,在V部分,我们展示了近似FRI框架,以及发展了用任何核对FRI信号进行采样的基本思想。有意思的是,通过合适地定义重构步骤,我们也可以展示用这种新框架后我们可以提供已存在的核的重构精确度。在VI部分,我们展示了仿真结果,用以验证本论文的各各贡献。最后,我们在VII进行总结。

[0182] II、用有限新息率进行信号采样

[0183] 在这部分,我们提供了一个对FRI信号采样理论的简介。具体地,我们解释了如何从所述采样中完全重构狄拉克函数流。注意,对于题名复杂信号的重构,可以被减化到此例子中。

[0184] A、狄拉克函数流的完美重构

[0185] 为了清楚,我们认为输入 $x(t)$ 是 $K$ 个狄拉克函数组成的信号流,其具有位于不同时间 $t_k$ 瞬间的幅值 $a_k$ ,  $t_k \in [0, \tau)$ 以及 $k=0, \dots, K-1$ 。信号总共有 $2K$ 个自由度,可以被表示如下:

$$[0186] \quad x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \delta(t - t_k) \quad (1)$$

[0187] 现在,基于图1中的采集模型,我们用核 $\phi(t)$ 对输入进行滤波,获得以下测量结果:

$$[0188] \quad y_n = \left\langle x(t), \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right) \quad (2)$$

[0189] 其中 $n=0, i, \dots, N-i$ 。这里我们假设采样周期 $T$ 满足 $\tau=NT$ 。并且,我们还假设,对于合适的系数 $c_{m,n}$ ,其中 $m=0, \dots, P$ ,以及 $\alpha_m \in \mathbb{C}$ ,  $\phi(t)$ 是完美支集和满足下列:

$$[0190] \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \varphi(t - n) = e^{\alpha_m t} \quad (3)$$

[0191] 满足式(3)的核是被称为 $P+1$ 次指数再生核。我们具体地II-B部分讨论它们。论文的剩下部分我们将我们的分析限制于方程 $\alpha_m = \alpha_0 + m\lambda$ 的参数,其中 $\alpha_0, \lambda \in \mathbb{C}$ 。这种选择的理由在接下来的部分将会变得很清楚。

[0192] 一旦我们具有了被采样过的输入,我们需要展示,它可以从测量结果 $y_n$ 中被确定地取回。为了做了这一点,首先我们用式(3)中的系数 $c_{m,n}$ 对采样 $y_n$ 进行线性组合,以获取新的测量结果:

[0193] 
$$s_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n \quad (4)$$

[0194] 其中,  $m=0, \dots, P$ 。接着, 通过式(1)给出的信号  $x(t)$  是狄拉克函数信号流, 通过将式(2)和(4)结果我们具有了[1]:

[0195] 
$$\begin{aligned} s_m &= \left\langle x(t), \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\alpha_m \frac{t}{T}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k e^{\alpha_m \frac{t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m, \end{aligned} \quad (5)$$

[0196] 其中  $x_k = a_k e^{\alpha_0 \frac{t_k}{T}}$  和  $u_k = e^{\lambda \frac{t_k}{T}}$ 。注意, 值  $s_m$  是信号  $x(t)$  的(指数)时刻[6], 是相当于  $x(t)$  在被指数  $\{e^{\alpha_m \frac{t}{T}}\}_{m=0}^P$  所跨越的子空间的投影。我们使用等式  $\alpha_m = \alpha_0 + m\lambda$  的参数, 其中  $m=0, \dots, P$ , 对于值  $s_m$  具有一个强力的和序列等式, 这是必要的, 而强力的和序列等式是恢复步骤的关键。

[0197] 新的未知对  $(u_k, x_k)$  接着可以使用零化滤波器方法从测量结果  $s_m$  中被取回[2]、[1]、[12], 这方法熟知的像在光谱估计社区中的Prony方法[4]。令  $h_m$  表示具有Z变换

[0198]  $h(z) = \sum_{m=0}^K h_m z^{-m} = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - u_k z^{-1})$  的滤波器, 其中  $m=0, \dots, K$ , 即与值  $u_k$  相关的零值被发现。接着,  $h_m$  对获取的  $s_m$  序列进行零化:

[0199] 
$$h_m * s_m = \sum_{i=0}^K h_i s_{m-i} = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m \underbrace{\sum_{i=0}^K h_i u_k^{-i}}_{\hat{h}(u_k)} = 0. \quad (6)$$

[0200] 而且, 滤波器的零点唯一地定义了值  $u_k$ , 假设位置  $t_k$  是确定的。式(6)可以被写成矩阵-向量的形式:

[0201]  $Sh=0 \quad (7)$

[0202] 其中Toeplitz矩阵  $S$  是被列为讨厌的。通过解决上述系统, 我们通过计算  $h(z)$  的零点发现滤波器系数  $h_m$  和取回  $u_k$ 。给定  $u_k$ , 我们由于  $u_k = e^{\lambda \frac{t_k}{T}}$  可以获取位置  $t_k$ 。在算法1中我们详细说明了零化滤波器方法的主要步骤。

[0203] 注意, 假如  $\lambda$  是一个完全的虚数, 那么  $u_k$  是周期为  $2\pi \frac{T}{\text{Im}\{\lambda\}}$  的周期性值, 它是必要的

对于位置  $t_k$  满足  $0 \leq t_k \leq 2\pi \frac{T}{\text{Im}\{\lambda\}}$ , 其中  $k=0, \dots, K-1$ , 这是为了可以确定地取回它们。最后, 我们确定权重  $a_k$ , 是通过解决, 例如在式(5)中第一个连接的  $K$  等式。注意, 问题可以被解决, 仅仅当存在至少和等式一样多的未知解时, 即意味着  $P \geq 2K-1$ 。这展示了,  $P+1$  次指数再生核可以根据输入信号  $x(t)$  的自由度的数量来选取。

[0204]

**算法1 零化滤波器: 最小二乘法。**取回K个狄拉克函数信号流的新息参数 $(t_k, a_k)$  (1)

$$s_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n, \quad \text{其中, } m = 0, \dots, P.$$

- 1: 从(2)中的N个采样 $y_n$ 计算序列
- 2: 使用指数时刻 $s_m$ 建立等式(6)的系统。
- 3: 通过对Toeplitz矩阵S执行SVD以及选取与最小特征值相应的特征向量来取回零化滤波器的系数 $h_m$ , 其中 $m = 0, \dots, K$ 。

$$4: \text{计算Z变换 } \tilde{h}(z) = \sum_{k=0}^K h_k z^{-k} \text{ 的零点 } u_k = e^{\lambda \frac{t_k}{T}}, \text{ 以及获取 } \{t_k\}_{k=0}^{K-1}.$$

$$5: \text{计算 } \{a_k\}_{k=0}^{K-1} \text{ 以作为N等式 } y_n = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right) \text{ 的最小二乘法答案。}$$

如果测量结果 $y_n$ 是嘈杂的, 那么这是必要的, 通过使用III部分中的方法进行去噪声。

[0205] 到目前为止([2],[1],[12],[3]), 所有被提出的FRI重构方法都是使用相同的方法。具体地, 式(2)中N个采样点被用于形成向量 $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$ 。接着, 它们使用式(5)中的系数进行线性组合, 这相当于用合适的权重矩阵C与向量y相乘, 得到 $s = Cy = (s_0, s_1, \dots, s_P)^T$ 。在这里, s是具有P+1个新测量的向量, C是一个在位置(m, n)处具有系数 $c_{m,n}$ 的 $(P+1) \times N$ 矩阵。值s也可以用一个强力和序列来表示, 它涉及到新息参数 $(a_k, t_k)$ , 其中 $k = 0, \dots, K-1$ 它们可以从s中被取回通过使用零化滤波器方法。C的选择依赖于采样核, 以及当在无噪声环境时, 完美重构总是可以被实现, C的角色在噪声环境下变得关键, 即本论文所讨论的非理想环境。

[0206] B、指数再生核

[0207] 指数再生核是任意函数 $\phi(t)$ , 和它的移位版本的线性组合, 使用复参数 $\alpha_m$ , 这可以产生 $e^{\alpha_m t}$ 形式的再生函数。这在数学上可以被表示如下:

$$[0208] \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \varphi(t-n) = e^{\alpha_m t}, \quad (8)$$

[0209] 其中被合适选取的系数 $c_{m,n} \in \mathbb{C}$ , 以及 $m = 0, \dots, P$ , 和 $\alpha_m \in \mathbb{C}$ 。(8)中的指数再生核是满足所谓的广义上的Strang-Fix条件[17](见附件A)。具体地, 等式(8)成立当且仅当:

$$[0210] \quad \varphi(\alpha_m) \neq 0 \text{ 和 } \varphi(\alpha_m + 2j\pi l) = 0, \quad (9)$$

[0211] 其中 $m = 0, \dots, P, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $\varphi(\alpha_m)$ 表示在 $s = a$ 处 $\phi(t)$ 的双边拉普拉斯变换。

[0212] 并且, 式(8)中的系数 $c_{m,n}$ 可以被给如下:

$$[0213] \quad c_{m,n} = \langle e^{\alpha_m t}, \tilde{\varphi}(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m t} \tilde{\varphi}(t-n) dt = c_{m,0} e^{\alpha_m n}, \quad (10)$$

[0214] 其中, 函数 $\tilde{\varphi}(t)$ 与 $\phi(t)$ 正交, 例如, 当 $\tilde{\varphi}(t)$ 是 $\langle \tilde{\varphi}(t-n), \varphi(t-m) \rangle$ , 其中 $c_{m,0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_m x} \tilde{\varphi}(x) dx$ 。

[0215] 任何指数再生核可以被写成 $\phi(t) = \gamma(t) * \beta_{\alpha}(t)$ [1],[18],[19], 其中 $\gamma(t)$ 是任意函数, 甚至是一个分布,  $\beta_{\alpha}(t)$ 是E-样条函数。具有傅立叶变换 $\hat{\beta}_{\alpha}(j\omega) = \frac{1 - e^{\alpha - j\omega}}{j\omega - \alpha}$ 的函数 $\beta_{\alpha}(t)$ , 是被称为第一次主指数样条函数, 其中 $\alpha \in \mathbb{C}$ [18]。这样的函数的时域表示是 $\beta_{\alpha}(t) = e^{\alpha t}$ , 其中 $t \in [0, 1)$ , 零在别处。因而, 函数 $\beta_{\alpha}(t)$ 是牢固支集的, 以及是它自己位移版本再生指数 $e^{\alpha t}$ 的线性组合。更高层次的主指数样条函数(E-Splines)可以通过对其第一次卷积得到, 以

便,例如  $\beta_{\vec{\alpha}}(t) = (\beta_{\alpha_0} * \beta_{\alpha_1} * \dots * \beta_{\alpha_P})(t)$ , 其中  $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_P)$ , 是一个  $P+1$  次 E-样条函数。这可以在傅立叶域被写成如下形式:

$$[0216] \quad \hat{\beta}_{\vec{\alpha}}(j\omega) = \prod_{m=0}^P \frac{1 - e^{\alpha_m - j\omega}}{j\omega - \alpha_m}, \quad (11)$$

[0217] 更高次的 E-样条函数是长度为  $P+1$ , 它们的随着  $P$  而增加(即它们具有  $P-1$  个连接浮生)。这些函数可以再生任何指数在区域  $\{e^{\alpha_0 t}, e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_P t}\}$  [1]、[18]。我们也注意到, 当  $\alpha_m = 0$  时, 其中  $m=0, \dots, P$ , 所述函数  $\beta_{\vec{\alpha}}(t)$  被简化为 B-样条函数, 不再再生指数但是多项式上升到  $P$  度。

[0218] 在本论文中, 我们用实数值的采样核进行工作。因而, 我们要求,  $\gamma(t)$  和  $\beta_{\vec{\alpha}}(t)$  是实数值。我们注意到, 第二条件(即  $\beta_{\vec{\alpha}}(t)$  为实数值)是被满足当指数  $\alpha_m$  是实数, 或者是复共轭对。我们也约定指数参数是  $m=0, \dots, P$  的  $\alpha_m = \alpha_0 + m\lambda$  形式。这些条件意味着, 要么  $\lambda$  要么  $\alpha_0$  是实数值, 或者相反,  $\lambda = j\lambda_0$  是纯虚数, 在  $\text{Im}\{\alpha_0\} = -\frac{P\text{Im}\{\lambda\}}{2}$  的情况下。

