(19) 대한민국특허청(KR)
(12) 등록특허공보(B1)

(45) 공고일자 2018년09월03일
(11) 등록번호 10-1894288
(24) 등록일자 2018년08월28일

(51) 국제특허분류(Int. Cl.)
G06F 17/00 (2006.01) *G06F 17/16* (2006.01)
G06F 17/18 (2006.01) *G06F 17/50* (2006.01)
(21) 출원번호 10-2012-7008660
(22) 출원일자(국제) 2010년09월03일
심사청구일자 2015년08월19일
(85) 번역문제출일자 2012년04월03일
(65) 공개번호 10-2012-0092588
(43) 공개일자 2012년08월21일
(86) 국제출원번호 PCT/US2010/047832
(87) 국제공개번호 WO 2011/029015
국제공개일자 2011년03월10일
(30) 우선권주장
61/239,745 2009년09월03일 미국(US)
(56) 선행기술조사문헌
US05465321 A*
*는 심사관에 의하여 인용된 문헌

(73) 특허권자
래리모어, 윌러스 이.
미국, 버지니아주 22101, 맥린, 1717 브라이어 릿지 로드
(72) 발명자
래리모어, 윌러스 이.
미국, 버지니아주 22101, 맥린, 1717 브라이어 릿지 로드
(74) 대리인
나승택

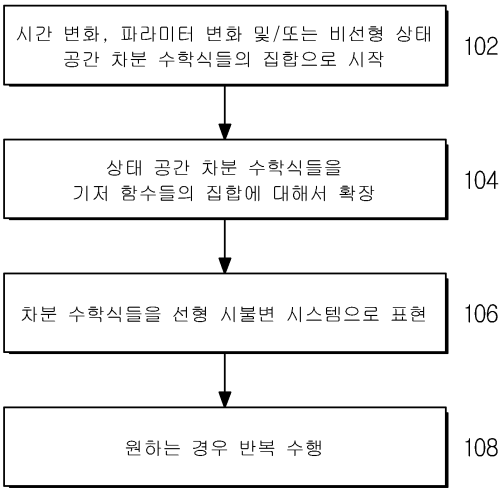
전체 청구항 수 : 총 4 항 심사관 : 이복현

(54) 발명의 명칭 **반복 선형 부분공간 계산을 통하여 시간 변화, 파라미터 변화 및, 비선형 시스템들의 실증적인 모델링을 위한 방법 및 시스템**

(57) 요 약

본 발명은 비선형, 시간 변화 및 파라미터 변화 역학 프로세스 또는 시스템을 통제할 수 있는 차분 또는 차등 방정식을 추정하기 위한 방법들 및 시스템들이다. 수학식들을 추정하기 위한 본 방법들과 시스템들은 관찰된 출력과, 바람직할 때, 상기 수학식들을 위한 입력 데이터의 추정에 기초가 될 수 있다. 본 방법들과 시스템들은 시스템 제어, 고장 검출, 상태 추정과 예측 및 이의 적응에 사용된 상세한 시스템 또는 방법 행동을 기술하는 것의 차등 수학식의 자동화된 추출을 시스템 또는 방법에 있는 변화에 사용한 비선형, 시간 변화 및 파라미터 변화 차등 수학식으로 기술될 수 있는 어떤 시스템 또는 프로세스에 이용될 수 있다.

대 표 도 - 도1



명 세 서

청구범위

청구항 1

삭제

청구항 2

삭제

청구항 3

삭제

청구항 4

삭제

청구항 5

삭제

청구항 6

삭제

청구항 7

삭제

청구항 8

삭제

청구항 9

삭제

청구항 10

삭제

청구항 11

삭제

청구항 12

삭제

청구항 13

삭제

청구항 14

삭제

청구항 15

삭제

청구항 16

삭제

청구항 17

삭제

청구항 18

삭제

청구항 19

부분공간 식별 방법들을 범용 스케줄링 함수들을 갖는 선형 파라미터 변화(LPV) 및 비선형 파라미터 변화 시스템들로 확장하는 방법을 수행하기 위한 컴퓨터 프로그램을 포함하는 컴퓨터 판독 가능 매체로서,

상기 부분공간 식별 방법들을 범용 스케줄링 함수들을 갖는 선형 파라미터 변화(LPV) 및 비선형 파라미터 변화 시스템들로 확장하는 방법은,

증가하는 순서의 ARX 모델을, 프로세서를 통한 부분공간 식별을 위한 알고리즘의 미리 결정된 반복의 관찰에 대해 피팅(fitting)하는 단계를 포함하고, 상기 피팅하는 단계는:

아카이케 정보 기준(Akaike's information criterion : AIC), 각 ARX 순서에 대한 모델 피트(fit)의 정정된 작은 샘플(AIC_c)을 계산하는 단계;

상기 AIC_c의 계산에 기초하여 결정되는 ARX 순서를 결정하는 단계;

상기 알고리즘의 임의의 장래 출력들에 대한 하나 이상의 입력들의 영향의 예측 및 감산을 통해 상기 알고리즘의 하나 이상의 정정된 장래 출력들을 획득하는 단계;

상기 정정된 장래 출력과 과거의 증강된 입력들 및 출력들 사이의 정준 변량 분석(canonical variate analysis, CVA)을 수행함으로써, 장래에 대한 예측 상관으로서 순서가 결정되는 요소들을 갖는 메모리를 결정하는 단계;

상기 메모리를 하나 이상의 상태 방정식들에 입력하는 단계; 및

상기 상태 방정식들의 행렬 계수들을 결정하기 위하여 상기 하나 이상의 상태 방정식들에 대한 선형 회귀 계산을 수행하는 단계를 포함하는, 부분공간 식별 방법들을 범용 스케줄링 함수들을 갖는 선형 파라미터 변화(LPV) 및 비선형 파라미터 변화 시스템들로 확장하는 방법을 수행하기 위한 컴퓨터 프로그램을 포함하는 컴퓨터 판독 가능 매체.

청구항 20

제19항에 있어서,

상기 메모리는 AIC를 사용하여 선택된 상태 순서의 결정된 추정값인, 부분공간 식별 방법들을 범용 스케줄링 함수들을 갖는 선형 파라미터 변화(LPV) 및 비선형 파라미터 변화 시스템들로 확장하는 방법을 수행하기 위한 컴퓨터 프로그램을 포함하는 컴퓨터 판독 가능 매체.

청구항 21

제19항에 있어서,

상기 ARX 모델의 피팅은 결정된 최대 ARX 순서 외에 ARX 순서 상에 아무런 사전 추정들이 없도록 만드는 선형 회귀 문제를 갖는, 부분공간 식별 방법들을 범용 스케줄링 함수들을 갖는 선형 파라미터 변화(LPV) 및 비선형 파라미터 변화 시스템들로 확장하는 방법을 수행하기 위한 컴퓨터 프로그램을 포함하는 컴퓨터 판독 가능 매체.

청구항 22

제19항에 있어서,

상기 ARX 모델의 피팅은 특정된 ARX 순서 *lagp*를 더 포함하고, 상기 특정된 ARX 순서 *lagp*에 대해, 및 *lagp* 보다 큰 모든 시간 t 동안, 출력들 y_t의 예측은 0 < i < *lagp*+1 에 대해 과거 출력들 y_{t-i} 의 자기회귀를 사용하고, 외인성 이동 평균은 과거 입력들 u_{t-i}을 포함하고, 추가로 증대된 과거 입력들 $\rho_{t-i} \otimes u_{t-i}$및 증대된 상태 추정들 $\rho_{t-i} \otimes x_{t-i}$ 은 0 < i < *lagp*+1 에 대해 유사하게 시간 이동된 과거 스케줄링 함수들 ρ_{t-i}인 크로네커 곱들만큼 각각 증대되는, 부분공간 식별 방법들을 범용 스케줄링 함수들을 갖는 선형 파라미터 변화(LPV) 및 비선형 파라미터 변화 시스템들로 확장하는 방법을 수행하기 위한 컴퓨터 프로그램을 포함하는 컴퓨터 판독 가능 매체.

발명의 설명

기 술 분 야

[0001] 본 발명은 2009년 9월 31일에 출원된 미국 임시 특허 출원 번호 61/239,745에 대해 35 U.S.C.§120에 따라 우선권을 주장하며, 상기 공개가 그것의 전체에서 여기에 참조에 의해 포함된다.

배 경 기 술

[0002] 측정된 출력 데이터 및 가능한 입력 데이터로부터 비선형 및 시간 변화 역학 프로세스들이나 시스템들의 모델링은 떠오르는 기술 분야이다. 이론 또는 응용 분야에 따라, 통계학의 시계열 분석, 공학의 시스템 식별, 심리학의 종단적 분석(longitudinal analysis) 및, 재무분석의 예측으로 불릴 수 있다.

[0003] 과거에는 부분공간 시스템 식별 방법들의 혁신과, 피드백을 수반하는 시스템들에 대한 최적의 방법들을 포함하는 상당한 개발과 개선 및, 이선형(bilinear) 시스템들 및 선형 파라미터 변화(linear parameter varying, LPV) 시스템들을 포함하는 비선형 시스템들에 대한 방법들의 탐구가 있었다. 부분공간 방법들은 수렴하지 않을 수 있는 반복 비선형 파라미터 최적화를 방지할 수 있고, 고차 대규모 시스템들에 맞는 상당한 값으로부터 수치적으로 안정한 방법들을 사용할 수 있다.

[0004] 시간 변화 및 비선형 시스템들의 분야에서는 비록 바라는 결과들이 없을 지라도 연구가 착수되었다. 이 연구는 비선형 시스템 모델링을 위해 사용되는 선형 부분공간 방법들을 보다 직접적으로 확장하는 점에서 전형적인 업계의 현 상태이다. 이 접근법은 과거 입력들과 출력들의 비선형 함수들의 선형 조합으로서 과거와 미래를 표현한다. 이 접근법의 한 결과는 과거와 미래의 차원이 측정된 입력들, 출력들, 상태들 및, 사용된 과거의 지연들의 수에서 기하급수적으로 확장하는 것이다. 단지 이들 변수들의 각각 몇 개를 사용할 때, 과거의 차원은 10^4이상 또는 10^6 보다 더 큰 수 일수 있다. 종래의 산업 프로세스들에서, 과거의 차원은 10^9 또는 10^{12}을 쉽게 넘을 수 있다. 이러한 극단적인 수들은 잘해봐야 비효율적인 이용 및 결과들만을 야기한다.

[0005] 다른 기술들은 상기 모델에서 비선형 항들을 추정하도록 반복 부분공간 접근법을 사용하고, 결과적으로 매우 보통의 계산을 요구한다. 이 접근법은 휴리스틱 알고리즘(heuristic algorithm)을 포함하며, 랜덤 스케줄링 함수를 가진, 즉, 백색 잡음 특성(white noise characteristic)을 가진 LPV 시스템들에서 고정밀 모델 식별을 위해서 사용되었다. 그러나, 대부분의 LPV 시스템들에서 스케줄링 함수들이 특정한 응용프로그램들에 의해 결정되며, 특성면에서 매우 비랜덤(non-random)인 것이 문제점 중 하나이다. 몇몇 변형들에서 비랜덤 스케줄링 함수들에 대한 정확도를 개선하고자 하는 시도가 수행되었으며, 그 시도된 변형들이 모델링 정확도를 상당히 개선하는 성공을 하지는 못했다.

[0006] 보다 일반적인 맥락에서, 비선형 시스템 식별의 일반적인 문제는 일반적인 비선형 정준변량분석(canonical variate analysis, CVA) 절차로 알려져 있다. 상기 문제에는 로렌츠 어트랙터(Lorenz attractor)가 이용되었으며, 카오스 비선형 시스템(chaotic nonlinear system)이 간단한 비선형 차분 수학식(simple nonlinear difference equation)에 의해 묘사된다. 그러므로 과거와 미래의 비선형 함수들은 결국 시스템의 비선형 상태 수학식들을 표현하도록 사용된 프로세스의 상태를 설명하도록 결정된다. 잘 알려진 대로 과거와 미래의 필수의 비선형 수학식들의 수가 기하급수적으로 확장되기 때문에 실현 가능한 계산의 이행을 찾는데 이들 접근법에 주요한 어려움이 있다. 이들 어려움은 일반적인 비선형 시스템들에 적용되는 시스템 식별 문제의 해결책을 찾는 곳에서 종종 접하였었다.

[0007] 그러므로, 아래에서 설명하는 몇몇 예시적 실시예에서, 방법들과 시스템들은 상당한 개선을 달성하고 또한 관찰의 '대표본(large sample)'을 이용할 수 있는 경우에 최적의 결과를 생산하도록 묘사될 수 있다. 게다가, 상기 방법은 '즉석(ad hoc)'은 아니지만 최적의 통계 방법들을 수반할 수 있다.

