



Patent dodatkowy
do patentu _____

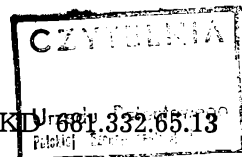
Zgłoszono: 18.IV.1969 (P 133 031)

Pierwszeństwo: _____

Opublikowano: 31.III.1971

Kl. 42 m⁴, 7/40

MKP G 06 g, 7/40



Twórca wynalazku: Ryszard Kołodziejczyk
Właściciel patentu: Polska Akademia Nauk (Instytut Automatyki),
Warszawa (Polska)

**Układ do analogowego, iteracyjnego rozwiązywania zagadnień
brzegowych dla układu równań różniczkowych cząstkowych Lamé**

1 Przedmiotem wynalazku jest układ do analogo-
wego lub analogowo-cyfrowego, iteracyjnego roz-
wiązywania zagadnień brzegowych dla układu rów-
nań różniczkowych cząstkowych Lamé, w przy-
padku ciał jednorodnych i izotropowych. Równa-
nia różniczkowe cząstkowe Lamé są równaniami
opisującymi zjawiska przemieszczeń w oparciu o
teorię sprężystości.

Rozpatrując zjawisko przemieszczenia spręży-
stego w płaskim układzie współrzędnych i przy
braku sił objętościowych, równania różniczkowe
cząstkowe Lamé mają postać:

$$\Delta u + (1+k) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\Delta \theta = 0$$

$$\Delta v + (1+k) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

gdzie: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ są składowymi prze-
mieszczenia sprężystego w kierunku osi
 x i y ,

$$\theta = \theta(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

jest odkształceniem objętościowym,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

jest operatorem różniczkowym Laplace'a,

2 k — jest stałą liczbową i dla płaskiego sta-
nu naprężenia jest $k = \lambda/G$, a w przy-
padku płaskiego stanu odkształcenia
 $k = 2\lambda(\lambda + 2G)$, gdzie λ jest stałą Lamé,
a G stałą Kirchoffa, tzn. modułem ści-
niania.

Zagadnienie brzegowe dla równań Lamé polega
na wyznaczeniu rozkładu wielkości u , v , θ we
wnętrzu danego obszaru płaskiego, gdy dane są
wartości u i v na brzegu tego obszaru.

W obecnym stanie analogowej techniki obli-
czeniowej w zastosowaniu do zagadnień brze-
gowych teorii sprężystości najczęściej stosowane jest
urządzenie analogii elektrycznej modelujące tzw.
15 funkcję Airy Φ , która spełnia równanie biharmoni-
czne:

$$\Delta \Delta \Phi = 0$$

20 Urządzenie to składa się z dwóch sieci oporo-
wych „górnej” i „dolnej” mających identyczną
strukturę połączeń, przy czym odpowiadające sobie
węzły tych sieci połączone są ze sobą galwanicznie
przez oporniki R o rezystancji znacznie większej
niż rezystancje ρ_1 i ρ_2 oporników w sieciach gór-
nej i dolnej.

25 Kryterium doboru rezystancji R jest następują-
ce: największe napięcie mierzone na sieci dolnej
ma być nie większe niż 2 do 5% największego
napięcia mierzonego na sieci górnej. W tych wa-
30 runkach przy odpowiednim zasilaniu elektrycz-

nym węzłów brzegowych sieci górnej i dolnej rozkład potencjałów w sieci dolnej (niskonapięciowej) stanowi przybliżone rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla równania biharmonicznego.

Wielkość naprężeń uzyskuje się przez dwukrotne numeryczne różniczkowanie uzyskanego w ten sposób pola Φ . Urządzenia tego rodzaju nie nadają się jednak do modelowania zagadnień w których warunki brzegowe dane są w postaci przemieszczeń, ani tym bardziej, do modelowania zagadnień dotyczących dwu lub więcej spojonych ze sobą różnych ciał sprężystych. Jest tak z tego powodu, że postać warunków brzegowych dla funkcji Airy Φ staje się wtedy bardzo skomplikowana i niedogodna do modelowania elektrycznego (zawiera drugie i trzecie pochodne cząstkowe funkcji Φ na brzegu lub linii zetknięcia).

Inny typ urządzeń modelujących równanie biharmoniczne stanowią tzw. modele quasianalogowe. Urządzenie składa się z dwu sieci oporowych różniących się strukturą połączeń. Węzły sieci są parami przyporządkowane. Nastawne źródła napięciowe załączone są między „masą” układu i przewodami (o niezerowej rezystencji) łączącymi przyporządkowane sobie węzły.