[0219] II-1、在存在噪声时对 FRI 信号进行采样

[0220] “噪声”, 或者更一般为说法, 模型失配, 是存在于数据采集中, 这使得在 II-A 部分中的展现的解决方案仅仅是理想情况下的。因而, 我们假设, 我们可以获得测量:

$$[0221] \quad \tilde{y}_n = y_n + \epsilon_n = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right) + \epsilon_n, \quad (12)$$

[0222] 其  $n=0, 1, \dots, N-1$ ,  $\epsilon_n$  是 0 均值和标准差  $\sigma$  的 i. i. d. 高斯随机变量。当采样被噪声损坏时, 等式(4)中新的测量  $s_m$  会改变, 完美重构是不可能了。我们现在具有噪声时刻:

$$[0223] \quad \tilde{s}_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \tilde{y}_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n}_{s_m} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \epsilon_n}_{b_m} = \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m + b_m, \quad (13)$$

[0224] 其  $m=0, \dots, P$ ,  $x_k = a_k e^{\alpha_0 \frac{t_k}{T}}$ ,  $u_k = e^{\lambda \frac{t_k}{T}}$ ,  $k=0, \dots, K-1$ 。

[0225] 接下来, 我们回复逐个回顾一些被使用过的用来从具有噪声的采样中恢复 FRI 依赖的算法。我们也引入克拉美罗下界(CRB)来对在噪声存在时 FRI 可以被取回的精确度进行分析。这是一个均方误差(MSE)的下界, 可以被就应用于无偏估计量[20]。

[0226] A、对于具有噪声的 FRI 重构的实际方法

[0227] 正如我们在 II-A 部分解释的一样, 对于 FRI 信号的取回程序, 是基于计算新的测量系列(4)。但采样(2)是被噪声污染时, 等式(4)的测量  $s_m$  变成(13)。相应地, (7)是不再被满足, 因为现在  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}$  是具有从(13)中的  $b_m$  的 Toeplitz 矩阵。在[12]背后程序的思想是寻找一个考虑到  $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$  时使  $\|\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{h}\|^2$  最小化的解决方案。这是一个精典的最小二乘法(TLS)问题, 这可以通过使用奇异值分解(SVD)来解决。此算法可以通过在应用 TLS 前对  $\tilde{\mathbf{S}}$  去噪来进一步提高, 其中可以通过使用 Cadzow 迭代算法来去噪[12]、[21]。还存在三种可以达到相似精确度的方法。一个这样的方法, 其基于解决一个矩阵束问题[22]、[23], 是在[11]为了 FRI 而被引入。它也被用于其他 FRI 的公开出版物, 像[3]、[16], 它也被用于本论文

中的仿真。

[0228] 所有的这些方法都可以很高效地运行,当干扰为以下:噪声B的协方差矩阵满足 $R_B = E\{B^H B\} = \alpha I$ , $\alpha$ 是常量, $I$ 是单位矩阵。在这样的情况下,噪声对 $\tilde{S}$ 的奇异值分解的主值有一个相似的影响[24]、[11],这解决了为什么到目前为止被回顾的取回程序是足够的。但是,对于许多FRI核,白高斯噪声假设不成立。结果,Toeplitz噪声矩阵B的入口没有一个统一的变量,或者甚至变得相关了。为了能够正确进行奇异值分解,使噪声“预先变白”是必要的。这也是在光谱估计社区中被众多作者所提出的众所周知的方法(例如被De Moor在[24])。在我们的仿真中,我们实施了一个由使用权重矩阵 $W = R_B^{-1/2}$  [25]像 $R_A = E\{A^H A\} = I$ , $A = BW$ 构成的方法。因而,我们执行以白噪声表征的 $\tilde{S}W$ 的奇异值分解。

[0229] B、测定表现

[0230] FRI信号可以通过它们的新息参数被完全表征。例如, $K$ 个狄拉克函数信号流可以被位置 $t_k$ 和幅值 $a_k$ 所完全决定。因而,我们引入向量 $\Theta = (t_0, \dots, t_{K-1}, a_0, \dots, a_{K-1})^T$ ,目的是从式(12)中被给的 $N$ 个具有噪声的采样向量 $\tilde{y} = (\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{N-1})^T$ 估计 $\Theta$ 。为简单起见,我们假设采样周期是 $T=1$ 。一个确定所述估计问题的CRB的方法是在[12]中被给出,假设 $\in_n$ 是零均值高斯噪声,其协方差矩阵 $R = E\{e e^H\}$ , $e$ 是具有值为 $\in_n$ 的长度为 $N$ 的向量。在这种设定下,对未知参数 $\hat{\Theta}(\tilde{y}) = (\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_{K-1}, \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{K-1})^T$ 的任何无偏差估计都具有一个低下界的协方差矩阵,如下:

$$[0231] \quad \text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{y})) \geq (\Phi_y^T R^{-1} \Phi_y)^{-1}, \quad (14)$$

[0232] 其中,矩阵是通过(15)<sup>1</sup>被给出:

[0233]

$$\Phi_y = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_0 \varphi'(t_0) & \dots & a_{K-1} \varphi'(t_{K-1}) & \varphi(t_0) & \dots & \varphi(t_{K-1}) \\ a_0 \varphi'(t_0-1) & \dots & a_{K-1} \varphi'(t_{K-1}-1) & \varphi(t_0-1) & \dots & \varphi(t_{K-1}-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 \varphi'(t_0-(N-1)) & \dots & a_{K-1} \varphi'(t_{K-1}-(N-1)) & \varphi(t_0-(N-1)) & \dots & \varphi(t_{K-1}-(N-1)) \end{array} \right), \quad (15)$$

[0234] <sup>1</sup>矩阵可以通过计算在 $\Theta$ 中与各参数相关的 $\tilde{y}_n$ 的派出得出。即, $\Phi_y$ 的列向左导是 $\frac{\partial \tilde{y}_n}{\partial t_k}$ ,列向右导是 $\frac{\partial \tilde{y}_n}{\partial a_k}$ 。

[0235] 虽然这是测量在给定具有噪声的采样 $\tilde{y}$ 时不同FRI恢复技术[12]、[11]的表现的正确方法,但是我们也注意到,在实际过程中FRI重构方法以时间序列 $\tilde{s} = C\tilde{y}$ 上操作。因而,它是有趣的,将与测量 $\tilde{s}$ (其有可能对采样的数量要少)相关的CRB剥去。在这种新情况下,边界是通过[26]被给出:

$$[0236] \quad \text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{s})) \geq (\Phi_s^H R_b^{-1} \Phi_s)^{-1}, \quad (16)$$

[0237] 其中 $\Phi_s$ 采取下列形式:

$$[0238] \quad \Phi_s = \begin{pmatrix} a_0 \alpha_0 e^{\alpha_0 t_0} & \dots & a_{K-1} \alpha_0 e^{\alpha_0 t_{K-1}} & e^{\alpha_0 t_0} & \dots & e^{\alpha_0 t_{K-1}} \\ a_0 \alpha_1 e^{\alpha_1 t_0} & \dots & a_{K-1} \alpha_1 e^{\alpha_1 t_{K-1}} & e^{\alpha_1 t_0} & \dots & e^{\alpha_1 t_{K-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 \alpha_P e^{\alpha_P t_0} & \dots & a_{K-1} \alpha_P e^{\alpha_P t_{K-1}} & e^{\alpha_P t_0} & \dots & e^{\alpha_P t_{K-1}} \end{pmatrix} \quad (17)$$

[0239]  $R_b = E\{bb^H\}$ , 这里,  $(\cdot)^H$  是希尔伯特变换(Hermitian transpose),  $b$  是  $P+1$  的具有噪声的值  $b_m$  的向量。

[0240] 进一步地, 由于我们已经假设被添到采样中的噪声  $\in_n$  是相加进去的, 白高斯, 具有变量  $\sigma^2$ , 被滤除的噪声的协方差矩阵为  $R_b = E\{bb^H\} = \sigma^2 CC^H$ 。相应地, 在公式(14)和(16)中存在一个直接关系, 这可以通过矩阵  $C$  来表示。为了理解这一点, 注意  $\tilde{s} = C(y+e) = s+b$ , 也注意  $\Phi_s = C\Phi_y$ 。并且, 我们知道

$$[0241] \quad \text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{y})) \geq (\Phi_y^H R^{-1} \Phi_y)^{-1} = \sigma^2 (\Phi_y^H \Phi_y)^{-1}$$

[0242] 由于噪声  $\in_n$  是加性高斯白噪声(AWGN)。相应地, 这是真的:

$$[0243] \quad \text{cov}(\hat{\Theta}(\tilde{s})) \geq (\Phi_s^H R_b^{-1} \Phi_s)^{-1} = \sigma^2 (\Phi_y^H C^H (CC^H)^{-1} C \Phi_y)^{-1} = \sigma^2 (\Phi_y^H C^\dagger C \Phi_y)^{-1}$$

[0244] 其中  $C^\dagger = C^H (CC^H)^{-1}$  是  $C$  的左伪逆。当时刻  $P+1$  的数量等于采样数量  $N$ , 两者的公式是相等的。由于  $C^\dagger C = C^{-1} C = I_N$ , 这可以被容易地看出。使用代替性方法预设的CRB与被给定的系数矩阵  $C$  是一致的, 其是平方和可逆的。直观地, 这里存在一个优化配置, 因为没有采样的线性组合可以基于采样本身来提高所述估计。当  $P+1 < N$  通过所述时刻取回新息参数是代替的次优解。

[0245] 实验上, 我们已经注意到, 当  $C$  是足够好时, FRI算法达到了边界(16)。因而, 我们现在的目标是设备核, 用于产生正确状态的  $C$ ,  $P$  在任何选择下都使(16)最小化。<sup>2</sup>

[0246] 没有涉及太多超多本部分的技术细节, 我们观察到条件  $P-1 = N$  可以被强加仅仅为了顺时针采样。例如, 当采样周期信号使用  $N$  个采样。这种条件不能被强加于无限长度信号, 由于采样的数量是那种情况下是无限的, 连接重构算法将使用尽可能的采样变化数量来一步步操作。

[0247] IV、最优指数再生核

[0248] 正如之前所提一样, 指数再生核是任何形式的函数  $\phi(t) = \gamma(t) * \beta_\alpha(t)$  [1]、[18], 其中  $\gamma(t)$  是任意的,  $\beta_\alpha(t)$  是E-样条函数。在本部分, 我们想要找出一规则, 用于如何选取指数参数  $m=0, \dots, P$  的  $a_m = a + j(m-P/2)\lambda_0$ , 和函数  $\gamma(t)$ , 以为了使使用这些核的FRI重构技术也尽可能地稳定。找出最优的参数, 即是找出系数矩阵  $C$  的最优解。因而, 我们首先确定  $C$  不得不满足的属性, 然后设计核来产生正确的  $C$ 。

[0249] A、 $C$  的正确选择

[0250] 在FRI重构步骤中第一步是, 采样向量  $y$  被转换成时刻向量  $s = Cy$ 。因而, 我们的首要目标是获得一个好条件的  $C$ 。注意到此步骤的相关性是在[3]中被高亮了。也注意到, 矩阵  $C$  是由在位置  $(m, n)$  处元素  $c_{m,n} = c_{m,0} e^{\alpha_m n}$  构成, 其中  $n=0, 1, \dots, N-1$  和  $m=0, \dots, P$ :

$$[0251] \quad C = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{1,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{P,0} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & e^{\alpha_0} & \dots & e^{\alpha_0(N-1)} \\ 1 & e^{\alpha_1} & \dots & e^{\alpha_1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\alpha_P} & \dots & e^{\alpha_P(N-1)} \end{pmatrix}}_V$$