발명의 내용

해결하려는 과제

[0008] 본 발명은 상기한 종래의 문제점을 해결하기 위해 제안된 것으로 반복 선형 부분공간 계산을 통하여 시간 변화, 파라미터 변화 및, 비선형 시스템들의 실증적인 모델링을 위한 방법 및 시스템을 제공함에 그 목적이 있다.

과제의 해결 수단

[0009] 하나의 예시적 실시예는 비선형, 시간 변화 및 파라미터 변화 역학 프로세스들을 이용하기 위한 방법을 설명한다. 상기 방법은 시간 변화 요소들을 가진 시스템들의 감소된 모델들을 만들기 위해 사용될 수 있다. 상기 방법은 상태 공간 차분 수학식들을 확장하기 위한 단계; 출력들 및 증가된 입력들의 항들에서 선형, 시간 변화 시스템으로 차분 수학식들을 표현하는 단계; 및 상태 수학식들의 계수들을 추정하는 단계;를 포함할 수 있다.

[0010] 다른 예시적 실시예는 비선형, 시간 변화 및 파라미터 변화 프로세스들을 관리하기 위한 시스템을 설명할 수도 있다. 상기 시스템은 제1입력, 제2입력, 피드백 박스 및 시간 지연 박스를 가질 수 있다. 게다가, 상기 시스템에서, 상기 제1입력 및 상기 제2입력은 출력을 생성하기 위해 상기 피드백 박스를 통해 상기 시간 지연 박스로 통과될 수도 있다.

발명의 효과

[0011] 이러한 구성의 본 발명에 따르면 반복 선형 부분공간 계산을 통하여 시간 변화, 파라미터 변화 및, 비선형 시스템들의 실증적인 모델링을 위한 방법 및 시스템이 제공된다.

도면의 간단한 설명

[0012] 도 1은 예시적 실시예에 따른 시간 변화, 파라미터 변화 및 비선형 차분 수학식의 실증적 모델링을 위한 방법론을 도시한 플로우 차트이다.

도 2는 차분 수학식들의 선형, 파라미터 변화 시스템이 이용될 수 있는 예시적 플로우 차트이다.

도 3은 반복 부분공간 식별(iterated subspace identification)을 위해 수행될 수 있는 반복 알고리즘의 플로우 차트이다.

도 4는 수학식들 15 및 16의 계통도(schematic diagram)이다.

도 5는 예시적 단계들이 도시된 테이블이다.

도 6은 예시적 단계들이 도시된 플로우 차트이다.

발명을 실시하기 위한 구체적인 내용

[0013] 본 발명의 양상은 다음의 설명 및 본 발명의 구체적 실시예들에서 유도된 관련 수치들에서 공개되었다. 당해 기술분야에서 숙련된 이들은 청구항들의 정신 또는 범위에서 출발하지 않고 대체 실시예들이 고안될 수도 있다고 인정할 것이다. 게다가, 본 발명의 예시적 실시예들의 주지 요소들은 발명의 세부사항들이 모호하지 않도록 상세히 묘사되지 않거나 생략될 것이다.

[0014] 여기에 사용한 바와 같이, "예시적"의 단어는 "일 예, 사례 또는 실례로서 제공하는"을 의미한다. 여기에 묘사된 실시예들은 제한하는 것이 아니라, 단지 예시에 지나지 않는다. 묘사된 실시예들이 다른 실시예들을 넘어 선호되거나 이득이 되는 것으로 해석될 필요가 없음을 이해해야 한다. 게다가, "본 발명의 실시예들" "실시예들" 또는 "발명"은 본 발명의 모든 실시예들이 논의된 특징, 이득 또는 동작 모드를 포함하게 요구하지 않는다.

[0015] 게다가, 많은 실시예들이 예를 들어, 컴퓨팅 장치의 요소들에 의해 수행되는 동작의 시퀀스들로 묘사된다. 여기에 묘사된 다양한 동작이 특정 회로들(예를 들어, 응용 프로그램 특정 집적 회로 (ASICs))에 의해, 하나 이상의 프로세서에서 실행중인 프로그램의 지시에 의해, 또는 둘 모두의 조합에 의해 수행할 수 있다고 인정될 수

있다. 또한, 여기에 묘사된 동작들의 이러한 시퀀스는 관련 프로세서가 여기서 설명된 기능을 수행하도록 실행 중에 야기할 수 있는 컴퓨터 지시들의 해당 집합을 그 안에 저장한 컴퓨터 판독 가능한 기억 매체의 어떤 형태 내에서 완전히 구현되는 것으로 간주될 수 있다. 그러므로, 본 발명의 다양한 양상은 청구된 주제의 범위 이내에서 숙고되었던 모든 것들, 다수의 다양한 형태들에 구현될 수 있다. 게다가, 여기에 묘사된 각 실시예들에 대해서, 그러한 실시예들의 해당 형태가 예를 들어, 묘사된 행동을 수행하는 "구성된 논리"로서, 여기에 설명될 수 있다.

[0016] 일반적으로 예시적 도 1 내지 6을 참조하면, 시간 변화, 파라미터 변화 및 비선형 차분 수학식들의 실증적 모델링을 위한 방법들 및 시스템들이 묘사될 수 있다. 상기 방법들 및 시스템들은 다양한 결과들 및 효율적으로 구현되는 것들을 제공하도록 구현되고 이용될 수 있다.

[0017] 예시적 도 1에 도시된 대로, 예시적 실시예에 따른 시간 변화, 파라미터 변화 및 비선형 차분 수학식의 실증적 모델링을 위한 방법론의 플로우 차트가 도시될 수 있다. 여기에, 102에서, 일련의 시간 변화, 파라미터 변화 및, 원한다면, 비선형 상태 공간 차분 수학식들이 이용될 수 있다. 104에서, 상기 수학식들이 그 다음에 기저함수들의 선택된 세트에 대하여 확장될 수 있고, 예를 들어 비선형 입출력 수학식들이 x_t 와 u_t 의 다항식에서 확장될 수도 있다. 그 다음, 106에서, 차분 수학식들은 예를 들어, 출력 y_t 와 증가된 입력 u_t 에 관하여 선형 시불변으로 표현될 수 있으며, 이는 입력들 u_t 와 기저함수들, 예를 들어 다항식들, 입력들 u_t 스케줄링 함수들 p_t 및 상태들 x_t을 포함할 수 있다.

[0018] 예시적 도 2는 차분 수학식들의 선형, 파라미터 변화 시스템이 이용될 수 있는 예시적 플로우 차트를 보여줄 수 있다. 본 실시예에서는, 202에서 아래의 수학식 1 및 수학식 2에 도시된 바와 같은 선형 파라미터 변화 상태 공간 수학식들의 세트가 이용될 수도 있다.

수학식 1

[0019] $$x_{t+1} = A_0 x_t + B_0 u_t + [A_1 \rho_t(1) + \ldots + A_s \rho_t(s)] x_t + [B_1 \rho_t(1) + \ldots + B_s \rho_t(s)] u_t$$

수학식 2

[0020] $$y_t = C_0 x_t + D_0 u_t + [C_1 \rho_t(1) + \ldots + C_s \rho\ (s)] x_t + [D_1 \rho_t(1) + \ldots + D_s \rho_t(s)] u_t$$

[0021] 그 다음에, 204에서, 상기 상태 공간 차분 수학식들은, 예를 들어 아래의 수학식 3 및 4에 도시된 대로, 스케줄링 함수 p_t, 상태들 x_t 과 입력들 u_t 의 다항식들에 대해서 확장될 수도 있다.

수학식 3

[0022] $$x_{t+1} = A_0 x_t + B_0 u_t + [A_1 \cdots A_s](\rho_t \otimes x_t) + [B_1 \cdots B_s](\rho_t \otimes u_t)$$

수학식 4

[0023] $$y_t = C_O x_t + D_O u_t + [C_1 \cdots C_S](\rho_t \otimes x\ ) + [D_1 \cdots D_S](\rho_t \otimes u_t)$$

[0024] 다음에, 206에서, 상기 차분 수학식들은 원래의 출력들 y_t 그리고, u_t, x_t 및 p_t 의 함수인 증가된 입력들

$[u_t,(p_t \otimes x_t),(p_t \otimes u_t)]$에 대해서 표현될 수 있다. 차분 수학식들은 추측될 수 있는 선형 시간 시불변 미지수 $(A_0,[B_0 A_\rho B_\rho],C_0,[D_0 C_\rho D_\rho])$ 계수들을 가질 수 있으며, 아래의 수학식 5 및 6에 도시된 바와 같다.

수학식 5

$$x_{t+1} = A_0 x_t + [B_0 A_\rho B_\rho]\begin{bmatrix} u_t \\ \rho_t \otimes x_t \\ \rho_t \otimes u_t \end{bmatrix}$$

[0025]

수학식 6

$$y_t = C_0 x_t + [D_0 C_\rho D_\rho]\begin{bmatrix} u_t \\ \rho_t \otimes x_t \\ \rho_t \otimes u_t \end{bmatrix}$$

[0026]

[0027] 그 다음에, 208에 도시된 대로, 상기 증가된 입력들 $[u_t,(p_t \otimes x_t),(p_t \otimes u_t)]$, 및, 몇몇 예시적 실시예들에서, 특별히 $\rho_t \otimes x_t$는 미지수 상태 x_t 벡터를 포함할 수 있어서, 반복이 활용되거나 바랄 수도 있다. 그러므로, 이러한 예시적 실시예들에서, 아래에 더 상세히 묘사된 대로, 반복 알고리즘을 이용하는 반복이 활용될 수 있다.

[0028] 예시적 도 3은 반복 부분공간 식별(iterated subspace identification)을 위해 수행될 수 있는 반복 알고리즘의 플로우 차트를 도시할 수 있다. 본 실시예 및 302에서 보여준 대로, 비선형 차분 수학식들은 가법 기저 함수(additive basis functions)에서 확장되고, 증가된 입력 u_t 와 함께 선형 시불변 형태로 표현될 수 있다. 몇몇 예에서, 이는 출력들, 상태 및 스케줄링 함수들을 포함하는 비선형 기저 함수들을 포함할 수 있다.

[0029] 그 다음에, 304에서, 상태 추정값 $\hat{x}_t^{[0]}$은 LPV 모델에서 $(A_\rho C_\rho)$항과 동일하지 않은 미지수이고, 해당 항들은 증가된 입력들 $\tilde{u}_t$의 세트로부터 제거될 수도 있다. 상기 반복 알고리즘은 그 다음에 상기 입력들처럼 증가된 입력을 이용해 수행될 수 있고, 상기 모델 파라미터들의 추정들 $\hat{\Theta}^{[1]}$을 계산할 수 있다. 그 다음에, 예를 들어, 추정된 파리미터 값들 $\hat{\Theta}^{[1]}$, 상태 추정값들 $\hat{x}_t^{[1]}$에서 칼만 필터(Kalman filter)가 한 단계 예측 혁신과 함께 계산될 수 있다. 그 다음에 가능도 함수가 평가될 수 있다.

[0030] 다음에, 306에서, $k \geq 2$ 대한 k의 반복이 만들어진다. 여기서 상태 추정 $\hat{x}_t^{[k-1]}$이 모든 t에 대해서 초기화

될 수 있다. 상기 반복 알고리즘은 그 다음에 상기 입력들 대로 증가된 입력을 이용해 수행될 수 있고, 파라미터의 추정값들 $\hat{\Theta}^{[k]}$ 을 계산할 수 있다. 다시, 예를 들어, 추정된 파리미터 값들 $\hat{\Theta}^{[k]}$ 에서 칼만 필터를 이용해, 상태 추정값 $\hat{x}_t^{[k]}$ 이 계산될 수 있다. 또한, 상기 한단계 예측 혁신이 만들어 질 수 있고, 가능도 $\rho(Y_{1:N} \mid \tilde{U}_{1:N}; \hat{\Theta}^{[k]})$ 또한 평가될 수 있다.

[0031] 308에서 수렴을 확인할 수 있다. 여기서 로그 가능도 함수(log likelihood function)의 수치 및 반복 k-1과 반복 k 사이의 상태 순서들이 비교될 수 있다. 만약, 몇몇 예들에서, 상기 상태 순서가 동일하면, 로그 가능도 함수 변화가 선택된 임계값 ε 보다 적다. 많은 예에서 이들 임계값은 예를 들어 0.01 보다 적을 수 있고, 그 다음에 상기 반복들이 끝나거나 정지될 것이다. 그렇지 않으면, 상기 값이 선택된 임계값 ε이상인 곳에서, 위의 단계 306이 반송되어 반복 k+1이 수행될 수도 있다. 반복 k+1의 수행 다음에, 상기 수렴이 다시 확인될 수 있다.