Posługiwanie się urządzeniem polega na znalezieniu takich nastaw wymienionych źródeł napięciowych, żeby napięcia mierzone między przyporządkowanymi sobie węzłami dwóch sieci były równe zero. Przy spełnieniu tego warunku wynik modelowania otrzymuje się przez pomiar potencjałów w węzłach jednej sieci.

Znane też jest inne urządzenie analogowe przeznaczone do modelowania równań opisujących zjawiska przemieszczeniowe według dwuwymiarowej teorii sprężystości. Urządzenie to przeznaczone jest do rozwiązywania zagadnień brzegowych do układu równań różniczkowych cząstkowych. Urządzenie to składa się z dwóch sieci oporowych wyznaczonych z wykorzystaniem dwóch kwadratowych siatek różnicowych przesuniętych względem siebie.

Zagadnienie brzegowe dla równań Lamé (1) polega na wyznaczeniu rozkładu wielkości u , v , Θ we wnętrzu danego obszaru płaskiego, gdy dane są wartości u i v na brzegu tego obszaru. Urządzenie według wynalazku przeznaczone jest do numerycznego rozwiązywania tego zagadnienia dla konkretnie określonych obszarów i wartości brzegowych. Składowe tensora naprężeń można używać wykonując jednokrotne różniczkowanie numeryczne według następujących wzorów:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\Theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= \lambda\Theta + 2G \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Równania Lamé syntetyzują informację o naprężeniach, odkształceniach i związku między nimi, tj. zawierają w sobie wszystkie założenia — mechaniczne, kinematyczne i fizyczne, na których opiera się liniowa teoria sprężystości. Z tego względu zakres zastosowań urządzenia obejmuje

statyczne obliczenia wytrzymałościowe elementów konstrukcji i części maszyn w większości działów techniki.

Celem wynalazku jest opracowanie urządzenia do analogowego, iteracyjnego rozwiązywania zagadnień brzegowych dla układu równań różniczkowych cząstkowych Lamé, które to urządzenie byłoby pozbawione wad znanych rozwiązań.

Cel ten osiągnięto przez skonstruowanie urządzenia zawierającego sieci oporowe, które jako istotną cechę ma to, że składa się z trzech siatek oporowych, połączonych z trzema przelicznikami tak, że tworzą pętlę zamkniętą dla sekwencyjnie obiegającego układu sygnału. W dwóch siatkach każdy węzeł siatki połączony jest ze źródłem prądowym podającym do węzła prąd o wielkości regulowanej sygnałem z przeliczników. W trzeciej siatce każdy węzeł brzegowy jest połączony ze źródłem napięciowym o sile elektromotorycznej regulowanej sygnałem wyjściowym z trzeciego przelicznika. Do przeliczników za pomocą układów komutujących dołączone są węzły siatek według określonego programu.

Przedmiot wynalazku zostanie bliżej objaśniony w oparciu o rysunek na którym przedstawiono schemat urządzenia według wynalazku.

Urządzenie składa się z trzech siatek oporowych, u , v , Θ o oczkach prostokątnych, trzech układów komutujących A , B , C oraz związanych z układami komutującymi przeliczników A' , B' , C' .

Siatki u i v są identyczne, ich węzły reprezentują te same obszary. Siatka Θ posiada skok identyczny z siatkami u i v , lecz węzły jej reprezentują obszary zawarte między węzłami siatek u i v . Położenie węzłów siatki Θ różni się zawsze o połowę skoku od położenia węzłów siatek u i v .

Każdy węzeł siatki u i v jest połączony ze źródłem prądowym, wielkość prądu dostarczanego do węzła przez to źródło jest nastawialna odpowiednio sygnałem z przeliczników A' i B' .

Każdy węzeł brzegowy siatki Θ jest połączony ze źródłem napięciowym którego siła elektromotoryczna jest nastawialna sygnałem wyjściowym przelicznika C' .

Układy komutujące są to dowolne używane w technice łączenia zespoły zapewniające jednoczesne dokonanie grupy połączeń np. wybieraki. Zadaniem ich jest kolejne przyłączanie określonych programem grup węzłów do przeliczników.

Przeliczniki są to dowolne układy do wykonywania operacji arytmetycznych zaopatrzone w wejścia analogowe (dane wejściowe podawane są w formie napięć) i wyjścia umożliwiające sterowanie nastawnych źródeł prądowych i napięciowych.

Układ komutujący A przyłącza się do wejścia układu liczącego A' kolejno po dwa węzły siatki u różniące się o 1 wskaźnikiem x oraz wyjście przelicznika z wejściem generatora prądu związanego z węzłem sieci u leżącym pomiędzy przyłączanymi węzłami sieci u .

Układ komutujący B przyłącza do wejścia układu liczącego B' kolejno po dwa węzły siatki v różniące się o 1 wskaźnikiem y , oraz wyjście przelicznika z wejściem generatora prądu związa-

5

nego z węzłem sieci leżącym pomiędzy przyłączonymi węzłami sieci θ .