[0252] 其中D是对角的,V是范德蒙行列式。因此,为了具有一个稳定的C,我们需要D的对角元素的绝对相等,即 $|c_{m,0}|=1$ 。并且,我们需要在V中的元素是完全虚数:

$$[0253] \quad e^{j\alpha_m} = e^{j\frac{\pi}{L}(2m-P)}, \text{ 其中 } m=0, \dots, P, \text{ 即 } \alpha=0 \text{ 和 } \lambda_0=2\pi/L \quad (18)$$

[0254] 清楚地,完全虚数的 $\alpha_m$ 使范德蒙矩阵V具有更好的特性[27]。因而,我们仅仅需要关注发现在(18)中最好的L的问题。。由于我们实验中看到,当C是处于好条件时,FRI算法是可以达到CRB(16),一个确定L的方法是对于单个狄拉克函数的位置选择使(16)最小化的值。这证明了所述最小化值是当 $L=P+1$ 时被达到,如图2对于P和I的不同选择中看到的一样。

[0255] 某种程序上,这是不惊讶的,因为这种选择确保了指数区域为整个单位圆,众所周知,当恢复一个强力和序列的参数时这是最好的配制[28]。最后,当我们强制 $P+1=N$ 和 $L=P+1$ 时,除了最小化(16),我们也可以确保基于在(16)中时刻的CRB与(14)中的基于采样的边界匹配,这导致了最优的可能表现。在这种情况下,矩阵C以平方和单位结束。这是最稳定的数值变换,由于它的条件量是1。

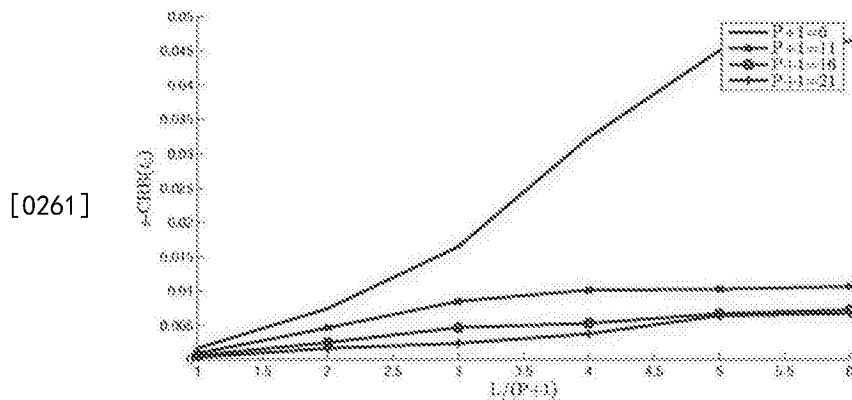
[0256] 总之,最优的指数再生核应该使用 $\alpha_m = j\frac{\pi}{P+1}(2m-P)$ 形式的指数进行指数再生,其当 $m=0, \dots, P$ 时具有 $|c_{m,0}|=1$ 。最后,不任什么可能的时候,核的次数应该是 $P+1=N$ 。在下部分我们展示如何获取这样的核。

[0257] B、指数MOMS

[0258] 根据在前面部分的分析,我们设计最大次数和最小支集的最优指数再生核(eMOMS)。我们要求,当 $m=0, \dots, P$ 时 $|c_{m,0}|=1$ ,指数参数是下面的形式:

$$[0259] \quad \alpha_m = j\omega_m = j\frac{\pi}{P+1}(2m-P) \quad m=0, \dots, P. \quad (19)$$

[0260] 但是,我们不会对P做假设,由于下面的方法学可以被用于任何P的值。



[0262] 图2、CRB对L,这里我们设计不同的CR8值(16),其中( $\sigma=1$ ),对于协方差满足 $|c_{m,0}|=1, m=0, \dots, P$ ,当我们在等式(8)中改变L时,对于任何P值,CRB是最小的,如果此时 $L=P+$

1(注意所有曲线都是单调增加的)。

[0263] 通过将任何指数再生核  $\phi(t)$  考虑进来,这可以被写成  $\phi(t) = \gamma(t) * \beta_{\alpha}(t)$  形式,我们设计  $\gamma(t)$  以便  $|c_{m,0}| = 1$  被满足。我们注意到,通过使用(3),我们具有:

$$[0264] \quad e^{\alpha_m t} = c_{m,0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\alpha_m n} \varphi(t-n).$$

[0265] 相应地

$$1 = c_{m,0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\alpha_m(n-t)} \varphi(t-n)$$

$$[0266] \quad \stackrel{(a)}{=} c_{m,0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\alpha_m + j2\pi k) e^{j2\pi k t}$$

$$\stackrel{(b)}{=} c_{m,0} \hat{\varphi}(\alpha_m),$$

[0267] 其中(a)服从泊松和公式<sup>3</sup>以及(b)服从广义的Strang-Fix条件(9)的应用。因而,我们知道,对于任何指数再生核  $|c_{m,0}| = \hat{\varphi}(\alpha_m)^{-1}$ 。我们意识到,  $|c_{m,0}| = 1$  是与要求  $|\hat{\varphi}(\alpha_m)| = 1$  等价。最后,通过使用  $\hat{\varphi}(\alpha_m) = \hat{\gamma}(\alpha_m) \hat{\beta}_{\alpha}(\alpha_m)$  这一条件,以及估计在  $\alpha_m = j\omega_m$  处的拉普拉斯变换,我们在  $\hat{\gamma}(j\omega_m)$  上达到下述条件:

$$[0268] \quad |\hat{\varphi}(j\omega_m)| = |\hat{\gamma}(j\omega_m) \hat{\beta}_{\alpha}(j\omega_m)| = 1 \quad \leftrightarrow \quad |\hat{\gamma}(j\omega_m)| = |\hat{\beta}_{\alpha}(j\omega_m)|^{-1} \quad (20)$$

[0269] 其中,我们用各函数的傅立叶变换进行工作:

$$[0270] \quad \text{泊松和公式: } \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(j\frac{2\pi k}{T}\right) e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

[0271] 在所有可允许的能满足(20)的核中,我们对那些最有最短支集  $P+1$  的核感兴趣。我们认为这样的核是通过原始E-样条曲线的不同派出的线性组合来给出,即:

$$[0272] \quad \varphi(t) = \sum_{\ell=0}^P d_{\ell} \beta_{\alpha}^{(\ell)}(t), \quad (21)$$

[0273] 其中,  $\beta_{\alpha}^{(\ell)}(t)$  是  $\beta_{\alpha}(t)$  的第  $\ell$  个导数,  $\beta_{\alpha}^{(0)}(t) = \beta_{\alpha}(t)$ ,  $d_1$  是一系列的系数。这就像这样一种说法,  $\gamma(t)$  是狄拉克  $\delta$  函数的线性组合及其导数,直到次数  $P$  [19]。这些核是仍然能够再生指数  $e^{\alpha_m t}$ , 以及最大次数最小支集(MOMS)的变种。它们也是在[30]中被展示的广义E-样条函数的广大家庭的具体例子。这种构想的优势是两重:首先修正的核  $\phi(t)$  是最小支集  $P+1$ , 如同  $\beta_{\alpha}(t)$  一样。第二,为了实现  $|c_{m,0}| = 1$ , 我们仅仅需要发现满足约束(20)的系数  $d_1$ 。使用(21)的傅立叶变换,被给如下:

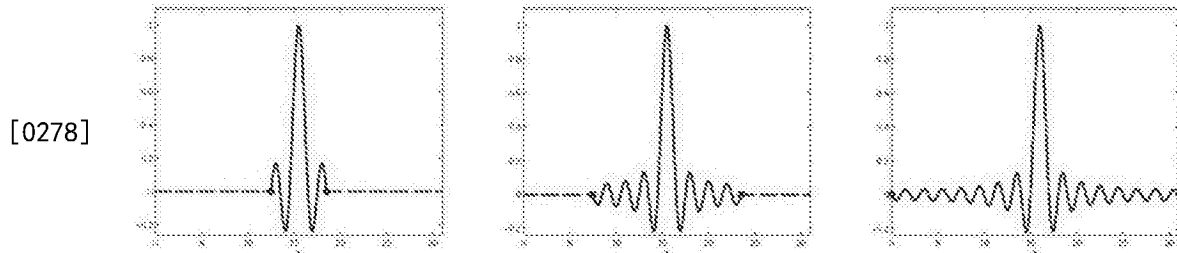
$$[0274] \quad \hat{\varphi}(j\omega) = \hat{\beta}_{\alpha}(j\omega) \sum_{\ell=0}^P d_{\ell} (j\omega)^{\ell},$$

[0275] 我们意识到,我们可以通过选择系数  $d_1$  来满足(20), 以便导致多项式  $\hat{\gamma}(j\omega) = \sum_{\ell} d_{\ell} (j\omega)^{\ell}$  插值一系列的点  $(j\omega_m, |\hat{\beta}_{\alpha}(j\omega_m)|^{-1})$ , 其中,  $m=0, 1, \dots, P$ 。

[0276] 一旦我们已经设计了满足  $c_{m,0}$  对于所有  $m$  其具有系数1的核,我们就只需要关注相位的不确定性。确定相位是等于在(21)中的E-样条函数中使用一个位移  $\Delta$ , 引入一个额外的自由度。这是可能的,为了具有  $|c_{m,0}| = 1$  指数MOMS和参数(19)是连续时间函数,接着对于

$m=0, \dots, P$ 时  $c_{m,0} = |c_{m,0}|e^{j\omega_m \Delta}$ , 其中  $\Delta$  是一大于或等于1的整数, 且小于或等于  $P$ 。

[0277] 在图3中, 我们展示了一些通过执行上述说明的程序获取的这样的核。有意思的是, 如附件B所示一样, 这些具体的函数总是与狄利克雷核中的一段相等。我们也指出, 当  $P+1=N$  的情况下, 对于[2]中原始FRI信号公式, 使用指数再生核的家族是收敛的。



[0279] 图3, 指数MOMS的例子。这是30个具有  $P+1 \leq N=31$  的采样的可能核中的3个例子。它们与当  $P$  为偶数时周期为  $P+1$  或  $P$  为奇数时周期为  $2(P+1)$  的狄利克雷核某一段一致(见附件B)。它们所有都被建立选择  $c_{m,n}$  的相位, 以便它们是以大约  $\Delta = |(P+1)/2|$  为中心的连续时间函数。它们被放置于采样间隔  $T=1$  的中间。

[0280] V、用有限新息率对信号进行一般性采样

[0281] 在前面的部分, 我们已经展示了对于具有噪声的FRI采样如何调序最优指数再生核。在许多实际环境中, 然而, 选择采样核  $\phi(t)$  的自由度是奢侈的, 是我们可能没有的。

[0282] 在FRI设定中的基本问题是  $\phi(t)$  再生指数函数的能力, 因为这允许我们定位信号重构问题于在光谱线估计理论中Prony方法。在此部分, 我们放宽条件, 考虑对于任何指数再生性质(3)的函数  $\phi(t)$ , 不是必需要成立的。对于这些函数, 仍然可以找到系数  $c_{m,n}$ , 像再生的指数是近似的而不是精确的。我们提出使用这种近似的再生和相应的系数来从使用这些核获取的采样来取回FRI信号。

[0283] 这种新方法有几个优势: 首先, 它普遍的, 因为它可以使用任何核  $\phi(t)$ 。事实上, 如我们在下面部分所展示的一样, 这种新的构想甚至不要求对核有一个基本的了解。第二, 当FRI信号使用所述新方法进行重构时, 不会变得精确, 我们将展示在许多情况下一个合适的迭代算法可以使重构失误任意小。最后, 它可以被用于增加一些不稳定核对于噪声的抵抗力。例如, 像多项式样条函数或高斯函数这样的核会导致非常坏的重构程序。我们会展示, 通过用基于再生指数的近似的合适选取的系数  $c_{m,n}$  来替换原始  $C$ , 我们可以实现在同样核的情况下非常稳定的重构。

[0284] A、近似再生指数

[0285] 假设我们想要使用函数  $\phi(t)$  以及它的整数位移函数来近似指数  $e^{at}$ 。具体地, 我们想要发现像这样的系数  $c_n$ :

[0286] 
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi(t-n) \approx e^{at}, \quad (22)$$