[0032] 또 다른 예시적 실시예에서, 다른 접근법이 직접적으로 취해질 수 있고, 예를 들어, 선형 시불변 시스템들을 위해 개발된 부분공간 방법들을 이용한 시스템에서 자동상관 에러들(autocorrelated errors) 및 피드백의 경우에 대한 미지의 파라미터들의 최적 또는 원하는 추정값들을 간단히 얻을 수 있다. 상태 추정값 상의 반복으로 이어질 수 있는 다른 형태에서 상기 문제를 표현하는 것을 통해서 수행될 수도 있으나; 다수의 반복들이 매우 적어질 수 있고, 시스템 및 그것의 개발을 더 간단하게 하도록, 확률 노이즈(stochastic noise)가 제거될 수 있다.

[0033] 예를 들어, 시스템 행렬들이 아래 수학식들에 도시된 형태의 스케줄링 파라미터들 $\rho_t = (\rho_t(1)\ \rho_t(2) \ldots \rho_t(s))^T$ 벡터의 시간 변화 함수들인 선형 시스템을 고려한다;

수학식 7

[0034] $$x_{t+1} = A(\rho_t)x_t + B(\rho_t)u_t$$

수학식 8

[0035] $$y_t = C(\rho_t)x_t + D(\rho_t)u_t$$

[0036] 스케줄링 파리미터들 상의 아핀 의존성(affine dependence)을 위해, 상태 공간 행렬들이 다음의 수학식 9 내지 12의 형태를 가질 수 있다.

수학식 9

[0037] $$A(\rho_t) = A_0 + \sum_{i=1}^{s} \rho_t(i)A_i$$

수학식 10

[0038] $$B(\rho_t) = B_0 + \sum_{i=1}^{s} \rho_t(i) B_i$$

수학식 11

[0039] $$C(\rho_t) = C_0 + \sum_{i=1}^{s} \rho_t(i) C_i$$

수학식 12

[0040] $$D(\rho_t) = D_0 + \sum_{i=1}^{s} \rho_t(i) D_i$$

[0041] 상기 수학식들에서, 왼쪽의 행렬들은 스케줄링 파라미터들 ρ_t에 의해 명시된 오른쪽 상에 선형 결합들 $(\rho_t(1)\ \rho_t(2) \ldots \rho_t(s))^T$ 로 표현될 수 있으며, 이는 아핀 형태(affine form)로 불릴 수 있다. 추가 논의에서, 시스템 행렬 $A = [A_0\ A_1 \ldots A_S] = [A_0\ A_\rho]$ 과 마찬가지로 B, C, 및 D에 대해서 상기 표기법이 사용될 수 있다.

[0042] 좀더 예시적 실시예들에서, LPV 시스템들의 종류에 대한 시스템 식별 방법들은 다수의 잠재적인 응용프로그램들과 경제적 가치를 가질 수 있다. 이러한 시스템들은 제한하는 것이 아니라, 공기역학 및 유체 역학 차량들, 예를 들어 비행기나 배, 자동차의 엔진 역학, 터빈 엔진 역학, 화학 처리 공정, 예를 들어 교반 탱크 반응기(stirred tank reactors) 및 증류탑, 다른 것들 사이에서 포함될 수 있다. 한 특징은 어떤 운영 지점 ρ_t에서 상기 시스템 역학들이 선형 시스템으로 묘사될 수 있다는 것이다. 스케줄링 파리미터들 ρ_t은 운용 포인트 변수(operating point variables)들, 예를 들어, 제한하는 것이 아니라, 속도, 압력, 온도, 연료 흐름 및 그와 같은 것의 복잡한 비선형 함수들(complex nonlinear functions)일 수 있고, 아마도 미지의 상수 행렬들 A,B,C 및, D 이내의 시스템 역학들로 특징 지울 수 있는 알려지거나 정확히 측정된 변수들일 수 있다. 또한, ρ_t가 이와 같은 운영 포인트 변수들의 지식으로부터 계산되거나 확인될 수 있다고 추정될 수도 있다. 예를 들어, 자동차 엔진들의 LPV 모델들은 다양한 운영 포인트 변수들의 매우 복잡한 비선형 함수들로서 벡터 ρ_t 의 요소들로 명쾌하게 표현되는 상기 LPV 상태 공간 수학식들을 포함할 수 있다. 여기에 묘사되는 몇몇 예시적 실시예들에서, 상기 시스템 식별 계산들이 수행될 때 상기 스케줄링 파라미터 ρ_t가 사용될 수 있기를 바라는 경우가 있다. 이것은 실시간 컨트롤이나 필터링과 같은 응용 프로그램들에 대한 실시간 사용 또는 요건의 완화가 될 수 있다.

[0043] 논의를 간소화하기 위해, 상기 LPV 수학식들은 아래의 수학식들 13 및 14처럼 입력 u_t와 상태 x_t를 가진 스케줄링 파라미터 ρ_t를 연관짓는 것을 통해 시불변 형태로 쓰여질 수 있다.

수학식 13

$$x_{t+1} = A_0 x_t + B_0 u_t + [A_1 \cdots A_s](\rho_t \otimes x_t) + [B_1 \cdots B_s](\rho_t \otimes u_t)$$

[0044]

수학식 14

$$y_t = C_0 x_t + D_0 u_t + [C_1 \cdots C_s](\rho_t \otimes x_t) + [D_1 \cdots D_s](\rho_t \otimes u_t)$$

[0045]

[0046] 여기서, $\otimes$는 $m_{i,j}$로 표시되는 M의 i,j 요소와 함께 $(M \otimes N)_{i,j} = m_{i,j} N$ 처럼 i,j의 블록들로부터 형성된 분할행렬(partitioned matrix)로서 어떤 행렬들 M과 N으로 정의된, 크로네커 곱 $M \otimes N$을 표시할 수 있다. 또한, 표기법 $[M;N]=[M^T N^T]^T$ 은 벡터 또는 행렬 M 과 N의 스태킹(stacking)을 위해 사용될 수 있다. 위의 수학식 13 및 14는 또한 아래에 도시된 것과 같이 수학식 15 및 16의 형식으로 쓰여질 수 있다.

수학식 15

$$x_{t+1} = A_0 x_t + [B_0 \; A_\rho \; B_\rho] \begin{bmatrix} u_t \\ (\rho_t \otimes x_t) \\ (\rho_t \otimes u_t) \end{bmatrix}$$

[0047]

수학식 16

$$y_t = C_0 x_t + [D_0 \; C_\rho \; D_\rho] \begin{bmatrix} u_t \\ (\rho_t \otimes x_t) \\ (\rho_t \otimes u_t) \end{bmatrix}$$

[0048]

[0049] 아래에 더 상세히 논의된 것처럼, 위의 수학식들은 상태들 x_t 와 입력들 u_t 이 시간 변화 스케줄링 파리미터 ρ_t 에 의해 증가될 수 있는 $f_t = [(\rho_t \otimes x_t); (\rho_t \otimes u_t)]$ 의 비선형 피드백을 가진 선형 시불변(LTI) 시스템으로 해석될 수 있다. 상기 피드백 f_t 입력들은 상기 LTI 시스템에서의 실제 입력들로 간주될 수 있다. 아래에서 더 자세히 나와 있듯이, LPV 시스템 서술의 행렬들 $[A_\rho B_\rho; C_\rho D_\rho]$ 은 상기 LPV 시스템의 상기 LTI 피드백 표현을 묘사하는 적절한 수량(quantities)들이 될 수 있다.

[0050] 게다가, 위의 수학식들은 아래에 도시된 것과 같이 수학식 15 및 16으로 묘사될 수 있다.

수학식 17

[0051] $$x_{t+1} = \tilde{A}x_t + \tilde{B}\tilde{u}_t$$

수학식 18

[0052] $$y_t = \tilde{C}x_t + \tilde{D}\tilde{u}_t$$

[0053] 그러므로, 출력들 $\tilde{y}_t = y_t$과 입력들 $\tilde{u}_t = [u_t^T(\rho_t \otimes x_t)^T(\rho_t \otimes u_t)^T]^T$의 측정을 위해서, 상기 시불변 행렬들은 각각 $(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D}) = (A_0,[B_0,A_\rho,B_\rho],C_0,[B_0,C_\rho,D_\rho])$일 수 있다. 또한, $\rho_t \otimes x_t$의 x_t가 알거나 측정된 수량이 아닐 경우에, x_t의 사전 추정값은 활용되거나 이용될 수 있으며, 반복들이 x_t의 더 정확하거나 원하는 추정값을 얻기 위해 사용될 수 있다.

[0054] 좀더 예시적 실시예들에서, LPV 시스템은 공지된 파리미터 변화 함수들 ρ_t를 포함할 수 있는 비선형 내적 피드백(nonlinear internal feedback)을 가진 시불변 시스템으로 표현될 수 있다. (비선형 시스템 식별의 2.1절; 상태-공간 접근법, 빈센트 버덜트(Vincent Verdult), 2002, 학위 논문, 트웬테 대학교, 네델란드, 상기 내용들이 전체의 참조에 의해 통합됨). 예시적 실시예에서, 랭크 r_i의 시스템 행렬들 P_i은, 수학식 19에 도시된 것처럼, 특이값분해(singular value decomposition)를 이용해 $1 \le i \le s$를 가진 각 i에 대해 인수분해 될 수도 있다.

수학식 19

[0055] $$P_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{f,i} \\ D_{f,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{z,i} D_{z,i} \end{bmatrix}$$

[0056] 그 다음에 상기 수량은 다음의 수학식 20 내지 23을 통해 도시된 대로 정의될 수 있다.

수학식 20

[0057] $$B_f = \lfloor B_{f,1} B_{f,2} \cdots B_{f,s} \rfloor$$

수학식 21

[0058] $$D_f = \lfloor D_{f,1} D_{f,2} \cdots D_{f,s} \rfloor$$

수학식 22

[0059] $$C_z^T = \left[C_{z,1}^T C_{z,2}^T \cdots C_{z,s}^T\right]$$

수학식 23

[0060] $$D_z^T = \left[D_{z,1}^T D_{z,2}^T \cdots D_{z,s}^T\right]$$

[0061] 다음에, LTI 시스템 $P_0=[A_0B_0;C_0D_0]$ 에서 내부 피드백은 출력 $z_t+C_zx_t+D_zu_t$ 들로 고려되고, 입력 행렬들 B_f 및 D_f 를 통해 LTI 시스템 P_0 상태 수학식들이 들어가는 z_t 로부터 $f_t = \rho_t \otimes z_t$ 까지 비선형 피드백으로 고려될 수 있다. 피드백 시스템의 x_{t+1} 와 y_t 에 대한 상태 수학식은 아래의 수학식 24 내지 27에 도시될 수 있다.

수학식 24

[0062] $$x_t = A_0x_t + B_ou_t + B_ff_t$$

수학식 25

[0063] $$y_t = C_0x_t + D_ou_t + D_ff_t$$

수학식 26

[0064] $$z_t = C_zx_t + D_zu_t$$

수학식 27

[0065] $$f_t = \left[p_t \otimes z_t\right]$$

[0066] 상기와 관련하여 예시적 도 4를 참조하면, 도 4와 수학식 26에 도시된 피드백 구조로서 출력 z_t 상에 어떤 시간 t에 대해서 피드백 f_t의 효과가 없다고 가정할 수 있다면, 그 다음에 선형 분수 변환(linear fractional transformation, LFT) 서술에서 파라미터 의존성이 없다(케이.조우(K.Zhou), 제이.도일(J. Doyle) 및, 케이.글로버(K. Glover) (1996), 강한 최적 제어, 프렌티스-홀, 주식회사, 10.2절, 상기 내용들이 전체의 참조에 의해 통합됨). 도 4에 도시된 대로, 무기억 비선형 피드백 시스템(memory-less nonlinear feedback system)일 수 있는 박스 404 및 선형 시불변 시스템일 수 있는 박스 402, 두 개의 박스들을 가진 시스템 400 이 있을 수 있다. 그러므로, 몇몇 예시적 실시예들에서, 상기 파라미터 의존성은 아핀(affine)이 될 수 있다.