Układ komutujący **C** przyłącza do wyjścia sumatora „+” kolejno węzły brzegowe sieci θ ; a do wejścia układów przeliczających **2** i **2'** odpowiednio węzły brzegowe sieci **u** i **v**, otaczające przyłączany węzeł sieci θ .

Urządzenie według wynalazku działa w pętli zamkniętej i według określonego programu. Program ten reguluje sposób pracy układów komutujących **A**, **B** i **C**. Przykładowo program dla poszczególnych układów komutujących został przewidziany jak poniżej przedstawiono.

Program komutacji układu komutującego **A**:

1. Przyłączyć węzeł $n(x, y)$ sieci θ do wejścia **A**₁.
2. Przyłączyć węzeł $(x+2, y)$ sieci θ do wejścia **A**₂.
3. $I_u = [\theta(x+1, y) - \theta(x, y)]\alpha$.
4. Przyłączyć wyjście **A**₃ do źródła prądowego skojarzonego z węzłem (x, y) sieci **u**.
5. Spowodować generację prądu I_u przez źródło.
6. Rozłączyć połączenia dokonane w p. 1, 2 i 4.
7. Przejść do następnego węzła $n+1$ sieci.

Program komutacji systemu **B**:

1. Przyłączyć węzeł $m(x, y)$ sieci θ do wejścia **B**₁.
2. Przyłączyć węzeł $(x, y+1)$ sieci θ do wejścia **B**₂.
3. $I_v = [\theta(x, y+1) - \theta(x, y)]\beta$.
4. Przyłączyć wyjście **B**₂ do źródła prądowego skojarzonego z węzłem (X, y) sieci **v**.
5. Spowodować generację prądu I_v przez źródło.
6. Rozłączyć połączenia dokonane w p. 1, 2 i 4.
7. Przejść do następnego węzła $m+1$ sieci θ .

Program komutacji systemu **C**:

1. Przyłączyć źródło napięciowe skojarzone z $k(x, y)$ węzłem brzegowym sieci θ , z wyjściem „+” przelicznika **C**.
2. Przyłączyć węzły (x, Y) , (X, y) , $(x, Y-1)$ sieci **u** do wejść **C**₁, **C**₂, **C**₃ podzespołu „**C**₁” przelicznika **C'**.

6

3. Przyłączyć węzły (x, Y) , (X, y) $(y, Y-1)$ sieci **v** do wejść **C**₄, **C**₅, **C**₆, podzespołu „**C**₂” przelicznika **C**.

4. $U = \delta_u(x, y) + \delta_v(x, y)$.

5. Rozłączyć połączenia zrealizowane w punktach 1 do 3.

6. Przejść do następnego węzła $k+1$ sieci θ .

W zrealizowanym systemie komutacyjnym wykorzystano wybierak krzyżowy WK-60. Pracuje on cyklicznie, w każdym cyklu wybierając kolejno pola 12 sprężyn realizujące połączenia wymagane programem **A**, **B** lub **C**.

Funkcjonalnie każdy cykl zawiera jednokrotny obieg wszystkich węzłów sieci przez system komutujący. Systemy **A** i **B** są komutowane jednocześnie (równolegle) tzn. operacja dotyczy odpowiadających sobie węzłów sieci **u** i **v**. Po zakończeniu komutacji systemów **A** i **B** następuje komutacja systemu **C**. Przyjęty sposób działania wynika wyłącznie z użycia wybieraka WK-60.

Zastrzeżenie patentowe

Układ do analogowego iteracyjnego rozwiązywania zagadnień brzegowych dla układu równań różniczkowych cząstkowych Lamé, zawierający sieci oporowe, **znamienny tym**, że składa się z trzech siatek oporowych, **(u, v, θ)** połączonych z trzema przelicznikami **(A, B, C)** tak, że tworzą pętlę zamkniętą dla sekwencyjnie obiegającego układ sygnału, w których to dwóch siatkach **(u, v)** modelujących obie składowe przemieszczenia sprężystego każdy węzeł siatki połączony jest ze źródłem prądowym podającym do węzła prąd o wielkości regulowanej sygnałem z odpowiednich przeliczników **(A' lub B')**, a w trzeciej siatce **(θ)** modelującej odkształcenie objętościowe każdy węzeł brzegowy jest połączony ze źródłem napięciowym o sile elektromotorycznej regulowanej sygnałem wyjściowym z trzeciego przelicznika **(C')**, przy czym do przeliczników **(A', B', C')** za pomocą układów komutujących **(A, B, C)**, dołączane są węzły siatek według określonego programu.