[0287] 所述近似仅仅当  $\phi(t)$  满足广义Strang-Fix条件(9)时才是精确的。对于任何其他函数, 它是有特别的兴趣来找出系数  $c_n$  以进行最优的匹配(22)。为了这样做, 我们直接使用  $c_n = c_0 e^{an}$  和引入1-周期函数

[0288] 
$$g_\alpha(t) = c_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(t-n)} \phi(t-n) \quad (23)$$

[0289] 精确的指数再生系数总是满足  $c_n = c_0 e^{n\alpha}$ 。我们现在预我们导出的不同的近似系数也有同样的形式。

[0290] 我们接下来用的  $\phi(t)$  的整数位移函数来近似指数  $e^{\alpha t}$ ，这可以变换为通过常量 1 来近似  $g_\alpha(t)$ 。理由是，我们可以通过取代  $c_n = c_0 e^{n\alpha}$  和移动  $e^{\alpha t}$  到左侧边来在 (23) 的右侧边的形式里重写 (22)。

[0291] 作为泊松和公式的结果， $g_\alpha(t)$  的傅立叶展开如下：

$$[0292] \quad g_\alpha(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{j2\pi l t} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_0 \varphi(\alpha + j2\pi l) e^{j2\pi l t}$$

[0293] 以及，我们的近似问题可以简化为：

$$[0294] \quad g_\alpha(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_0 \varphi(\alpha + j2\pi l) e^{j2\pi l t} \approx 1 \quad (24)$$

[0295] 这可以展现出广义 Strang-Fix 条件 (9) 和近似指数之间更深层次的关系。假如  $\phi(t)$  满足广义 Strang-Fix 条件 (9)，那么对于  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ， $\varphi(\alpha + j2\pi l)$ ，以及 (24) 可以精确地成立，当  $c_0 \varphi(\alpha) = 1$  时。否则，当  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ，项  $\varphi(\alpha + j2\pi l)$  不会成为零，我们仅仅可以发现系数  $c_0$ ，使  $g_\alpha(t) \approx 1$ 。然而，值  $\varphi(\alpha + j2\pi l)$  越靠近零，在 (22) 中的近似就越好。

[0296] 一般地， $\phi(t)$  可以是任何函数，我们可以发现不同系列的系数  $c_n$  以为了使 (22) 成立。不管我们使用的系数，我们可以通过使用  $g_\alpha(t)$  的傅立叶展开项来确定我们近似的精确度。事实上，使用系数  $c_n = c_0 e^{n\alpha}$  通过函数  $s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi(t - n)$  近似  $f(t) = e^{\alpha t}$  的误差等于：

$$[0297] \quad \begin{aligned} \varepsilon(t) &= f(t) - s(t) = e^{\alpha t} [1 - g_\alpha(t)] \\ &= e^{\alpha t} \left[ 1 - c_0 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(\alpha + j2\pi l) e^{j2\pi l t} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

[0298] 注意，假如  $\phi(t)$  的拉普拉斯变换衰减得足够快，傅立叶展开项的很少项是被需要具有一对于误差的精确边界。

[0299] 系数  $c_n = c_0 e^{n\alpha}$  的一个自然选择是通过最小二乘法近似被给出。尽管  $f(t)$  不是平方可积的，我们仍然可以通过计算  $f(t)$  在  $\varphi(t - n)$  上跨越的次空间的正交投影来获取系数 [31]。它们可以采样这样的形式

$$[0300] \quad c_n = \frac{\hat{\varphi}(-\alpha)}{\hat{a}_\varphi(e^\alpha)} e^{n\alpha}$$

[0301] 其中  $\hat{a}_\varphi(e^\alpha) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_\varphi[l] e^{-\alpha l}$  是  $a_\varphi[l] = \langle \varphi(t - l), \varphi(t) \rangle$  的 Z 变换，以  $z = e^\alpha$  进行估计的。

[0302] 最小二乘法近似有一些缺点，它要求精确的知道  $\phi(t)$  的信息。但是，就像我们前面陈述的一样，假如  $\phi(t)$  的拉普拉斯变换衰减得足够快，那么我们就可以假设项  $\varphi(\alpha + j2\pi l)$  是靠近零的，其中  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 。在这种情况下，我们认为，在 (25) 中的误差是容易通过选择  $\hat{\varphi}(\alpha)^{-1}$  而被最小化。我们指定近似常量的最小二乘法的第二种类型。除了它的简洁外，选择  $c_n = \hat{\varphi}(\alpha)^{-1} e^{n\alpha}$  的第二个缺点是，它仅仅要求知道  $\phi(t)$  在  $\alpha$  处的拉普拉斯变换。假如我们把自己放在 FRI 的优点中，我们需要再生指数  $e^{\alpha_m t}$  的近似，其中  $m = 0, \dots, P$ 。接着，这被简化的公式仅仅需要知道  $\phi(t)$  在  $\alpha_m$  处的拉普拉斯变换的信息，其中  $m = 0, \dots, P$ 。

[0303] 最后，系数的第三种有趣的选择是，确保  $s(t)$  精确地在  $t = \ell \in \mathbb{Z}$  处插值  $f(t)$  [32]、

[18]。这些系数如下：

[0304] 
$$c_n = \frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha l} \varphi(l)} e^{\alpha n}$$

[0305] 注意，为了使用插值系数，我们仅仅需要  $\phi(t)$  在整数时刻的信号。我们在表1中总结前面的结果。

[0306] 表1

[0307] 近似再生(22)的系数)

	类型	系数
[0308]	最小二乘法	$c_n = \frac{\hat{\varphi}(-\alpha)}{\hat{a}_\varphi(e^\alpha)} e^{\alpha n}$ $c_n = \hat{\varphi}(\alpha)^{-1} e^{\alpha n}$
	常量最小二乘从插值	$c_n = \frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha l} \varphi(l)} e^{\alpha n}$

[0309] 根据我们的经验，最小二乘法的系数提供了一个更小的误差(25)，当用于近似的指数  $e^{\alpha t}$  具有一个非纯虚数的指数  $\alpha$ 。否则，常量最小二乘法系数好的。当被给定核在时间上整数点的值时，插值系数是很容易计算。然而，它们也提供了更差的近似质量。因而，论文的剩下部分，我们使用常量最小二乘法系数。

[0310] 在图4中我们展示了以上分析的一个例子。我们需要使用线性样条函数的线性组合来近似指数。首先，注意到所述样条函数可以精确地再生0次和1次多项式。这被展示于图4(a-b)中。用同样的函数和常量最小二乘法系数  $c_{m,n} = \hat{\varphi}(\frac{\pi}{16}(2m-7))^{-1} e^{j\frac{\pi}{16}(2m-7)t}$ ，我们近似再生4个复指数  $e^{j\frac{\pi}{16}(2m-7)t}$ ，其中  $m=3, \dots, 0$ 。我们在图4(c-f)中提出了它们实部的近似。我们注意到，同样的指数是对其他的更好近似，在这个例子中，对于具有低频率的指数来讲，同样的指数是比其他的更好近似。假如我们使用高阶样条函数，近似质量将会提高。然而，我们已经选择了如图所示的线性样条函数。还注意到，可以被近似的指数的数量是与样条函数的次数无关。

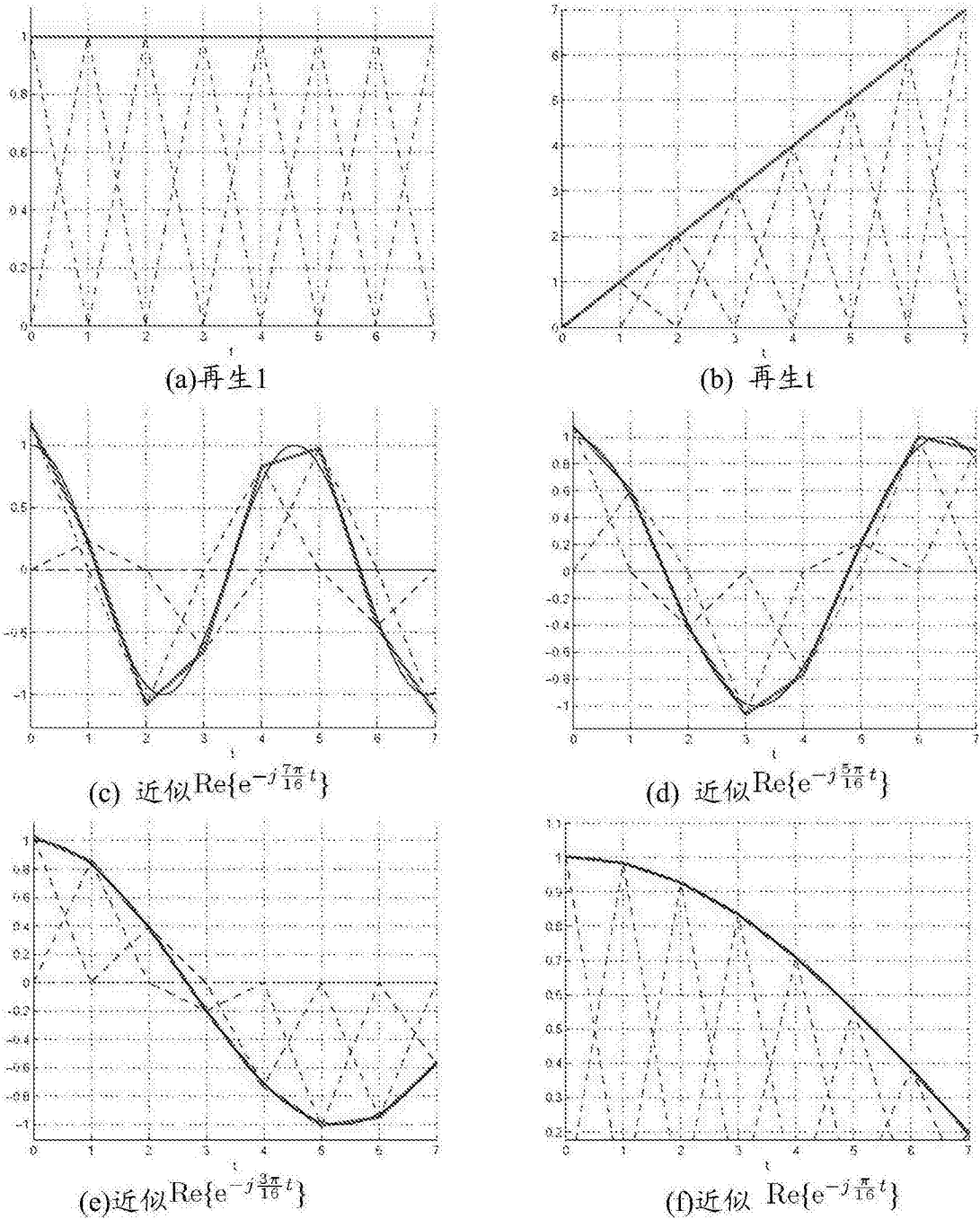
[0311] B、近似FRI恢复

[0312] 再考虑狄拉克函数信号流  $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \delta(t - t_k)$  和采样

[0313] 
$$y_n = \left\langle x(t), \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi\left(\frac{t_k}{T} - n\right) \quad (26)$$

[0314] 我们需要从所述采样(26)中取回狄拉克函数的位置和幅值，但是现在我们没有做任何关于采样核的假设。我们发现了用于  $\phi(t)$  近似指数  $e^{\alpha_m t}$  合适的系数，其中  $m=0, \dots, P$ ， $\alpha_m = \alpha_0 + m\lambda$ ，和  $\alpha_0, \lambda \in \mathbb{C}$ 。从前面的部分，我们知道，假如我们选择  $c_{m,0} = \hat{\varphi}(\alpha_m)^{-1}$  的  $c_{m,n} = c_{m,0} e^{\alpha_m n}$ ，一个好的近似可以被实现。这样我们仅仅需要知道  $\phi(t)$  在  $\alpha_m, m=0, \dots, P$  处的拉普拉斯的信号。还注意到，P不再需要与  $\phi(t)$  的支集有关，但是我们可以使用任何服从  $P \geq 2K-1$  的值。

[0315]