[0067] 예시적 도 4는 수학식들 15 및 16의 계통도(schematic diagram)일 수 있다. 상기 상태 수학식 15는 402에서 상위 박스들을 포함하는 반면 상기 측정 수학식 16은 402에서 하위 박스들을 포함한다. ΔT 422는 422에 들어가는 444에서 수학식 15의 오른쪽과 출발시에 상태 x_{t+1} 와 동일한 왼쪽을 가진 표본 주기(sample duration)의 시간지연이다. 이것은 수학식 14 및 15와 비슷한 점화식(recursion formula)이기 때문에, 시간 인덱스는 다음 반복의 상기 시작 전의 수치에 대해서 t에서 t+1로 달라지고, 박스들 420, 430 및, 410에 들어갈 때까지 연속적일 수 있다. 스케줄링 파라미터들 ρ_t, 406, 입력들 u_t 408 및 출력들 y_t 446은 변수들이다. 상위 4개 박스들은 각각 B_0 418, A_0 420, B_ρ 414, A_ρ 416에 의해 왼쪽에서 오른쪽으로의 곱셈이다. 비슷하게, 하위 박스들은 D_ρ 424, C_ρ 426, D_0 428 및 C_0 430으로 묘사된, C로 대체된 A 및 D로 대체된 B의 곱셈이다. 피드백 박스 404에서, p 와, 연속적으로 x_t 및 u_t를 포함하는 크로네커 곱들은 각각 410과 412에서 형성된다. 수직으로 배열된 박스들의 짝은 변수들 x_t, u_t $\rho_t \otimes x_t$ 및, $\rho_t \otimes u_t$ 을 왼쪽에서 오른쪽으로 곱한다. 게다가, 와이어를 만지는 것처럼 도시된 화살표들은 덧셈을 의미할 수 있다. 더욱이, ΔT 422는 본 예시적 실시예에 대한 데이터 라인과 비슷하게 동작할 수 있는 기간 ΔT의 시간지연 블록을 나타낼 수 있다. 그러므로, 예시적 도 4에서 화살표들은 시간 흐름 또는 동작의 실제 시퀀스를 기리키며, 상기 흐름은 406, 408 및 422의 출력에서 시작하고, 다이어그램을 통해 진행될 수 있다. ΔT 422에 도달되면, 샘플 t에 대한 모든 동작이 수행되었으며, ΔT 422을 통해 횡단 시, 샘플 시간 t+1이 시작될 수 있다. 그러므로, 예를 들어, ΔT 422을 떠날 시, 같은 수량이 유지되지만, 모든 시간 라벨들은 예시적인 도 4에 도시된 과정 동안에 t+1으로 변경될 수 있다.

[0068] 더욱이, 아래 도시된 대로, 이것은 상태 수학식들이 스케줄링 파라미터 벡터 ρ에서 선형일 수 있는 수학식들 15 및 16에 도시된 LPV 형태와 상응할 수 있다.

[0069] 추가의 예시적 실시예들과 수학식들 26 및 27에 주어진 것과 같은, $f_t = \rho_t \otimes z$ 로 정의된 피드백 정의의 사용에서, x_{t+1} 및 y_t의 상태 수학식들은 아래의 수학식들 28 및 29에 도시된 것일 수 있다.

수학식 28

[0070]
$$x_{t+1} = A_0 x_t + B_0 u_t + \sum_{i=1}^{s} B_{f,i} \rho_t(i) C_{z,i} x_t + \sum_{i=1}^{s} B_{f,i} \rho_t(i) D_{z,i} u_k$$

수학식 29

[0071]
$$y_t = C_0 x_t + D_0 u_t + \sum_{i=1}^{s} D_{f,i} \rho_t(i) C_{z,i} x_t + \sum_{i=1}^{s} D_{f,i} \rho_t(i) D_{z,i} u_k$$

[0072] 그 다음에, 수학식 19가 위의 인수들을 정의하는데 사용된다면, 수학식 28 및 29는 수학식 15 및 16과 동일할 수 있다.

[0073] 다음에, 추가의 예시적 실시예에서, P_i 의 랭크를 알 수 없으므로, 출력들 z_t 는 $f_t = [(\rho_t \otimes x_t); (\rho_t \otimes u_t)]$ 하도록 나중에 상태 비선형성(static nonlinearity)을 통해 피드백될 수 있는 상태들 및 입력들 $z_t[x_t^T; u_t^T]^T$ 로 설정될 수 있다. 그 다음에

$[C_{z,i}\ D_{z,i}]=[I_{\dim x}0;0\ I_{\dim u}]$와 수학식 30 및 31은 아래와 같이 설정될 수 있다.

수학식 30

[0074]
$$P_i=\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{f,i}\\ D_{f,i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{z,i}D_{z,i}\end{bmatrix}$$

수학식 31

[0075]
$$=\begin{bmatrix}B_{f,i}\\ D_{f,i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{\dim x} & 0\\ 0 & I_{\dim u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{f,i}\\ D_{f,i}\end{bmatrix}$$

[0076] 그러므로, 위에서, 상기 LPV 계수 행렬 $P_i=[A_iB_i;C_iD_i]$는 비선형 항들 $[\rho_{i,t}x_t;\rho_{i,t}u_t]$의 벡터 상에 왼쪽 상태 수학식 변수들 $(x_{t+1};y_t)$의 회귀 행렬(regression matrix)이 될 수 있다. 보다 일반적으로, 상기 LPV 계수 행렬 $P_\rho=[A_\rho B_\rho;C_\rho D_\rho]=[B_\rho;D_\rho]$은 비선형 피드백 항들 $(\rho_t\otimes x_t;\rho_t\otimes u_t)$의 벡터 상에 왼쪽 상태 수학식 변수들$(x_{t+1};y_t)$의 회귀 행렬이 될 수 있다.

[0077] 상기 LTI 비선형 피드백 표현은 LPV 시스템들의 식별에 기존 부분공간 식별 알고리즘들을 적용하기 위해 주요한 장벽들을 해결할 수 있으며, 다른 방법들에 사용되어 비선형 항들의 수가 기하급수적으로 증가하는 이전의 문제들을 극복할 수 있다. 예를 들어, 위의 LTI 비선형 피드백 표현은 비선형 항들 $(\rho_t\otimes x_t;\rho_t\otimes u_t)$이 LTI 비선형 피드백 시스템에 입력들로서 해석될 수 있음을 분명하게 만들 수 있다. 그러므로, 입력들과 피드백을 가진 프로세스들을 정확히 할 수 있는 선형 부분공간 방법들을 이용해 상기 LTI 시스템 상태 공간 수학식들의 상기 행렬들을 직접적으로 추정하는 것이 가능할 수 있다. 이것은 LTI 비선형 피드백 시스템의 증가된 입력들 $[u_t;(\rho_t\otimes x_t;\rho_t\otimes u_t)]$ 뿐만 아니라 출력 y_t의 사용도 직접적으로 포함할 수 있다.

[0078] 또 다른 예시적 실시예에서, LTI 시스템 행렬들 및 상태 벡터들은 알려진 스케줄링 함수들과 LTI 서브시스템의 상태를 포함하는 비선형 피드백 시스템의 LTI 서브시스템의 감소에 따라 결정될 수 있다. 본 실시예는 LTI 시스템을 설명하는 LTI 상태 공간 행렬들뿐만 아니라 LTI 시스템 상태의 둘 다의 반복 결정을 포함할 수 있다.

[0079] 한 예는 추가의 입력들이 $\rho_t\otimes x_t$와 $\rho_t\otimes u_t$ 이도록, 고차 곱 항에서 추가적인 가산 입력 항들을 가진 x 및 u에서의 선형 시스템으로 다항식 시스템을 고려할 수 있다. 스케줄링 변수들 p_t는 동작 포인트들 또는 측정된 변수들로서 실시간으로 이용할 수 있도록 추정된다. 상태 x_t의 정확한 추정값을 이용할 수 있으면, 다음 문제는 단지 시스템 식별을 위한 반복 알고리즘의 직접적인 응용프로그램일 수 있다. 변수들 x_t는 시스템 식별의 해결 이후까지 사용할 수는 없기 때문에, 다른 접근법이 활용될 수 있다.

[0080] 따라서, 예시적 첫 단계에서, 상태 벡터의 초기 추정값이 만들어 질 수 있다. 여기에, 시스템 식별은 변수 $\rho_t\otimes x_t$가 아닌 변수들 x_t, u_t 및 $\rho_t\otimes u_t$을 포함하는 상태 수학식들의 항들 상에서 수행될 수도 있

다. 상태 벡터들 $X_{1,N}[1]=[x_t^T x_2^T \ . \ . \ . \ x_N^T]^T$ 에 대한 추정값뿐만 아니라 A_0 B_0, C_0 D_0, B_ρ 및, D_ρ의 추정값을 제공하는 시스템의 선형 시불변 (LTI) 부분의 근사치가 얻어질 수 있다.

[0081] 그 다음에, 예시적 두 번째 단계에서, 상태 벡터들의 반복 추정값이 만들어 질 수 있다. 상기 상태 벡터 $X_{1,N}^{[1]}$는 수학식 15 및 16에서 항들 $\rho_t \otimes x_t$의 x_t에 대한 초기 추정값으로 사용될 수 있다. 그 다음에 반복 알고리즘은 시스템 행렬들 A, B, C 및 D의 추정값과 $X_{1,N}^{[2]}$의 정제된 추정값을 얻기 위해 적용될 수 있다. 또한, 본 단계는 원하는 수렴이 달성 때까지 반복될 수도 있다.

[0082] 그러므로 위의 예시적 단계 1 내지 3은 단지 몇 번의 반복을 사용할 수 있다. 따라서, 예시적 방법에서, 반복 알고리즘이 LPV 시스템 식별의 이전에 알려진 문제를 다루는데 사용할 수 있다. 그러므로, 다음은 비선형 차분 수학식 함수들 $f(X_t,U_t,V_t)$ 및$h(X_t,U_t,V_t,)$의 부가적 다항식의 계수 F_{ij} 및 H_{ij}를 각각 직접적으로 확인하는 상기 반복 알고리즘 사용의 예시적 의견이다. 이것은 이러한 비선형 시스템을 위한 매우 작고 인색한 파라미터화 (parsimonious parameterization)일 수 있다. 선형 시불변 시스템들을 위해 여기서 묘사된 상기 반복 알고리즘은 계산 요건들에서 매우 보통의 증가와 함께 사용될 수 있다. 또한, 상기 반복 알고리즘의 본 예시적 사용은 부가적 입력으로서 $\rho_t \otimes x_t$와 같은 상태 벡터를 포함하는 상기 상태 수학식들에서 추가적인 비선형 항들을 직접적으로 처리한다. 상태 x_t 가 처음에 알려지지 않을 수 있기 때문에, 이것은 시스템 A_0, B_0, C_0 및 D_0의 선형 시불변(LTI) 부분만으로 시작하는 상태 수열(state sequence)을 추정하기 위한 반복을 용이하게 할 수 있다.

[0083] 수학식 13 및 14에 따른 위의 예시적 논의에서 본 대로, 스케줄링 변수들ρ_t에서 아핀일 수 있는 선형 파라미터 변화 시스템은 부가의 입력 변수들 $\rho_t \otimes x_t$ 및 $\rho_t \otimes u_t$을 포함하는 시불변 형태에서 표현될 수 있다. 이는 x_t 와 u_t를 가진 ρ_t의 비선형 함수를 포함한다. 상기 역학 시스템은 상기 변수들의 이러한 비선형 함수들에서 선형 시불변일 수 있다.

[0084] 더 예시적 실시예에서, 부가적 입력들의 효과는 상기 반복 알고리즘을 통해 추적될 수 있다. 아래에서 서술한 예시적 단계들은 예시적 도 5에 도시된 테이블 및 예시적 도 6의 플로우 차트에서 반영될 수 있다.

[0085] 예시적 도 5의 구성요소 502 및 예시적 도 6의 단계 605를 이용하여, ARX 모델은 출력 y_t 및 입력들 $[u_t^T (\rho_t \otimes \hat{x}_t^{[k-1]})^T (\rho_t \otimes u_t)^T]^T$ 을 가진 반복 k 상에 관찰이 적절할 수 있으며, 여기서 k=1에 대한 항 $\rho_t \otimes \hat{x}_t^{[k-1]}$ 이 입력들로부터 부재일 수 있고 더욱이 LPV 모델 구조로부터 $(A_\rho C_\rho)$를 포함하는 상기 항을 제거한 것과 등가일 수 있다. ARX 모델 피팅(fitting)은 고려된 상기 최대 ARX 순서 외에 ARX 순서 상에 아무런 사전 추정들이 없도록 만드는 선형 회귀 문제가 있을 수 있다. 확인된 ARX 순서가 고려된 최대 근처에 있다면, 고려된 최대 ARX 순서는 두 배가 되고 상기 회귀(regression)가 재계산(recomputed) 될 수 있다.

[0086] 예시적 단계 604에서, 수정된 미래가 계산될 수 있다. 미래 출력들에 대한 미래 입력들의 효과는 상기 ARX 모델을 이용해 결정될 수 있고 상기 출력들로부터 뺄 수 있다. 이것의 효과는 시간 t의 미래에서 아무런 입력들이 없었다면 시간 t에서 상기 상태로부터 얻어질 수 있는 미래 출력들을 계산하도록 할 수 있다.

[0087] 예시적 단계 606에서, 정준 변량 분석(canonical variate analysis, CVA)이 만들어지거나 계산될 수 있다. 여기에서, 과거와 수정된 미래 사이의 상기 CVA가 계산될 수 있다. 다시, 과거와 수정된 미래 간의 공분산 행렬들 (covariance matrices) 또한 계산될 수 있다. 이것은 ARX 모델을 얻기 위한 과거의 공분산의 순서인 합동 과거-미래 공분산 행렬(joint past-future covariance matrix)에 대한 SVD와 비슷할 수 있다. 이 단계의 결과는 '메

모리'로 불리는 시스템의 상태들의 추정값들을 얻는 것이다.

[0088] 예시적 단계 608에서, 상기 상태 수학식을 이용한 회귀가 수행될 수 있다. 단계 606으로부터 상기 '메모리'는 마치 데이터인 것처럼 상기 상태 수학식들에서 사용될 수 있고, 상태 공간 매트릭스들 및 노이즈 프로세스의 공분산 매트릭스들의 결과 추정값들이 획득될 수 있다. 이러한 추정값들은 ARX 또는 SS 모델의 파라미터 값에서 사전 추정들 없이 상기 상태 공간 모델의 ML 추정값들이 점근적으로 될 수 있다.

[0089] 따라서, 위에서 묘사된 방법론을 이용하여, 상기 반복 알고리즘에서 상기 ML 솔루션은, 예시적 도 5의 504에서 도시된 대로, 추정된 파라미터 값들 상에 반복 없이, 반복 k에서 추정된 출력들 및 입력들을 기반으로 한 하나의 계산에서 얻을 수 있다. 상기 반복은 반복 k에서 상기 추정된 데이터의 부분일 수 있는 상기 비선형 항 $(\rho_t \otimes \hat{x}_t^{[k-1]})^T$에서 상기 상태 추정 개선의 결과이다(504).

[0090] 602 단계를 참조하면, 상기 ARX 모델 피팅, 증가된 출력들의 상기 차원은 dim*u*에서 dim*ua* = dim*u* + dim*p* (dim*x* + dim*u*)로 증가된다. ARX 모델에 맞도록 하려면, 식별된 ARX 순서 *lagp*는 상기 비선형 입력 항들 때문에 대체로 더 높고, 출력 및 증가된 입력 변수들 중에 있는 통계적으로 중요한 역학에 의존할 수 있다. 상기 계산은 *lag*가 상기 고려된 최대 ARX 순서인 상기 dim*ua* * *lagp*의 차원인 상기 데이터 공분산 행렬 상에서 SVD의 계산을 포함할 수 있다. 상기 SVD를 위해 활용될 수 있는 상기 계산은 60*(dim*ua**lagp*)^{3}의 순서이므로, 상기 계산이 (dim*p*(dim*x*+dim*u*)/dim*u*)^{3}에 비례하여 증가한다.

[0091] 그러므로, 상기 비선형 항들 $\rho_t \otimes x_t$ 및 $\rho_t \otimes u_t$에 의해 증대하는 상기 시스템 입력들의 결과는 인수 dim*p*(dim*x* + dim*u*)/dim*u*에 의해 상기 과거를 증가시킬 수 있으며, 이 세제곱된(cubed) 인수에 의해 상기 계산을 증가시킬 수 있다. u_t, x_t, 그리고 ρ_t의 특정한 차원들에 따라, 이것은 매우 중요할 수 있지만, 항들의 수 또는 계산 시간에서 기하 급수적인 증가가 없다. 본 발명의 상기 LPV 부분공간 알고리즘은 선형 시불변 시스템의 부분공간 시스템 식별과 더욱 더 일치하며, 게다가, 상태 추정값들 X_t을 포함하는 상기 항들 $[u_t^T (\rho_t \otimes x_t)^T (\rho_t \otimes u_t)^T]^T$의 비선형성 때문에, 수렴될 때까지 상기 시스템 상태들의 추정값 상에 반복이 요구되거나, 몇몇 다른 대안들에서, 요구될 수 있다.

[0092] 고려해야 할 또 다른 요인은 예시적 단계 606에서 CVA의 결과가 상태 시퀀스 x_t의, m_t로 표시된, 추정값의 계산이라는 것이다. 심볼 'm'은 상기 실제 상태 벡터 및 아래에서 논의된 EM알고리즘에서 사용된 상기 상태 벡터의 다양한 추정값들로부터 구분하기 위한 단어 '메모리'와 같이 사용된다. 상기 EM 알고리즘의 상기 극대화 단계를 조합한 상기 추정값 $\hat{m}_t$은 선형 시불변 시스템의 경우에 대한 시스템 식별 문제의 최대 가능도 솔루션으로 도시될 수 있다. 그 경우에, 상기 글로벌 ML 솔루션은 알고리즘의 오직 하나의 반복에서 얻을 수 있다. 이것은 거의 항상 많은 반복들을 활용하는 EM 및 그라디언트 검색 방법들(gradient search methods)과 다를 수 있다. 상기 CVA 추정값 m_t은 실제로 LTI 시스템들과 대규모 샘플 크기의 경우에 최대 가능도 추정값들과 동일한 파라미터들을 가진 상기 시스템에 대한 상기 상태 시퀀스의 추정값일 수 있다. 이것은 상기 ML 파라미터 추정값을 먼저 얻고 그 다음에 칼만 필터를 이용해 상기 상태들을 추정하는 보통의 개념과는 다르다. 단 하나의 반복에서 얻어진 상기 ML 파라미터들에 대한 상기 최적의 상태 시퀀스 뿐만 아니라, 상기 최적의 상태 순서 또한 상기 프로세스에서 결정된다. 상기 보통의 ML 접근법에서는, 상태 순서 각각의 선택에 대한 상기 ML 추정값들을 취득하고 그 다음에 상기 최적의 상태 순서를 결정하기 위한 가설 테스트(hypothesis testin)를 진행하길 바라거나, 몇몇 대안들에서, 요구될 수 있다.

[0093] 또 다른 예시적 실시예에서, LPV에 대한 상기 반복 알고리즘의 상기 수렴이 설명될 수 있다. 본 실시예에서, 대체로 비슷한 접근법은 비선형 차분 수학식들의 다른 형태들을 위해서 취급될 수 있다.

[0094] 어떤 반복 알고리즘에 대해서, (1) 상기 알고리즘이 항상 수렴하며, (2) 어떤 속도로 수렴하는가;의 두 가지 문제가 전형적으로 발생할 수 있다. 고려된 상기 계산 예제들에서, 추정된 상태값들 $\hat{x}_t^{[k]}$ 상에 상기 반복

k는, 예를 들어 대여섯 단계들에 대해서, 매우 빠를 수 있다. 그러므로, 상기 LPV 시스템 안정성에 대한 가정하에, 상기 반복 알고리즘은 항상 수렴으로 도시될 수 있는 EM 알고리즘들의 상기 종류와 밀접하게 관련될 수 있다. 또한, 수렴의 속도는 기하학적으로 계산될 수 있다. 상기 EM 알고리즘이 전형적으로 빠른 초기 발전을 만들지만 결국 아주 느려지기 때문에 이 뒤의 결과는 특별하다. 상기 LPV 알고리즘의 상기 빠른 터미널 수렴을 위한 이유가 더 자세하게 논의된다. 초기화, 안정성 및 수렴의 문제들은 아래에서 더 자세히 상술하겠다.

[0095] 게다가, 여기에서 설명한 방법들과 시스템들은 둘 사이에 몇 가지 유사점이 있을 수 있으므로 상기 EM 알고리즘의 맥락에서 논의될 수 있다. 상기 LPV 알고리즘의 상기 수렴을 보여주기 위해서, 아래에 GN으로 표시되고 전체의 참조에 의해 통합된(에스. 깁슨 및 비. 니네스(Ninness), "다변수계(multivariable) 역학 시스템의 강한(Robust) 최대 가능도 추정," 오코매티카(Automatica), vol. 41, no. 5, pp. 1667-1682, 2005), 깁슨과 니네스(2005)의 상기 개발에서는, 상기 LPV 알고리즘을 적절하게 만드는 다양한 변경들이 논의될 것이다. 깁슨과 니네스 (2005)로부터의 모든 수학식 번호들은, 예를 들어 (23GN), 페이퍼 GN의 상기 번호에 따른 GN을 포함할 것이다.

[0096] 본 예시적 실시예에서, 상기 LPV 알고리즘을 얻기 위한 상기 GN 논의에서 만들 수 있는 대체들은 다음과 같이: 상기 LTI 상태 수학식들을 상기 LPV 상태 수학식들로 교체하고, 누락된 데이터에 대해서, 상기 반복 알고리즘에서 '메모리' 벡터 m_t 를 가진 칼만 스무더(smoother)로부터 상기 상태 추정값을 교체하는 것이다. 이것의 결과는 여기서 묘사된 상기 반복 알고리즘 GN에서와 같은 선형 시스템들이 큰 샘플들의 한 단계에서 상기 글로벌 ML 파라미터 추정값들을 얻을 수 있기 때문에 중요할 수 있다. 반면에, 선형 시스템들에 대해 상기 ML 솔루션을 얻기 위한 많은 반복들을 상기 EM 알고리즘이 취할 수 있다.

[0097] LTI 모델을 LPV 모델로 대체하는 것은 LPV 수학식들 (15) 및 (16)에 의해 상기 상태 공간 모델 수학식 11GN을 교체한다. GN에서 u_t와 (A, B, C, D) 가 각각 $[u_t^T(\rho_t \otimes x_t)^T(\rho_t \otimes u_t)^T]^T$ 및 $(A_0,[B_0 A_\rho B_\rho],C_0,[B_0 C_\rho D_\rho])$에 의해서 교체되었기 때문에, 이것은 레마(Lemma) 3.1의 수학식들에서 다수의 변경들을 생산할 수 있다. 그래서 상기 '데이터'는 상기 상태 벡터 x_t 가 이용할 수 없는 상기 벡터 $\rho_t \otimes x_t$를 포함한다.

[0098] 예시적 도 5의 504에서 도시된 바와 같이 반복 K를 실행하기 위해서, 상기 EM 알고리즘을 포함하는 직진형 접근법(straight forward approach)이 사용될 수 있다. 상기 '누락된 데이터'는 상기 누락된 데이터로서 상태 벡터 x_t를 포함한다. (S. 깁슨, A. 윌스(Wills), 및 B. 니네스 (2005), "이선형 시스템들의 최대 가능도 파라미터 추정", IEEE Trans. 자동 제어, Vol. 50, No. 10, pp. 1581-2005, 상기 내용들이 전체의 참조에 의해 통합됨). 그 다음에 상기 LPV 알고리즘에 대한 $\rho_t \otimes x_t$에 완전히 유사하게 될 수 있는 항 $u_t \otimes x_t$를 포함하는 이선형 시스템의 경우로 진행할 수 있다. 그러나 이러한 EM 접근법은, 가끔, 최대 근처에 EM 알고리즘들의 전형적인 늦은 수렴 행동을 야기한다.

[0099] 그러므로, 대신에 상기 LPV 알고리즘이 사용될 수 있고 빠른 수렴을 야기할 수 있다. 따라서, 본 예시적 실시예에서, 상기 칼만 스무더의 상기 추정값 대로 '누락된 데이터'를 명시하는 대신에, 상기 누락된 데이터로서, 상기 부분공간 접근법이 상기 CVA 상태 추정값 m_t 또는 '메모리'를 명시할 수 있다. 상기 메모리 m_t 는 도 5에 지정된 입력과 출력 벡터들을 이용한 상기 반복 알고리즘의 예시적 단계 606에서 획득된 상기 보정된 미래와 상기 과거 사이에서 정준변량분석(canonical variate analysis)에 의해 획득된 상기 상태 벡터의 상기 추정값이다. 이것은 마지막 추정된 파라미터 값에서 칼만 스무더 상태 추정값 보다는 반복 k 에서 출력 및 입력 데이터와 관련된 상기 글로벌 ML 파라미터 추정값들에서의 칼만 필터 상태 추정값과 비슷할 수 있다. 상기 CVA 방법이 상기 과거를 조건으로 한 상기 보정된 미래에 관하여 상기 가능도 함수를 표현하기 때문에 하나의 차이점이 발생할 수 있으며, 메모리 m_t 의 추정값들이 단지 상기 출력 및 입력 데이터 상에 의존할 수 있고, 그들의 분배가 상기 상태의 부드러운 추정값들 보다는 반복 k에서 사용된 상기 출력 및 입력 데이터에 관련된 상기 ML 추정값들에

의존한다. $\xi_t^T=[x_{t+1}^T y_t^T]$ 및 $z_t^T=[x_t^T u_t^T]$를 가진 (26GN)의 실제 조건부 가능도 함수 $p_0(\xi_t/z_t)$는 모든 EM 계산들에서 포함될 수 있는 것이다. 이것은 GN의 레마3.3에서와 같이 상태 공간 수학식의 파라미터들을 추정하는 상기 CVA 알고리즘의 예시적 단계 608에 포함된 동일한 가능도 함수가 될 수 있다. 상기 CVA 알고리즘의 예시적 단계 608에서 기대(expectation)는 반복 k에서 상기 출력 및 입력 데이터와 연관된 진정한 글로벌 ML 추정값들과 관련이 있을 수 있음에 반하여 상기 GN 추정값은 이전 반복에서 얻어진 파라미터 값과 관련한 기대(expectation)라는 차이가 있다.