[0316] 图4、B-样条函数核再生和近似能力。图(a-b)展示了用线性样条函数对阶数为0和1的多项次函数精确的再生；图(c-f)展示了用表1中的常量最小二乘法系数和线性样条函数对4个复指数 $e^{j\frac{\pi}{16}(2m-7)t}$ 在实平面的近似，其中， $m=3, \dots, 0$ 。我们设定样线函数的权重和位移量，用红实线条表示的重构多项式和指数，以及用黑实线表示的被再生的原始函数。

[0317] 为了取回新息参数 $(t_k, a_k)$ ，我们以同样的方式处理精确再生指数的情况，但是现在我们的时刻为

$$s_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} y_n = \left\langle x(t), \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \right\rangle$$

[0318]

$$= \sum_{k=0}^{K-1} x_k u_k^m - \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} a_k \varepsilon_m\left(\frac{t_k}{T}\right)}_{\zeta_m} \quad (27)$$

[0319] 其中  $x_k = a_k e^{j\omega_k \frac{t_k}{T}}$  和  $u_k = e^{\lambda \frac{t_k}{T}}$ 。这也存在一个由于(25)近似误差  $\varepsilon_m(t)$  导致的模型失配,其等于  $\zeta_m$ 。我们视它为噪声,使用III部分中的方法取回信号的参数。所述模型失配取决于近似的质量,取决于系数  $c_{m,n}$ 、值  $a_m$  和  $P$ ,以及核  $\phi(t)$ 。假如与其他噪声比较,  $\zeta_m$  可以被忽略,那么程序是足够好的。然而,在近似于无噪声的环境下,狄拉克函数的估计通过使用展示于下列算法2中的迭代算法可以是很好的。算法的基本思想是,给定狄拉克函数的位置的估计,我们计算  $\zeta_m$  的近似以及使用它来对时刻  $s_m$  进行提炼。

[0320]

---

#### 算法2 使用近似指数来恢复K个狄拉克函数信号串

---

- 1: 从原始数据和  $s_m^1 = s_m^0$  中计算时刻  $s_m^0 = \sum_n c_{m,n} y_n$ 。
- 2: 使用  $s_m^0$  来建立等式(6)的系统,以及取回零化滤波器系数  $h_m$ , 其中  $m=0, \dots, M$ ,  $M \geq K$ 。
- 3:  $u_k^i$  从  $h_m$  的零点计算值  $u_k^i$  以及使用  $i$  次迭代确定位置  $t_k^i$ 。
- 4: 从  $x_k^i$  中找出幅值  $a_k^i$ , 其中  $x_k^i$  是通过解出在等式(5)中第一个  $K$  连接等式而获取。
- 5: 对于下一次迭代  $i+1$  重新计算时刻,具体地,通过从基于使用下列等式原始数据计算的所述时刻中移除模型失配:

$$s_m^{i+1} = s_m^0 + \sum_{k=0}^{K-1} a_k^i \varepsilon_m\left(\frac{t_k^i}{T}\right)$$

其中  $m=0, \dots, P$ ,  $\varepsilon_m(t)$  是近似的误差(25)。

- 6: 重复步骤2到5,直到值  $(a_k^i, t_k^i)$  收敛。
- 

[0321] C、如何选择参数  $a_m$ 

[0322] 在IV部分,我们已经确定,假如我们有对采样核有充分的控制,那么我们应该使用与采样  $P+1=N$  一样多的时刻,这种指数参数应该是纯虚数的,以  $\alpha_m = j \frac{\pi}{P+1} (2m - P)$  形式存在,系数  $c_{m,n}$  应该是  $|c_{m,0}| = 1$ , 其中  $m=0, \dots, P$ 。但是,在近似FRI场景中,采样核是被固定的,我们仅仅可以选择时刻的数量  $P+1$  和值  $a_m$ , 但是我们不能强制令  $|c_{m,0}| = 1$ 。

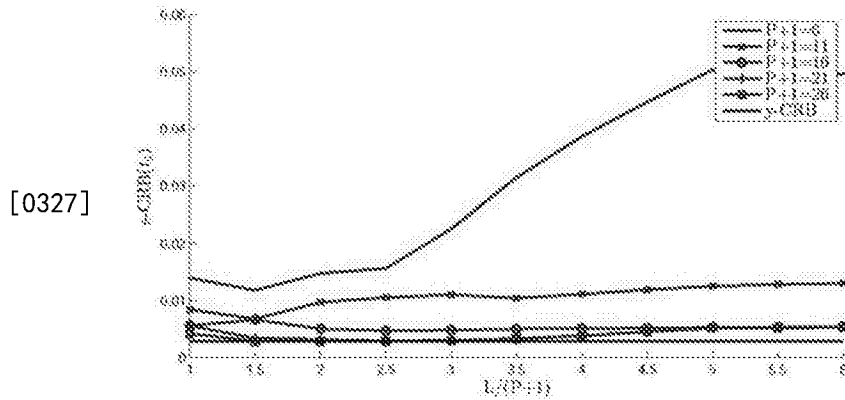
[0323] 上述事实导致一个对  $a_m$  的权衡的选择。一方面,我们想要它们是纯虚数:  $a_m = j \omega_m$ , 以及跨越整个单位圆。另一方面,我们需要值  $c_{m,0} = \varphi(j\omega_m)^{-1}$  以有尽可能接近1的系数。由于  $|\varphi(j\omega)|$  通常是低通滤波器,条件  $|c_{m,0}| \approx 1$  其中  $m=0, \dots, P$  被满足,当  $\omega_m$  是非常接近零,其与单位圆是相反的。我们因此选择下面形式的指数参数:

$$[0324] \quad \alpha_m = j\omega_m = j \frac{\pi}{L} (2m - P) \quad m = 0, \dots, P, \quad (28)$$

[0325] 然后确定  $P$  和  $L$ , 以使上述权衡最优化。

[0326] 当取回单个狄拉克函数的位置时,我们遵从的标准还是选取使CRB(16)最小化的值  $P$  和  $L$ 。在大多数分数的例子中,我们发现,最优的  $P$  通常是大于或等于采样核  $\phi(t)$  的支

集,发现L是在范围 $P+1 \leq L \leq 4(P+1)$ 内。在图5中我们展示了一个在 $\phi(t)$ 是6次B-样条函数情况下选择L的例子。这里,我们首先确定L的值,以及计算参数(28)。然后,我们计算系数 $c_{m,n} = \hat{\varphi}(j\omega_m)^{-1} e^{j\omega_m n}$ ,其中 $m=0, \dots, P$ ,其中 $\hat{\varphi}(\omega)$ 是 $\phi(t)$ 的傅立叶变换。我们最后建立矩阵C和计算(16)单个狄拉克函数。极小值总是大约为 $L=1.5(P+1)$ 。



[0328] 图5,CRB对L,这里我们假设当我们改变L时对于指数参数(28)不同的CRB值(16)( $\sigma=1$ )。我们使用 $c_{m,n} = \hat{\varphi}(\omega_m)^{-1} e^{j\omega_m n}$ 其中 $m=0, \dots, P$ , $\hat{\varphi}(\omega)$ 是6次B-样条函数的傅立叶变换。注意,极小值通常总是在 $L=1.5(P+1)$ 被达到。

[0329] VI、仿真

[0330] 我们现在提出仿真结果,用以验证本论文的主要贡献。具体地,我们展示了在IV-B部分被引入的eMOMS核的表现,展示了在V部分引入的在采样核为多项式样条函数情况下近似FRI恢复方法的表现。

[0331] A、实现设定

[0332] 我们根据图1的方案通过直接计算 $y_n = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi(\frac{t_k}{T} - n)$ 来采集N个采样点,其中 $n=0, \dots, N-1$ ,由于我们有K个狄拉克函数串作为输入。我们通过增加白高斯噪声来污染采样,其中白高斯噪声的方差为 $\sigma^2$ ,信噪比通过 $\text{SNR}(\text{dB}) = 10 \log \frac{\|y\|^2}{N\sigma^2}$ 被定义。我们最后计算P+1噪声时刻,然后使用在[11]中的矩阵束方法取回输入的新息参数 $\{a_k, t_k\}_{k=0}^{K-1}$ 。

[0333] 我们主要对时间位置估计中的误差感兴趣,由于这些是取回参数最大的挑战。对于每个狄拉克函数,我们展示了下述误差的标准差:

$$[0334] \quad \Delta t_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{I-1} (t_k^{(i)} - t_k)^2}{I}} \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (29)$$

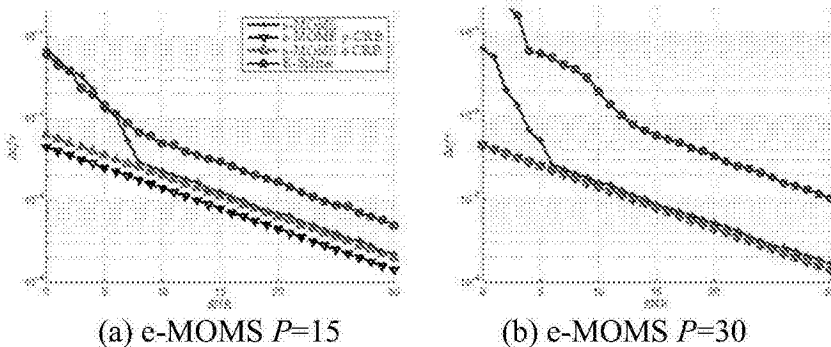
[0335] 其中 $t_k^{(i)}$ 是以迭代次数i被估计的时间位置,I是迭代的总次数。我们使用 $I=1000$ 的噪声来计算(29)固定信噪比和平均影响。我们用III部分中被两种不同CRB预测的方差的平方根,来比较表现(29):基于采样的CRB(14)和基于时刻的CRB(16)。

[0336] B、指数MOMS

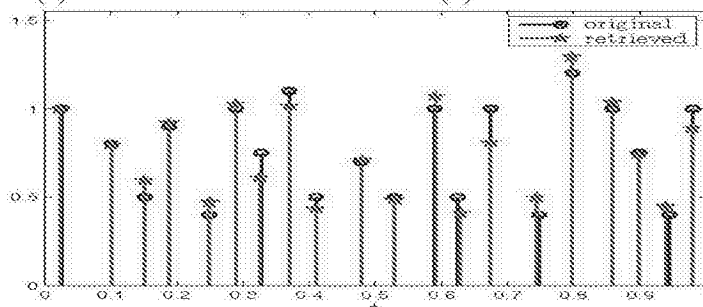
[0337] 在图6(a-b)中我们提出了仿真结果,此时我们使用标准E-样条函数和IV-B部分中的指数MOMS核从 $N=31$ 的采样中取回了 $K=2$ 狄拉克函数。前者是通过纯虚数指数 $\alpha_m = j \frac{\pi}{P+1} (2m - P)$ 来被表征,其中 $m=0, \dots, P$ 。

[0338] 我们可以看到,对于任何次数P+1,eMOMS都胜过E-样条函数。而且,eMOMS总是达到

基于时刻的CRB(在图中红色表示的)。这边界是靠近基于采样的CRB(图中黑线表示的),其中基于采样的CRB中P+1的值增加,但P+1=N时其匹配如预期一样。为了进一步说明eMOMS的稳定性,在图6(c)中我们展示了取回随机分布于 $\tau=NT=1$ 上且幅值任何的K=20个狄拉克函数。信噪比是15dB,我们使用N=61个采样,其中P+1=N。



[0339]