[0100] 게다가, 상기 알고리즘의 기대 단계에서 누락된 데이터로서 상기 LPV 모델의 사용 및 메모리 m_t의 선택은 GN에서 다음과 같은 결과를 가질 수 있다. 섹션 2에서 기본적인 이론, GN의 상기 기대-극대화 (EM) 알고리즘은, 변경이 필요 없다. GN의 섹션 3에서, 상기 누락된 데이터는 도 5의 504에서 반복 k에 대한 입력 및 출력 수량들을 기반으로 한 CVA 상태 추정값들 $\hat{m}_t^{[k]}$로 취해질 수 있다. 그래서, 수학식들 22GN) 내지 (28GN)에서 x_t는 $\hat{m}_t^{[k]}$에 의해 대체될 수 있다.

[0101] 따라서, GN의 레만 3.1은 한 단계에서 예시적 도 5의 입-출력 벡터들과 관련된 상기 글로벌 ML 추정값을 보유할 뿐만 아니라 얻을 수 있다. GN의 레마 3.2는 메모리 추정값들 $\hat{m}_t^{[k]}$을 얻기 위해 상기 반복 알고리즘에 의해 교체될 수 있다. GN의 레마 3.3은 상기 반복 알고리즘에서 얻어진 것과 같은 동일한 결과이다. 추가적인 단계는 상기 LPV 상태 추정 수학식들에 의해 주어진 추정값 $\Theta^{[k]}$ 및 선형 시간 변화 상태 수학식들로부터 $\hat{x}_t^{[k]}$를 계산하기 위해 사용될 수 있다. 본 단계는 다음 반복 K1을 시작하기 위해 상기 상태 추정값 $\hat{x}_t^{[k]}$을 얻는 것을 원하는 경우가 있다. 본 단계는 $\hat{x}_t^{[k]}=\hat{x}_t^{[k+1]}$ 해야만 균등한 $Q(\theta,\theta')\geq Q(\theta',\theta')$를 생산하도록 상기 반복 알고리즘을 허용할 수 있다.

[0102] 그 다음에, 원칙적으로, 메모리 $\hat{m}_t^{[k]}$가 상태 추정값 $\hat{x}_t^{[k]}$를 대신해서 사용될 수 있다. 사실, 수학식들 (43GN) 및 (44GN) 에서 상태 수학식들의 반복된 구조 상에 예상된] $\hat{m}_t^{[k]}$는 ML 상태 추정값들 및 대응되는 최적의 여과된 상태 추정값들 $\hat{x}_t^{[k]}$을 점근적으로 생산할 수 있다. 그러므로, '입력 데이터'의 부분으로서 $\rho_t \otimes \hat{x}_t^{[k]}$의 계산에 $\hat{x}_t^{[k]}$ 대신에 $\hat{m}_t^{[k]}$의 사용은 상기 결과들에서 어떤 '노이즈'를 제외한 동일한 결과를 기본적으로 이끌 수 있다. 그러나 상기 계산 노이즈는 $\hat{x}_t^{[k]}$의 작은 추가적인 계산에 의해 피할 수 있다.

[0103] 또한, 몇몇 예시적 실시예들에서, 주로 단수 값 분해 계산들(singular value decomposition computations)을 사용하여 개발되었고 10 년 이상 동안 이와 같이 입증되었기 때문에 여기에 설명된 반복 알고리즘에 대해 '강한' 개선의 필요가 없을 수도 있다. 악성인(ill-conditioned) LPV 역학 시스템들이 높은 정밀도에서 해결될 수 있다면, 비어만(Bierman) (G. J. 비어만, 이산 순차적 평가를 위한 인수분해 방법들, 아카데미 프레스 (1977); 도버(Dover), N.Y. (2006)에 의해 재판된, 전체 참조에 의해 통합되는 내용들)의 제곱근 방법들을 이용

하여 시행될 수 있는 상기 여과된 상태 추정값 $\hat{x}_t^{[k]}$ 의 상기 계산을 기대할 수 있다.

[0104] 여전히 또 다른 예시적 실시예에서는, 상기 LPV 시스템 식별 알고리즘이 최대 가능성 솔루션 근처의 기하 급수(geometric rate)에서 수렴할 수도 있음을 입증될 수 있다. 여기에서 선형 시스템의 결과가 개발될 수 있다. 동일한 접근법은 LPV 시스템에 대해서 작동하지만, 아래의 표현들은 시간 의존이 될 수 있고 더 복잡할 수 있다.

[0105] 게다가, 유도(derivation)를 단순화하기 위해서, 수학식 17 및 18로부터 상기 시불변 피드백은 $(A,B,C,D,u_t,\tilde{u}_t)$ 에 의한 표기법 $(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D},\tilde{u}_t,u_t)$ 의 대입이 고려될 수 있다. 따라서, 혁신 형태의 노이즈 v_t를 가진, 수학식 17 및 수학식 18은 아래의 수학식 32 및 33으로 쓰여질 수 있다.

수학식 32

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Kv_t$$

[0106]

수학식 33

$$y_t = Cx_t + Du_t + v_t$$

[0107]

[0108] 따라서, 위에서, 출력들 y_t 및 입력들 $u_t = [\tilde{u}_t^T (\rho_t \otimes x_t)^T (\rho_t \otimes \tilde{u}_u)^T]^T$ 의 측정이 보여질 수 있고, 상기 시불변 행렬들은 각각 $(A,B,C,D)=(A_0,[B_0 A_\rho B_\rho],C_0,[B_0 C_\rho D_\rho])$ 이다. 그 다음에, 수학식 33에 v_t에 대한 해결과 수학식 32에 대체하는 것은 아래의 수학식 34를 생산한다.

수학식 34

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + K(y_t - Cx_t + Du_t) = (A-KC)x_t + (B-KD)u_t + Ky_t$$

[0109]

[0110] 다음으로, x_t에 대한 수학식 34 오른쪽을 회귀적으로 대체하는 것을 통해 아래의 수학식 35를 제공할 수 있다.

수학식 35

$$x_t = \sum_{i=1}^{\infty}(A-KC)^{i-1}[(B-KD)u_{t-i} + Ky_{t-i}] = Jp_t(y_t,[\tilde{u}_t(\rho_t \otimes x_t),(\rho_t \otimes \tilde{u}_t)])$$

[0111]

[0112] 수학식 35에서, J는 상기 ARX 계수들을 포함하고, p_t 는 상기 과거 출력 y_t 및 입력 $u_t = [\tilde{u}_t,(\rho_t \otimes x_t),(\rho_t \otimes \tilde{u}_u)]$ 일 수 있다. 여기 $\tilde{u}_t$는 u_t가 상기 비선형 크로

네커 곱 항들을 포함할 수 있는 상기 원래의 입력들일 수 있다.

[0113] 좀 더 예시적 실시예에서, 큰 샘플에 대해 점근적으로, J는

$$\Delta x_t^{[k]} = x_t^{[k+1]} - x_t^{[k]} = Jp_t\left[0,0,\left(\rho_r \otimes \left(x_t^{[k]} - x_t^{[k-1]}\right)\right)0\right] = L\begin{bmatrix} \rho_{t-1} \otimes \Delta x_{t-1}^{[k-1]} \\ \vdots \\ \rho_{t-lag} \otimes \Delta x_{t-lag}^{[k-1]} \end{bmatrix} = L_t\begin{bmatrix} \Delta x_{t-1}^{[k-1]} \\ \vdots \\ \Delta x_{t-lag}^{[k-1]} \end{bmatrix}$$

와 같이 충분이 큰 반복 k에 대한 상수에 임의로 가깝게 할 수 있고, 여기서, L은, 시간 변화일 수 있고, 항들L과 조합된 상기 시간 변화 스케줄링 파라미터들 ρ_t을 가질 수 있다. 또한, 모든 t에 대해서 ρ_t가 묶에 있다면, L은 비슷하게 묶여질 것이다.

[0114] 이제, *vec* 동작이 맨 위에 왼쪽 열로 시작하는 행렬의 열을 쌓아 수 있는 곳에서, $X_{1:N}^{i}$=vec+$x_{1:N}^{i}$ . . . x_1^{i}+ 로서 블록 벡터 형태에서 상태 시퀀스를 작성할 때, 위의 결과는

$$\begin{bmatrix} \Delta x_N^{[k]} \\ \vdots \\ \Delta x_{t-k}^{[k]} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L_{N-1} & \rightarrow & \rightarrow \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & L_{N-k} & \rightarrow \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_{tN-1}^{[k-1]} \\ \vdots \\ \Delta x_{N-1}^{[k-1]} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

을 암시 수 있으며,

[0115] 여기서, →는 L_{N-k}가 오른쪽으로 확장되는 것을 의미한다. 위의 삼각 행렬을 나타내기 위해 M을 사용하는 것은 아래 수학식 36처럼 성공적인 반복들 k 및 k-1에 상태 시퀀스들 $X^{i}_{lag:N}$ 사이에서 차분 $\triangle X^{i}_{lag:N}$에 대한 기본 표현식을 제공할 수 있다.

수학식 36

[0116]
$$\Delta X^{i}_{lag+2:N} = M\Delta X^{i-1}_{lag+1:N-1}$$

[0117] 수학식 36으로부터, LPV 경우에 반복의 터미널 수렴율은 M, 특히 M의 최대 단수 값에 의해 통제를 받을 수 있음

$$(A-KC)^{i-1}(B-KD)_{\rho\otimes x}\begin{bmatrix} \rho_{N-1}(1)I_{\dim x} \\ \vdots \\ \rho_{N-i}(\dim p)I_{\dim x} \end{bmatrix}$$

을 볼 수 있다. 그러므로, M의 다양한 블록은 에 의해 계산될 수 있으며, 여기서, 상기 첨자 $\rho\otimes x$는 $\tilde{u}_t$에서 $\rho\otimes x$의 해당 행들에 대응되는 열들을 가진 B-KD의 부분행렬을 선택하는 것을 뜻한다.

[0118] 몇몇 또 다른 예시적 실시예들에서, 상기 반복 선형 부분공간 계산의 상기 수렴은 상기 LPV 차분 수학식들의 상기 안정성 및, 더 구체적으로, 여기서 설명된 상기 LPV 선형 부분 공간 시스템 식별의 상기 안정성에 의해 영향을 받을 수 있다. 상기 상태 천이 행렬의 모든 고유값들이 안정적인 경우에만, 예를 들어 상기 고유값이 1보다 적은 경우에만, 시간 불변량 선형 상태 공간 차분 수학식들의 집합이 안정이 될 수 있기 때문이다. 상기 LPV 케이스는 더 복잡하지만, 본 예시적 실시예의 목적을 위해, 샘플 시간당 성장이나 수축의 속도는 수학식 9 및 아래의 수학식 37에 도시된 대로 상기 LPV 상태 천이 행렬의 각 고유값에 의해 상태 벡터 x_t의 각 고유벡터 성분에 대해 제공될 수 있다.

수학식 37

$$A(\rho_t) = A_0 + \sum_{i=1}^{s} \rho_t(i) A_i$$

[0119]

[0120] 수학식 37에서, 상기 행렬들 $A=(A_0\ A_\rho)=(A_0, A_1 \cdots A_s)$ 은 미지의 상수 행렬로 가정될 수 있다. 그러므로, 상기 천이 행렬 $A(\rho_t)$ 이 $0 \le i \le s$ 에 대해 행렬들 A_i 의 선형 조합 $[1; \rho_t]$ 일 수 있다. 그러므로, $0 \le i \le s$ 에 대한 A_i 행렬들의 어떤 선택에 대해서, ρ_t의 값들이 특정 샘플 시간 t에서 불안정한 고유값들을 생산할 가능성이 있다. 이것이 간헐적이거나 및/또는 연속 관찰 시간들의 제한된 수에 대해서 발생하는 경우 또는 발생하는 때는, 아무런 문제가 없거나 오류가 발생하지 않을 수 있다.