(c) 取回 K=20 狄拉克函数

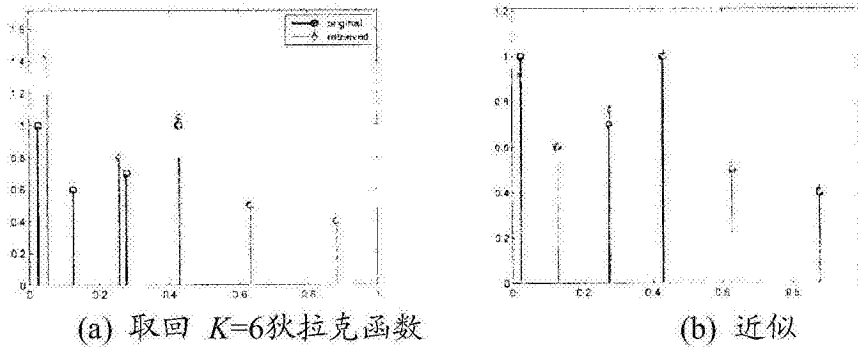
[0340] 图6、指数MOMS核的表现,(a-b)比较了E-样条函数和指数MOMS核在不同次数P+1下的表现,其中噪声是被加到N=31个采样点中。我们展示了K=2个狄拉克函数中的第一个的恢复。我们注意到eMOM的表现总是胜过E-样条函数,以及达到了基于时刻的CRB效果。这边界是靠近基于采样的CRB(图中黑线表示的),其中基于采样的CRB中P+1的值增加,但P+1=N时其匹配如预期一样。为了进一步说明eMOMS的稳定性,在图6(c)中我们展示了取回随机分布于 $\tau=NT=1$ 上且幅值任何的K=20个狄拉克函数。信噪比是15dB,我们使用N=61个采样,其中P+1=N。

[0341] C、近似FRI

[0342] 当我们使用P+1次B-样条函数核和近似指数 $e^{\alpha_m t}$ 进行采样时,我们现在展示V-B部分的近似取回程序的结果,其中 $\alpha_m = j \frac{\pi}{2(P_2+1)} (2m - P_2)$ 和 $m=0, \dots, P_2$ 。我们通过使用常量最小二乘法公式 $c_{m,n} = \hat{\phi}(\alpha_m)^{-1} e^{\alpha_m n}$ 来获取系数,其中 $\hat{\phi}(s)$ 表示B-样条函数的拉普拉斯变换。我们比较用基于精确再生多项式的传统恢复策略来进行表现的比较。

[0343] 图7(a-b)中,我们比较了从N=31的具有噪声的采样点中随机位于 $\tau=NT$ 上的K=6个狄拉克函数的估计,其信噪比SNR=20dB。对于(a),我们使用阶数为P+1=6r B-样条函数来进行采样和重构,但是我们建立P<sub>2</sub>+1=26的指数时刻为了增加近似重构的精确度。对所述6个狄拉克函数位置估计的平均误差,是大约为 $10^{-2}$ 的可以在(a)中正确恢复,以及大约 $10^{-3}$ 可以在(b)中被近似取回。

[0344]



[0345] 图7、B-样条函数核的表示。我们从 $N=31$ 的具有噪声的采样点中恢复 $K=6$ 个狄拉克函数，(a)是表示[1]的缺少多项式的恢复，使用了预先白增加。我们用阶数 $P+1=26$ 进行采样，用同样数量的时刻，(b)其展示了使用 $\alpha_m = \frac{\pi}{2(P_2+1)}(2m-P_2)$ 的近似恢复结果，其中， $m=0, \dots, P_2$ 。这里，我们使用阶数为 $P+1=6$ 的核采样，但是建立 $P_2+1=26$ 个时刻。在两种情况下的信噪比 $SNR=20dB$ 。

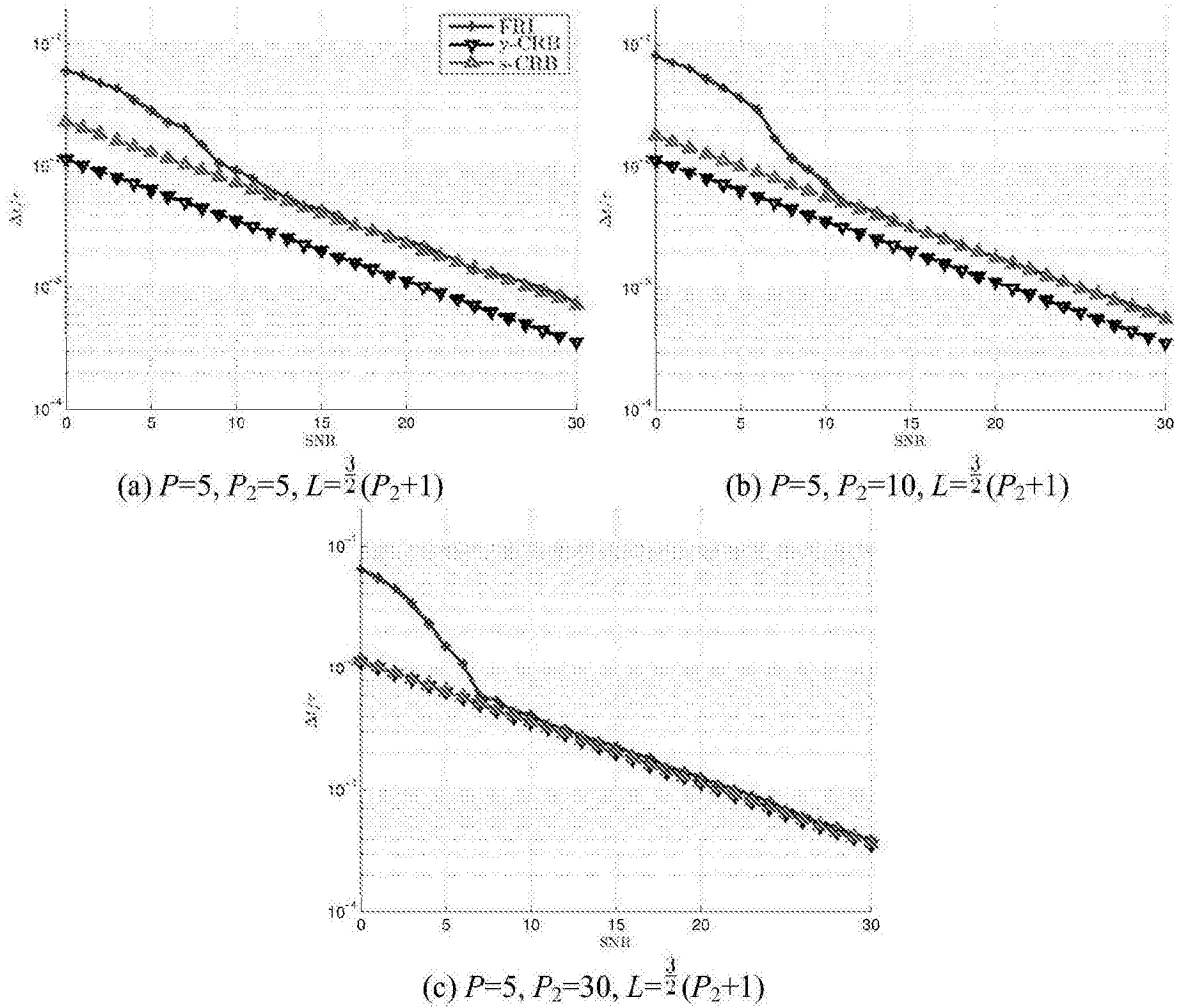
[0346] 我们进一步展示了当我们使用近似方法从 $N=31$ 个采样点取回 $K=2$ 个狄拉克函数，来取代阶数为 $P+1=6$ B-样条函数。甚至当我们固定核的除数时，我们可以重构一个提高时刻数量 $P_2+1$ ，以提高表现。图8(a-d)是对于参数 $\alpha_m = j \frac{\pi}{L} (2m-P_2)$ 和 $L = \frac{1}{2} (P_2+1)$ ，其中 $m=0, \dots, P_2$ 。随着时刻数量 $P_2+1$ 增加，表现是更好，甚至达到了基于采样的CRB。

[0347] VII、结论

[0348] 在本论文中，我们已经考虑了存在噪声时FRI重构问题。我们首先回顾了在无噪声设定中存在的结果，然后在当前迭代中最有效的方法。接着，我们学习了对于前述工作更具鲁棒性的代替性方案。

[0349] 更具体地，我们的贡献是两方面，我们确定了如何设计最优化指数再生核，在这种情况下，它们产生最稳定的信号重构。并且，我们脱离我们可以完全控制采样核的思想，考虑我们通过任意采集设备被给定了被污染的采样。在这种情况下，我们发展了一个更普遍的FRI重构策略，其可以用任何核来进行工作。与传统FRI框架试图发现输入信号精确的参数相反的是，我们提出一个基于近似再生指数对输入的近似恢复。我们新方法的优势在于，它可以被应用于任何采样核，以及提供了一个过去使用的特定种类的核更稳定和精确的重构。

[0350]



[0351] 图8,使用B-样条函数近似取回。这些数据展示了在对 $K=2$ 的狄拉克函数的第一个的估计中的误差。我们展示了如何,甚至当我们将核阶数固定为 $P+1$ 。我们可以重构时刻 $P_2+1$ 任意数量,以提高表现。事实上,使用近似选择 $L=\frac{3}{2}(P_2+1)$ ,表现提高,直到基于采样的CRB是被达到。

[0352] 附件A

[0353] 广义STRANG-FIX条件

[0354] 一个指数再生核是任何形式的函数  $\phi(t)$  与其自身位移版本的函数的线性组合,其可以产生  $t^r e^{\alpha_m t}$  形式的多项式指数函数。参数  $\alpha_m$  是复数,其中  $m=0, \dots, P, r=0, \dots, R$ 。指数再生核是多项式再生核家族的一般化形式。后者是通过众所周知的Strang-Fix被表征 [1], [33], 其说明了一个核  $\phi(t)$  可以再生多项式,即:

[0355] 
$$t^r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_r \psi(t - n)$$

[0356] 当且仅当,  $\hat{\psi}(0) \neq 0$  和  $\hat{\psi}^{(r)}(2\pi l) = 0$ , 其中  $l \neq 0, r=0, \dots, R$ 。

[0357] 这里,  $\hat{\psi}(\omega)$  是  $\psi(t)$  的傅立叶变换,  $\hat{\psi}^{(r)}(\omega)$  表示它的第  $r$  次导数。

[0358] 对多项式再生核的一个类似适应, 导出一约束指数再生核的广义形式的Strang-

Fix条件,它是可能的。特别地,核 $\phi(t)$ 是能够再生指数多项式,即:

$$[0359] \quad t^r e^{\alpha_m t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n,r} \varphi(t-n)$$

[0360] 当且仅当 $\hat{\varphi}^{(r)}(\alpha_m) \neq 0$ 和 $\hat{\varphi}^{(r)}(\alpha_m + j2\pi l) = 0$ ,其中 $l \neq 0, r=0, \dots, R$ 。这里, $\hat{\varphi}^{(r)}(s)$ 表示 $\phi(t)$ 的双边拉普拉斯变换的 $r$ 次导数。通过考虑可以清楚地再生 $t_r$ 的函数 $\psi(t) = e^{-\alpha_m t} \varphi(t)$ ,可以从约束多项式再生核中获取证据。因而, $\psi(t)$ 满足Strang-Fix条件,因为它是多项式再生核。另外, $\psi(t)$ 的傅立叶变换是与 $\phi(t)$ 的拉普拉斯变换有关,如: $\hat{\psi}(\omega) = \hat{\varphi}(\alpha_m + j\omega)$ 。通过简单地将Strang-Fix条件应用于 $\hat{\psi}(\omega)$ ,我们可以达到约束可以完成所述证据的 $\hat{\varphi}(\omega)$ 广义上的Strang-Fix约束条件。

[0361] 附件B

[0362] EMOMS家族包括SOS和狄利克雷核

[0363] 让我们考虑支集为 $P+1$ 且集中于0处,具有的 $\phi(t) = \gamma(t) * \beta_{\alpha}(t)$ 的指数再生核 $\varphi_0(t) = \varphi(t + \frac{P+1}{2})$ ,其中 $\beta_{\alpha}(t)$ 的傅立叶变换通过(11)被给出。我们将我们的分析限制于 $P$ 为偶数,我们使用指数参数

$$[0364] \quad \alpha_m = j\omega_m = j \frac{\pi}{P+1} (2m - P), \quad (30)$$

[0365] 其中 $m=0, \dots, P$ 。我们使用周期延拓的 $\phi_0(t)$ ,即 $\phi_{P+1}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi_0(t+l(P+1))$ ,这可以被写成如下形式:

$$[0366] \quad \varphi_{P+1}(t) = \frac{1}{P+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_0 \left( j \frac{2\pi k}{P+1} \right) e^{j \frac{2\pi k}{P+1} t}, \quad (31)$$