[0121] 또 다른 예시적 실시예들에서, 예를 들어, 부분공간 알고리즘의 k-번째 반복 계산에서, 상태 시퀀스 $\hat{x}_t^{[k]}$ 의 추정값들 및 $0 \le i \le s$ 에 대한 상기 행렬들 $\hat{A}_t^{[k]}$ 이 사용될 수 있다. 그러므로, 이러한 수량의 추정값들에서 큰 오류가 가능하거나 허용된다면, 불안정한 행동에 대한 더 큰 가능성이 있을 수 있다. 예를 들어, 더 중요한 응용프로그램 영역일 수 있으며, 이는 흔들림 역학이 날개 제어 표면들의 센서들로부터 활동 제어 피드백에 의해 안정화되는 진동으로 미미하게 안정하거나 한층 더 불안정해 질 수 있는 비행기 날개 흔들림 역학 식별을 포함하는 것과 같다. 그 다음에, 몇몇 다른 응용프로그램들에서, 스케줄링 파라미터들 ρ_t, 행렬 A_i의 값들 및, 불확실성의 어떤 조합이 불안정을 만들 수 있다고 보장할 수 있다. 더 나아가, 상기 천이 행렬의 상기 안정성은 잠재적인 문제들을 제공할 수 있으므로 추가적인 고려가 요구될 수 있다.

[0122] 좀 더 예시적 실시예들에서, 불안정성들은 상기 예측 시스템 응답이 빠르게 매우 커질 수 있는 기간을 생성할 수 있다. 예를 들어, 상기 고유값들이 모든 1미만에 묶여있을 때, 그 다음에 상기 예측 시스템 응답이 묶여질 수 있으며, 반면에 추정 에러들이 커져서, 예를 들어, 상기 고유값 중 하나가 일정 시간 동안 2와 동일하면, 그 다음에 상기 예측 반응이 그 시간 동안에 거의 모든 샘플을 두배로 만들 수 있다. 따라서, $10^{30} = (10^3)^{10} \cong (2^{10})^{10} = 2^{100}$ 라면, 겨우 100개의 샘플들에서, 정밀도의 30자리는 의미없는 결과를 제공하는 상기 계산에서 손실될 수 있다.

[0123] 그러므로, 상기에 대해서, 상기 LPV 천이 행렬이 불안정한, 예를 들어 확장된 시간 간격을 가진, 시기와 관련될 수 있는 수치 정확성의 상당한 손실이 있을 수 있는 아래의 조건이 있을 수 있다. 게다가, 큰 샘플을 가진 최적의 솔루션 이후에서, 상기 알고리즘은 안정적이고 수렴적이기 때문에, 상기 알고리즘 초기화 및 샘플 크기에 상기 어려움이 있을 수 있다. 만약 무한의 정밀도로 계산할 수 있었다면, 불량조건을 가진 문제들은 피할 수 있지만, 15 또는 30 소수자리 정밀도, 예를 들어, 비행기 날개 흔들림과 같은 실시간 데이터 집합은, 추가 고려로부터 이익을 얻을 수 있다.

[0124] 그러므로, 몇몇 예시적 실시예들은 알고리즘 불안정으로 인해 발생할 수 있는 원치 않는 효과를 고치거나 줄이는 방식들을 다룰 수도 있다. 예를 들어, 이전에 설명된 터미널 수렴 결과들을 근거하여 상태 시퀀스 $\hat{x}_t^{[k]}$ 가 충분히 최적에 가깝다면, 상기 LPV 시스템이 안정하다고 가정하에 상기 반복 알고리즘은 안정하게 제공될 수 있다. 그러므로, 몇 가지 예제들에서는, 상기 추정값 $\hat{x}_t[1]$ 에 큰 초기 에러들이 불안정한 계산으로 이어질 수 있다.

[0125] 다른 예제들에서, 상기 스케줄링 파라미터 값들이 $A(\rho_t)$에서 중요한 불안정성을 야기할 때의 시간 간격 동안에서와 같이, $f_t \mid q_t$의 몇몇 요소들, 상기 미래 입력들 q_t의 효과들을 수정한 상기 미래 출력들 f_t은, 꽤 커질 수 있다. 그러므로, $f_t \mid q_t$의 공분산 행렬의 상기 계산에서, 그러한 큰 값들은 상당한 불량조건 및 수치 정밀도에 손실을 야기할 수 있다.

[0126] 예제들에서, 상기 반복 알고리즘 및 몇몇 다른 부분공간 방법들은 불안정한 상태가 발생할 시간들의 임의 편집을 허용하며, 불안정한 지역들의 이상치 편집(outlier editing)이 수행될 수 있다. 예를 들어, 상기 수정된 미래가 계산될 수 있는 상기 ARX 공분산 계산에서, 상당한 불안정성을 가진 상기 시간 간격이 결정되고 상기 계산에서 제거될 수 있다.

[0127] 실험적인 디자인을 다루는 예제들에서, 운영 포인트 변수들의 궤적이 명시될 수 있다면, 그 다음에 상기 스케줄링 파라미터는 여러 가지 방법으로 상기 시스템 식별을 향상하도록 계획될 수 있다. 계산 불안정성을 피할 수 있는 초기 지역은 상기 LPV 파라미터들(A, B, C, D)의 초기 추정값들을 충분히 정확하게 얻도록 선택될 수 있다. 이것은 계산 불안정성들이 발생되지 않도록 충분한 정확도를 가진 상기 알고리즘의 상태 추정값을 초기화하기 위해 다른 지역들에서 사용될 수 있다.

[0128] 위 예제들에서, 각 반복에서 불안정한 이상치의 제거는 가장 일반적이고 강력한 절차가 될 수 있다. 상기 상태 시퀀스 $\hat{x}_t[k]$의 상기 추정된 값들 및 LPV 파라미터들은 더 많은 반복들로 개선되므로, 이상치의 수가 빠른 터미널 수렴까지 감소될 것으로 기대될 수 있다. 본 기대에서 카운터 예제는 스케줄링 파라미터들 ρ_t 시간 히스토리의 시작이 약간 변동을 가질때, 데이터의 이러한 부분에 대한 LPV 모델이 데이터의 그 부분에서는 좋지만, 좋지 못한 글로벌 모델이다. 그 다음에, 상기 시간 히스토리의 나중 부분에서, 불안정한 동작이 발생할 수 있는 ρ_t에서 변동이 고려될 수 있다.

[0129] 게다가, 여기서 설명한 방법과 시스템의 많은 잠재적인 예시적 애플리케이션에서, 상기 제안된 알고리즘이 산업 문제들에서 현재 가능하지 않은 기존의 방법들보다 훨씬 더 잘 수행할 수 있다고 기대될 수 있다. 더 나아가, 많은 상황들에서, 가능한 한 적은 시간과 자원에서 불과한 비용으로 동작 공간의 지정된 글로벌 영역에 대해 원하는 정확도의 결과를 얻을 수 있는 실험을 디자인하길 원할 수 있다. 상기 반복 알고리즘의 선형 부분공간 방법이 절차에 기반한 최대 가능도 이기 때문에, LTI 시스템 식별을 위한 디자인들이 개발될 수 있다. 또한, 역동적 주파수 반응 함수들과 같은 수량들 상에 신뢰 밴드(confidence band)를 포함하는, 추정된 방해 모델들을 가진 추계적 모형(stochastic model)을 식별하는 것으로, 요구된 샘플 크기 및 시스템 입력 기대는 방해 과정들 상에 적은 우선 정보들로 개발될 수 있다.

[0130] 좀 더 예시적 실시예들에서, 여기서 설명한 LPV 방법들과 시스템들은 비선형 시스템으로 확장될 수 있다. 예를 들어, 그것은 다수의 복잡한 비선형 시스템들이 여기서 설명한 LPV 부분공간 시스템 식별 방법들의 애플리케이션에 충분할 수 있는 근사치 LPV 형태에서 표현될 수 있음을 보여줄 수 있다.

[0131] 한 예에서, 일반적인 비선형, 시간 변화, 파라미터 변화 역학 시스템은, 수학식 38 및 39에서 표시된 것과 같은, 비선형 상태 수학식들의 시스템에 의해 설명될 수 있다.

수학식 38

[0132] $$x_{t+1} = f(x_t, u_t, \rho_t, v_t)$$

수학식 39

[0133] $$y_t = h(x_t, u_t, \rho_t, v_t)$$

[0134] 수학식 38 및 39에서, x_t 는 상태 벡터가 될 수 있고, u_t 는 입력 벡터가 될 수 있으며, y_t 는 출력 벡터가 될 수 있으며, v_t 는 백색 잡음 측정 벡터가 될 수 있다. 일부 예시적 실시예들에서, '파라미터 변화' 시스템들의 처리하기 위해, 시간 변화 파라미터들인 '스케줄링' 변수들 ρ_t은 시스템의 상기 현재 동작 포인트를 설명할 수 있다. 함수 $f(\cdot)$와 $h(\cdot)$의 매우 일반적인 분류들은 연속적일 필요가 없는 부가적 보렐(borel) 함수들로 표현될 수 있다.

[0135] 단순화된 방법으로, 테일러(Taylor) 팽창을 허용하는 함수들의 경우, 루(Rugh)에서, 섹션 6.3 (W.J. Rugh, 비선형 시스템 이론: 볼테라(Volterra) / 비너(*Wiene*) 접근법. 볼티모어 Md: 존스 홉킨스 대학교. 프레스, 1981, 전체 참조에 의해 여기서 통합된 내용), ρ_t 와 v_t가 부재일 수 있는 곳에서 수학식 40 및 41에서 도시된 대로, 다음을 제공할 수 있다.

수학식 40

[0136] $$x_{t+1} = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} F_{ij} x_t^{(i)} u_t^{(j)}$$

수학식 41

[0137] $$y_t = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} H_{ij} x_t^{(i)} u_t^{(j)}$$

[0138] 수학식들 39 및 40에서, 상기 표기법 $x_t^{(i)}$는 $x_t^{(i)} = x_t \otimes x_t^{(i-1)}$ 와 비슷하게 $u_t^{(j)}$로서 회귀적으로 정의될 수 있다.

[0139] 그러므로, 수학식들 40 및 41은 비선형 함수들 $f(\cdot)$와 $h(\cdot)$의 다항식 확장들일 수 있다. 상기 비선형 수학식들은 다양한 목적들로 빠르게 계산되는 연산자들의 합을 포함하는 상기 근사치 다항식 수학식들과 같이 비교적 단순한 형태의 비선형 함수들을 포함할 수 있다. 그러나, 자동 보정된 에러들(autocorrelated errors)이 존재하는 상기 계수들의 실정적 추정에 대해, 부분공간 방법들을 이용하는 y, u 및 x의 행 차원에서 차이가 있을 수 있다. 부분공간 방법들에 대해서, 상기 행렬 차원들은 사용될 수 있는 '과거'의 차원과 함께 기하 급수적으로 늘어날 수 있다. 이것은 수학식 40의 왼쪽 상에 x_t를 상태 수학식 40의 오른쪽 상에 $x_t^{[k]}$로 반복 대입을 통한 확장 수학식 40에서 발생할 수 있다. t-1으로 대체되는 t를 가진 수학식 40의 전체 오른쪽은 상기 파워 *lagp* 로 증가될 수 있으므로, 과거의 순서는 상기 추정된 ARX 모델 순서처럼 전형적으로 선택된다. 상대적으로 낮은 순서의 과거 및, x_t와 u_t의 낮은 차원들에서, 부가적 항들의 수는 기하 급수적으로 증가할 수 있다.

[0140] 그러나, 좀 더 예시적 실시예와 다음 Rugh에서 수학식 39 및 40은 칼레만 이선형화(Carleman bilinearization)를 통해 수학식 42에 도시된 대로 상태 변수에서 이선형 (bilinear) 벡터 차분 수학식으로 변환될 수 있고,

그리고 상기 입력 파워 및 제품들는 수학식 43에 도시된 대로 변할 수 있다.

수학식 42

$$x_t^{\otimes} = \left\{x_t^{(1)}; x_t^{(2)}; \cdots x_t^{(J)}\right\}$$

[0141]

수학식 43

$$u_t^{\otimes} = \left\{u_t^{(1)}; u_t^{(2)}; \cdots u_t^{(J)}\right\}$$

[0142]

[0143] 좀 더 예시적 실시예에서, 상기 상태-아핀 형태를 표현하는 수학식 40은 다음 아래 수학식 44 및 45로 재작성될 수 있다.