[0367] 其中最末项服从泊松和公式。 $P$ 是奇数的情况可以被同样地导出,但是此时使用的周期超过 $2(P+1)$ 。同样注意到,被移位核函数 $\phi_0(t)$ 的傅立叶变换可以被写成如下形式:

$$[0368] \quad \hat{\varphi}_0(j\omega) = \gamma(j\omega) \prod_{m=0}^P \text{sinc} \left( \frac{\omega - \omega_m}{2} \right). \quad (32)$$

[0369] 如果我们指定

$$[0370] \quad \hat{\varphi}_0(\omega_m) = |\hat{\varphi}(\omega_m)| = |\hat{\gamma}(\omega_m) \hat{\beta}_{\alpha}(\omega_m)| = \eta_m, \quad (33)$$

[0371] 我们设计最大次数及最小支集(eMOMS)的指数再生核,其不同于IV-B中所示的那些核,那些核仍然与一[30]中的特殊的广义指数再生核的特殊子系列相一致。

[0372] 在(31)中,傅立叶变换 $\hat{\varphi}_0(\omega)$ 是被在 $\omega_k = \frac{2\pi k}{P+1}$ 处评价。考虑(33),我们知道,对于范围 $k = -\frac{P}{2}, \dots, \frac{P}{2}$ ,  $\hat{\varphi}_0(\omega_k) = \eta_k$ 。我们也使对于任何其他的 $k$ ,使 $\hat{\varphi}_0(\omega_k) = 0$ ,因为我们发现在(32)中一个与 $\text{sinc}(l\pi) = 0$ 相等的项。因而,等式(31)可以被简化为:

$$[0373] \quad \varphi_{P+1}(t) = \frac{1}{P+1} \sum_{k=-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \eta_k e^{\frac{2\pi k}{P+1} t}, \quad (34)$$

[0374] 注意到对于所有的k,值 $\eta_k=1$ ,于是等式(34)简化为周期为P+1的狄利克雷核的一个周期:

$$[0375] \quad \varphi_{P+1}(t) = \frac{1}{P+1} \sum_{k=-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} e^{j\frac{2\pi k}{P+1}t} = \frac{1}{P+1} \frac{\sin(\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{P+1})}$$

[0376] 这就是IV-B部分中eMOMS核的精确的家族。

[0377] 最后,我们考虑(34)的一个周期,我们使用 $t = \frac{x}{T}$ 。并且,我们限制采样数量 $N=P+1$ 以及定义 $\tau=NT=(P+1)T$ 。接着我们获取了SoS核的时间域表示[3]:

$$[0378] \quad \varphi_{P+1}\left(\frac{x}{T}\right) = g(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathcal{K}} \eta_k e^{\frac{2\pi k}{\tau}x}$$

[0379] 这里,采样数量N需要是奇数,下标 $\mathcal{K} = \{-\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}\}$ 。

[0380] REFERENCES

[0381] 参考文献

[0382] [1]P.L.Dragotti,M.Vetterli,and T.Blu,“Sampling Moments and Reconstructing Signals of Finite Rate of Innovation:Shannon Meets Strang-Fix,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.55,pp.1741-1757,May 2007.

[0383] [2]M.Vetterli,P.Marziliano,and T.Blu,“Sampling signals with finite rate of innovation,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.50,pp.1417-1428,June 2002.

[0384] [3]R.Tur,Y.C.Eldar,and Z.Friedman,“Innovation Rate Sampling of Pulse Streams with Application to Ultrasound Imaging,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.59,pp.1827-1842,April 2011.

[0385] [4]P.Stoica and R.L.Moses,Introduction to Spectral Analysis.Englewood Cliffs,NJ:Prentice-Hall,2000.

[0386] [5]A.Hormati and M.Vetterli,“Compressive Sampling of Multiple Sparse Signals Having Common Support Using Finite Rate of Innovation Principles,”IEEE Signal Processing Letters,vol.18,pp.331-334,May 2011.

[0387] [6]J.Berent,P.L.Dragotti,and T.Blu,“Sampling Piecewise Sinusoidal Signals With Finite Rate of Innovation Methods,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.58,pp.613-625,February 2010.

[0388] [7]I.Maravic and M.Vetterli,“Exact Sampling Results for Some Classes of Parametric Non-Bandlimited 2-D Signals,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.52,pp.175-189,January 2004.

[0389] [8]P.Shukla and P.L.Dragotti,“Sampling Schemes for Multidimensional Signals with Finite Rate of Innovation,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.55,pp.3670-3686,July 2007.

[0390] [9]H.Pan,T.Blu,and P.L.Dragotti,“Sampling Curves with Finite Rate of Innovation,”Proceedings of the Ninth International Workshop on Sampling

Theory and Applications(SampTA'11),Singapore,May 2011.

[0391] [10]C.Chen,P.Marziliano,and A.C.Kot,“2D Finite Rate of Innovation Reconstruction Method for Step Edge and Polygon Signals in the Presence of Noise,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.60,pp.2851-2859,June 2012.

[0392] [11]I.Maravic and M.Vetterli,“Sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation in the presence of noise,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.53,pp.2788-2805,August 2005.

[0393] [12]T.Blu,P.L.Dragotti,M.Vetterli,P.Marziliano,and L.Coulot,“Sparse Sampling of Signal Innovations,”IEEE Signal Processing Magazine,vol.25,no.2, pp.31-40,2008.

[0394] [13]V.Y.F.Tan and V.K.Goyal,“Estimating signals with finite rate of innovation from noisy samples:A stochastic algorithm,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.56,pp.5135-5146,October 2008.

[0395] [14]A.Erdozain and P.M.Crespo,“A new stochastic algorithm inspired on genetic algorithms to estimate signals with finite rate of innovation from noisy samples,”Signal Processing,vol.90,pp.134-144,January 2010.

[0396] [15]A.Erdozain and P.M.Crespo,“Reconstruction of aperiodic FRI signals and estimation of the rate of innovation based on the state space method,”Signal Processing,vol.91,no.8,pp.1709-1718,2011.

[0397] [16]J.A.Urigüen,P.L.Dragotti,and T.Blu,“On the exponential reproducing kernels for sampling signals with finite rate of innovation,”Proceedings of the Ninth International Workshop on Sampling Theory and Applications(SampTA'11),Singapore,May 2011.

[0398] [17]I.Khalidov,T.Blu,and M.Unser,“Generalized L-Spline Wavelet Bases,”in Proceedings of the SPIE Conference on Mathematical Imaging:Wavelet XI,vol.5914,(San Diego CA,USA),pp.59140F-1-59140F-8,July 31-August 3,2005.

[0399] [18]M.Unser and T.Blu,“Cardinal Exponential Splines:Part I—Theory and Filtering Algorithms,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.53, pp.1425-1438,April 2005.

[0400] [19]A.Ron,“Factorization theorems for univariate splines on regular grids,”Israel Journal of Mathematics,vol.70,no.1,pp.48-68,1990.

[0401] [20]S.M.Kay.Fundamentals of Statistical Signal Processing:Estimation Theory.Englewood Cliffs,NJ:Prentice Hall,1993.

[0402] [21]J.A.Cadzow,“Signal Enhancement A Composite Property Mapping Algorithm,”IEEE Transactions on Acoustics,Speech and Signal Processing, vol.36,pp.49-62,January 1988.

[0403] [22]Y.Hua and T.K.Sakar,“Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Undamped Sinusoids in Noise,”IEEE Transactions on Acoustics,Speech and Signal Processing,vol.38,pp.814-824,May

1990.

[0404] [23]B.D.Rao,“Model based processing of signals:A state space approach,”Proceedings of the IEEE,vol.3980,pp.283 309,February 1992.

[0405] [24]B.De Moor,“The Singular Value Decomposition and Long and Short Spaces of Noisy Matrices,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.41, pp.2826–2838,September 1993.

[0406] [25]Y.C.Eldar and A.V.Oppenheim,“MMSE Whitening and Subspace Whitening,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.49,pp.1846 1851,July 2003.

[0407] [26]E.Ollila,“On the Cramér–Rao bound for the constrained and unconstrained complex parameters,”Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop,pp.414 418,July 2008.

[0408] [27]L.Berman and A.Feuer,“On perfect conditioning of vandermonde matrices on the unit circle,”Electronic Journal of Linear Algebra,vol.16, pp.157 161,July 2007.

[0409] [28]G.H.Golub,P.Milanfar,and J.Varah,“A stable numerical method for inverting shape from moments,”SIAM Journal on Scientific Computing(SISC), vol.21,pp.1222 1243,December 1999.

[0410] [29]T.Blu,P.Thevenaz,and M.Unser,“MOMS:maximal–order interpolation of minimal support,”IEEE Transactions on Image Processing,vol.10,pp.1069 1080, July 2001.

[0411] [30]M.Unser,“Cardinal Exponential Splines:Part II—Think Analog,Act Digital,”IEEE Transactions on Signal Processing,vol.53,pp.1439 1449,April 2005.

[0412] [31]M.Unser,A.Aldroubi,and M.Eden,“Polynomial Spline Signal Approximations:Filter Design and Asymptotic Equivalence with Shannon’s Sampling Theorem,”IEEE Transactions on Information Theory,vol.38,pp.95 103, January 1992.

[0413] [32]M.Unser,“Sampling–50 years after Shannon,”in Proceedings of the IEEE,pp.569 587,April 2000.

[0414] [33]G.Strang and G.Fix,“Fourier analysis of the finite element variational method,”Constructive Aspect of Functional Analysis,pp.796 830, 1971.

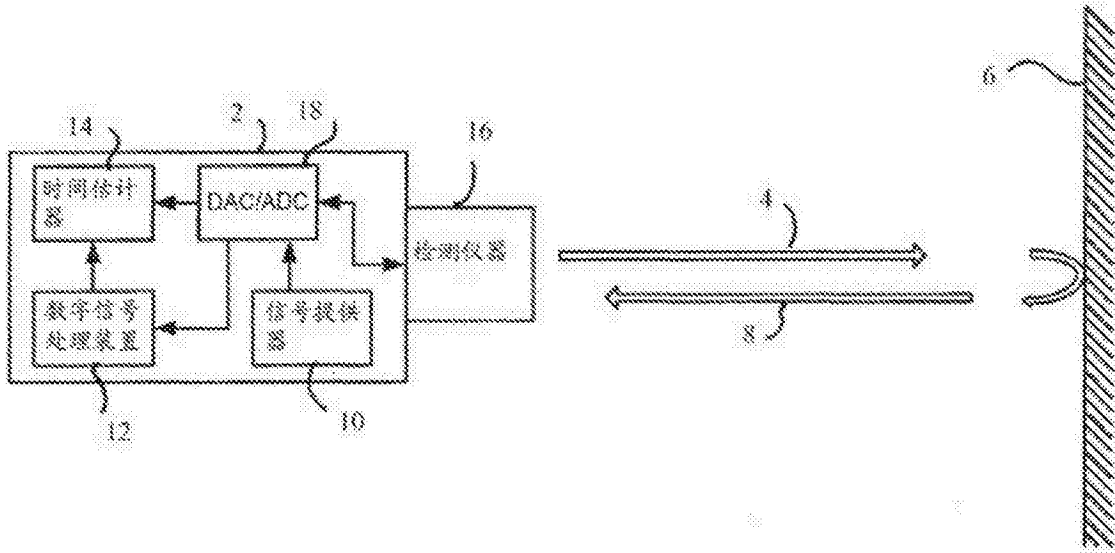


图1

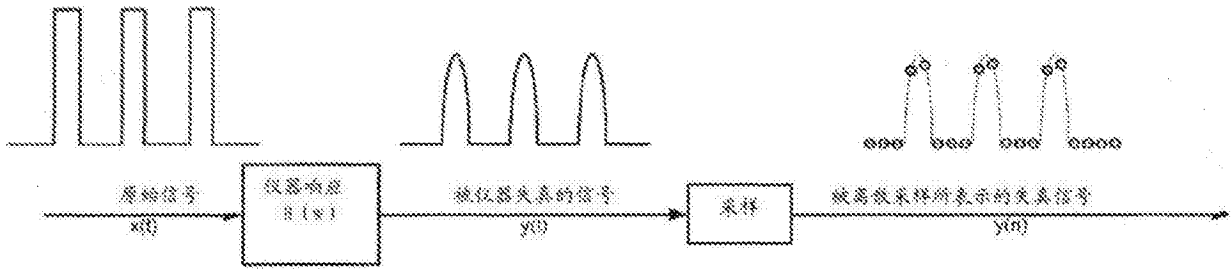


图2

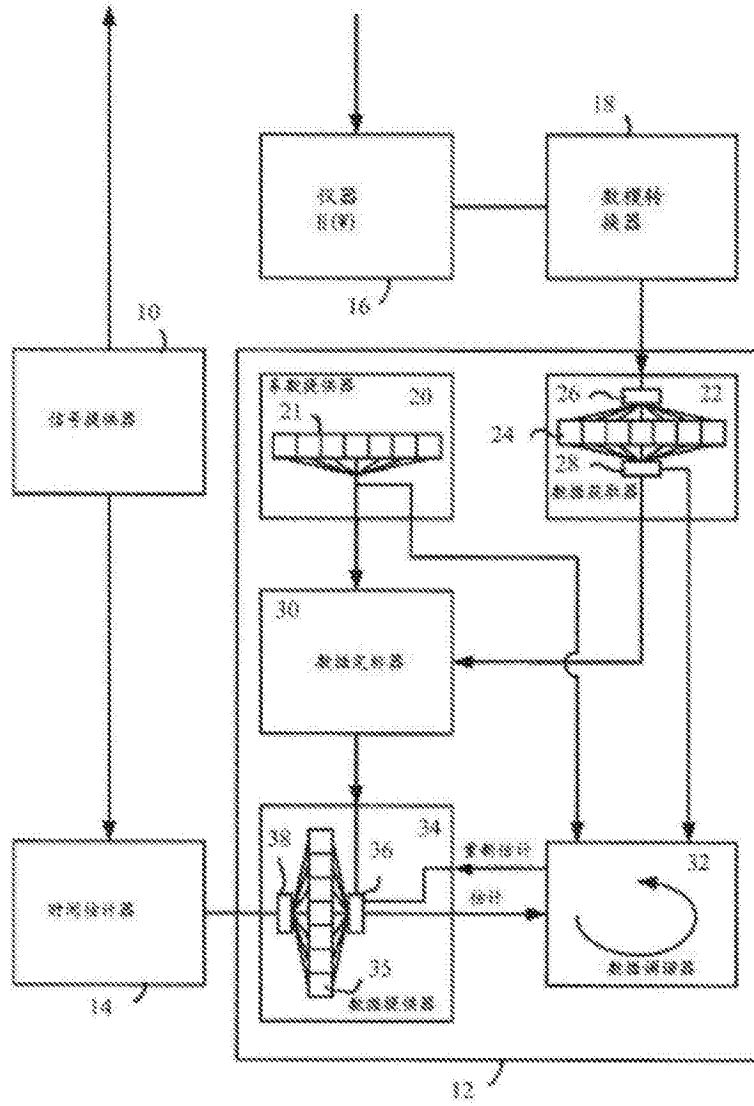


图3

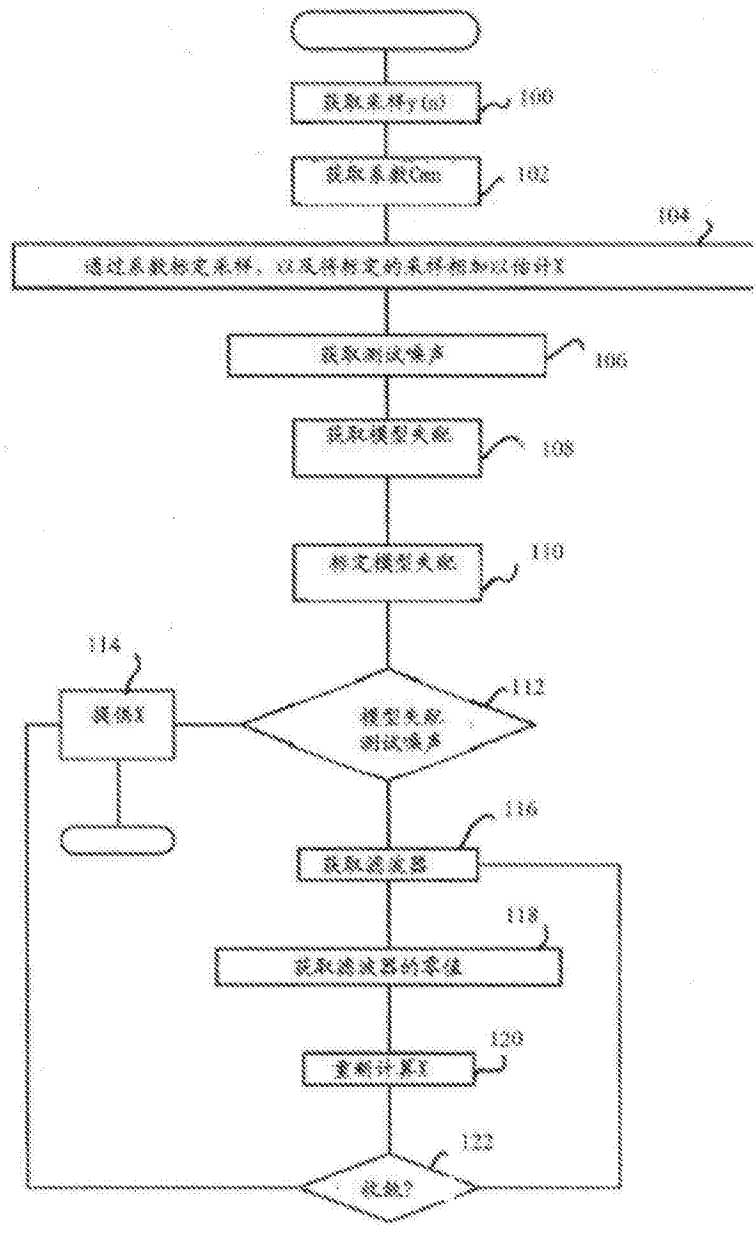


图4

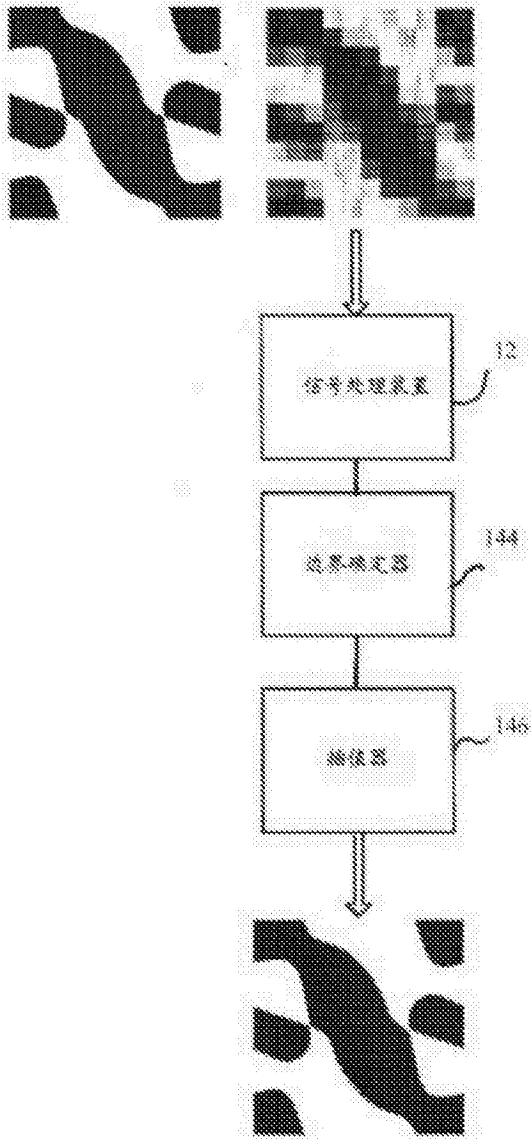


图5

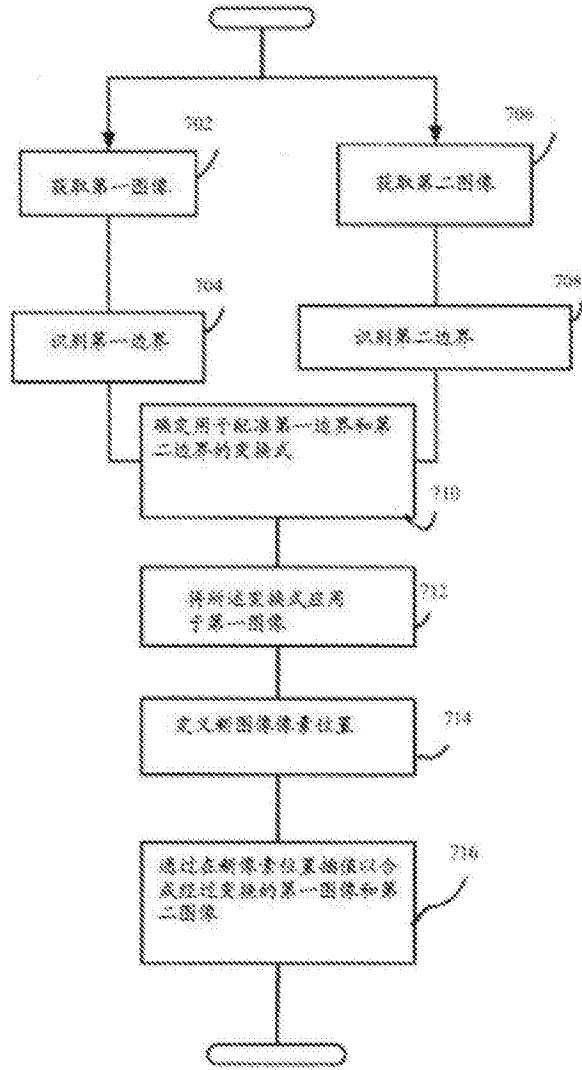


图6

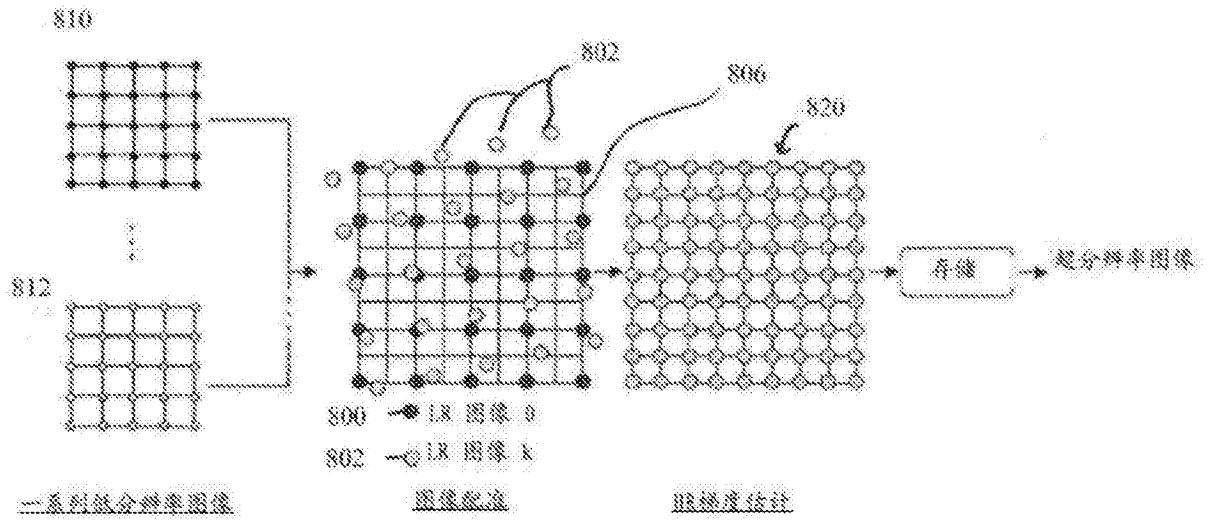


图7