수학식 44

$$x_t^{\otimes} = A(x_t^{\otimes} \otimes u_t^{\otimes}) + Bu_t^{\otimes}$$

[0144]

수학식 45

$$x_t^{\otimes} = C(x_t^{\otimes} \otimes u_t^{\otimes}) + Du_t^{\otimes}$$

[0145]

[0146] 다음에, 상기 계수 행렬들 (A, B, C, D)이 $(A(\rho_t), B(\rho_t), C(\rho_t), D(\rho_t))$ 및 수학식 9 내지 12에서 상태-아핀 형태로 정의된 스케줄링 파라미터 의 선형 함수일 수 있다. 상기 스케줄링 파리미터 ρ_t는 상기 동작 포인트 또는 다른 알려진 또는 정확하게 측정된 변수의 비선형 함수가 될 수 있다. 예를 들어, 입력 $\boldsymbol{u}_t^{\otimes}$ 이 증가적이고 실시간으로 또는 정확하게 측정되어 알려진 것으로 추정할 수 있으므로, 아마 그들의 차원 감소 때문에, 그들은 스케줄링 파라미터들 ρ_t에 흡수될 수 있다. 상기 이선형 수학식들은 아래의 수학식 46 및 47에 도시된 것과 같이 될 수 있다.

수학식 46

$$x_t^{\otimes} = A(\rho_t)x_t^{\otimes} + B(\rho_t)u_t^{\otimes}$$

[0147]

수학식 47

$$x_t^{\otimes} = C(\rho_t)x_t^{\otimes} + D(\rho_t)u_t^{\otimes}$$

[0148]

[0149] 수학식 46 및 47은 명쾌히 LPV 형태이다. 그러므로, 충분히 부드럽고 변수의 근처에서 잘 정의된 파워 시리즈 확장이 존재할 수 있는 함수들 $f(x, u_u, \rho_t, v_t)$와 $h(x_t, u_u, \rho_t, v_t)$에 대해서, 상기 프로세스의 LPV 근사치가 존재할 수 있다.

[0150] 따라서, 스케줄링 파라미터 ρ_t에 상기 입력 $u_t^{\otimes}$의 흡수를 가진, 상기 수학식들은 선형 시간 변화일 수 있고, 어떤 경우에는, 더 높은 차원 ρ_t를 가질 수 있다. 이것은 입력 및 스케줄링 파라미터의 1인 2역을 보여줄 수 있고, 어떻게 그들이 다양한 방법에서 상호 교환이 될 수 있으며, 예를 들어, 그들의 차이는 시간을 가진 변화율일 수 있음을 보여준다. 스케줄링의 지식은 종종 근본적인 물리, 화학 또는, 다른 기초 정보에서 파생될 수 있다. 상기 프로세스 역학들이 동작 포인트를 가지고 변할 수 있는 상기 모델로 통합할 수 있는 상기 프로세스의 행동에 대한 상당한 글로벌 정보를 통합할 수 있는 그레이박스(graybox) 모델에 한해서는, 가끔, LPV 모델들이 고려될 수 있다.

[0151] 앞서 말한 설명 및 첨부된 그림은 상기 원리들과, 선호하는 실시예들 및 본 발명의 작동 모드를 보여준다. 그러나, 본 발명은 위에 논의된 특정 실시예들에 한정되는 것으로 해석되어서는 안된다. 위에 논의된 살시예들의 부가적 변형들이 당업자에 의해 인정될 수 있다.

[0152] 따라서 위에서 설명한 실시예들은 오히려 제한보다는 분명히 보여주는 것으로 간주되어야 한다. 그런 이유로, 다음의 청구항들에 의해 정의된 대로 본 발명의 범위를 벗어남이 없이 당업자들에 의해 이들 실시예들의 변경들이 만들어질 수 있음을 인정해야 할 것이다.

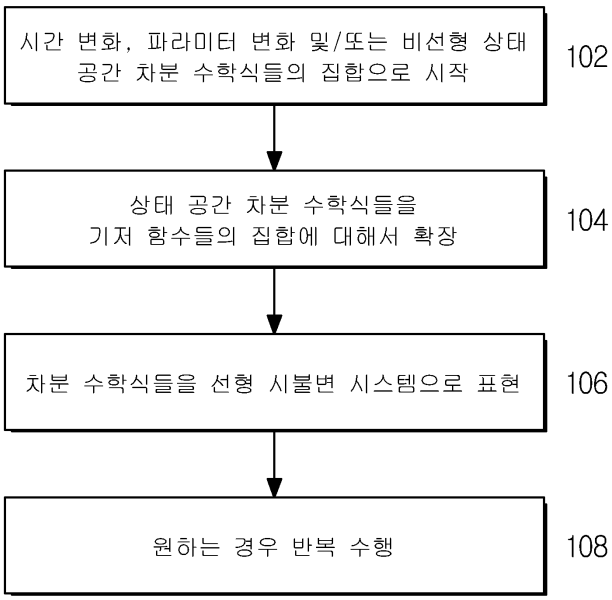
부호의 설명

[0153] 402:선형 시불변 시스템 404: 무기억 비선형 피드백 시스템

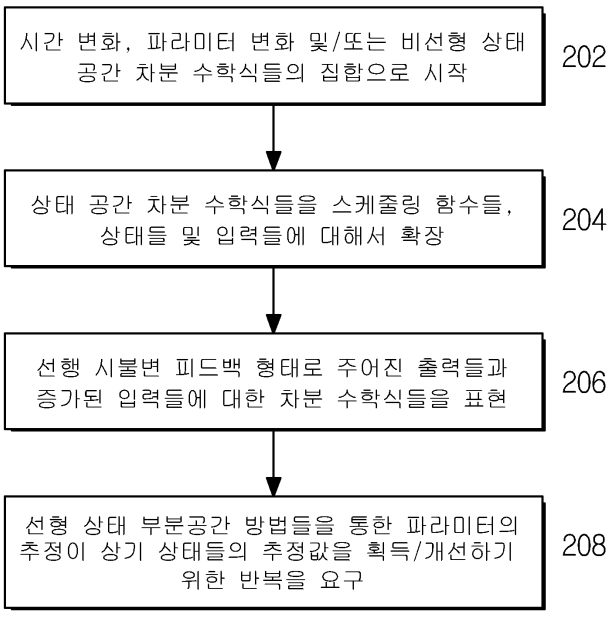
406:스케줄링 파라미터들

도면

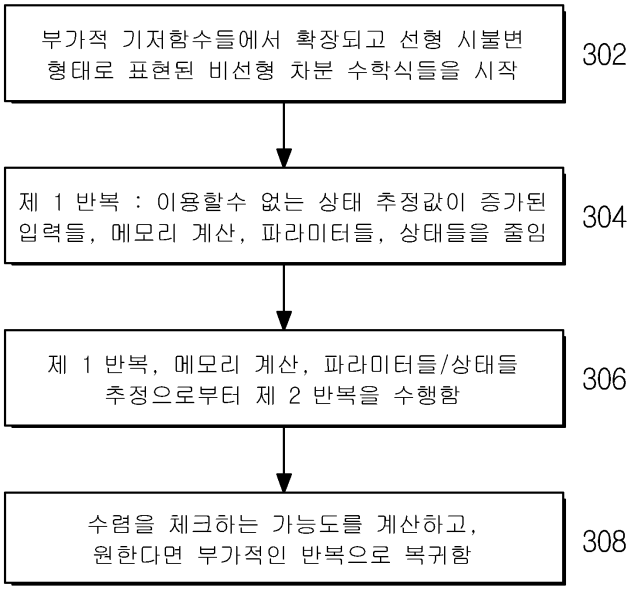
도면1


시간 변화, 파라미터 변화 및/또는 비선형 상태 공간 차분 수학식들의 집합으로 시작
102
상태 공간 차분 수학식들을 기저 함수들의 집합에 대해서 확장
104
차분 수학식들을 선형 시불변 시스템으로 표현
106
원하는 경우 반복 수행
108

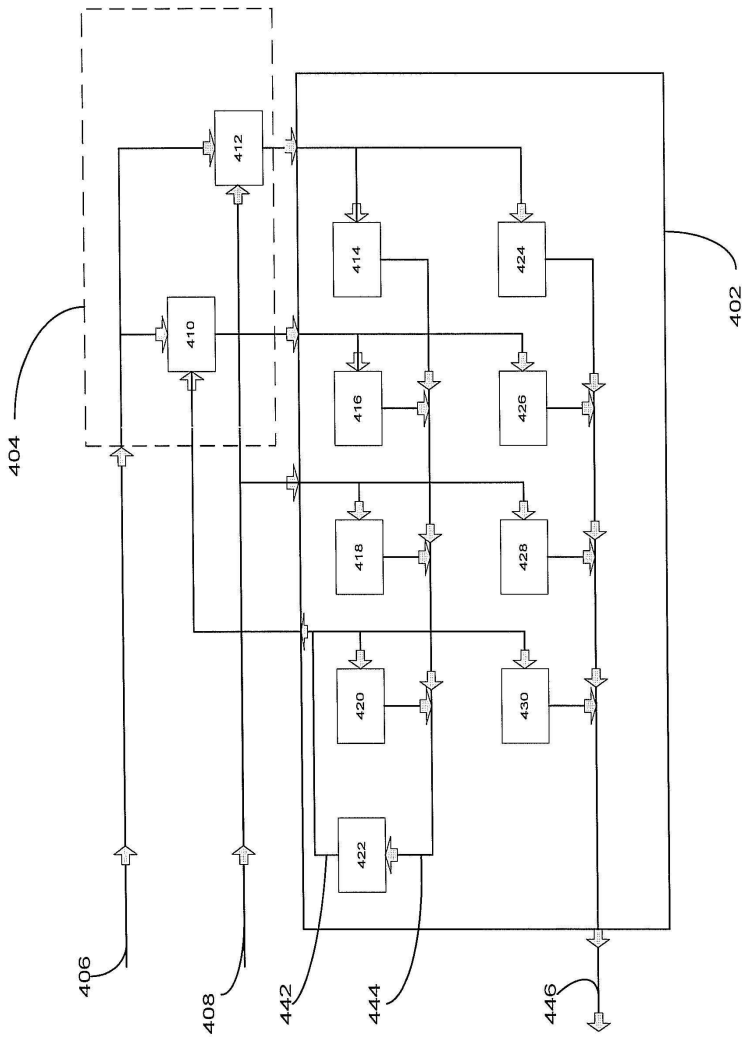
도면2


시간 변화, 파라미터 변화 및/또는 비선형 상태 공간 차분 수학식들의 집합으로 시작
202
상태 공간 차분 수학식들을 스케줄링 함수들, 상태들 및 입력들에 대해서 확장
204
선행 시불변 피드백 형태로 주어진 출력들과 증가된 입력들에 대한 차분 수학식들을 표현
206
선형 상태 부분공간 방법들을 통한 파라미터의 추정이 상기 상태들의 추정값을 획득/개선하기 위한 반복을 요구
208

도면3


부가적 기저함수들에서 확장되고 선형 시불변 형태로 표현된 비선형 차분 수학식들을 시작
302
제 1 반복 : 이용할수 없는 상태 추정값이 증가된 입력들, 메모리 계산, 파라미터들, 상태들을 줄임
304
제 1 반복, 메모리 계산, 파라미터들/상태들 추정으로부터 제 2 반복을 수행함
306
수렴을 체크하는 가능도를 계산하고, 원한다면 부가적인 반복으로 복귀함
308

도면4


402
404
406
408
410
412
414
416
418
420
422
424
426
428
430
442
444
446

도면5

수량	반복1	반복K	반복K+1
예상 단계:			
출력 벡터	y_t	y_t	y_t
입력 벡터 $\tilde{u}_t$	$\begin{bmatrix} u_t \\ P_t \otimes u_t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_t \\ P_t \otimes \hat{x}_t^{[k-1]} \\ P_t \otimes u_t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_t \\ P_t \otimes \hat{x}_t^{[k]} \\ P_t \otimes u_t \end{bmatrix}$
메모리 측정값들	$\hat{m}_t^{[1]}$	$\hat{m}_t^{[k]}$	$\hat{m}_t^{[k+1]}$
극대화 단계:			
파라미터 측정값들	$\hat{\Theta}^{[1]}$	$\hat{\Theta}^{[k]}$	$\hat{\Theta}^{[k+1]}$
상태 측정값들	$\hat{X}^{[1]}$	$\hat{X}^{[k]}$	$\hat{X}^{[k+1]}$

도면6

