



(19)中華民國智慧財產局

(12)發明說明書公告本

(11)證書號數：TW I486846 B

(45)公告日：中華民國 104 (2015) 年 06 月 01 日

(21)申請案號：098126548

(22)申請日：中華民國 98 (2009) 年 08 月 06 日

(51)Int. Cl. : G06F3/043 (2006.01)

(30)優先權：2008/10/03 英國

GB818117.4

(71)申請人：英國海威福科技有限公司(英國)HIWAVE TECHNOLOGIES(UK) LIMITED (GB)
英國

(72)發明人：哈里斯 尼爾約翰 HARRIS, NEIL JOHN (GB)

(74)代理人：陳長文

(56)參考文獻：

CN 1392977A

JP 2005-258666A

JP 2008-123429A

US 4216352

審查人員：梁宏維

申請專利範圍項數：20 項 圖式數：10 共 66 頁

(54)名稱

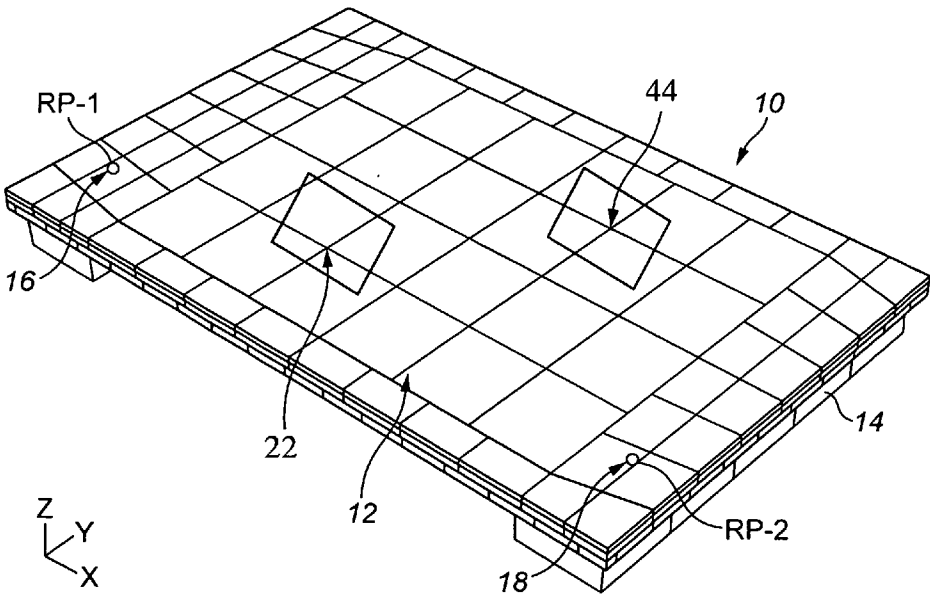
接觸敏感裝置

TOUCH SENSITIVE DEVICE

(57)摘要

一接觸敏感裝置，包括一面板，其能夠支援彎曲波；一使用者可存取之接觸敏感螢幕，其在該面板的一面上或形成該面板之該面的一部份，該接觸敏感螢幕具有複數不同之感測區域；複數激振器，其耦接至該面板，以施加彎曲波至該面板，以回應於該使用者接觸一感測區域而在該複數感測區域提供觸覺回饋；及信號處理機構，其配置成可施加信號至該等激振器，以便操縱藉由該複數激振器施加至該面板之彎曲波，藉此所施加之彎曲波的振幅係在被該使用者所接觸之感測區域最大化，且在其它之每一感測區域減少或減至最小。

A touch sensitive device comprising a panel capable of supporting bending waves, a user-accessible touch sensitive screen on or forming part of a face of the panel, the touch sensitive screen having a plurality of different sensing areas, a plurality of vibration exciters coupled to the panel to apply bending waves to the panel to provide tactile feedback at the plurality of sensing areas in response to the user touching a sensing area, and signal processing means arranged to apply signals to the vibration exciters so as to steer bending waves applied to the panel by the plurality of vibration exciters whereby the amplitude of the applied bending waves is maximised at the sensing area touched by the user and reduced or minimised at each other sensing area.



- 10 . . . 接觸敏感裝置
- 12 . . . 接觸敏感螢幕
- 14 . . . 墊片
- 16 . . . 激振器
- 18 . . . 激振器
- 22 . . . 節點
- 44 . . . 節點

圖1a

發明專利說明書

(本申請書格式、順序，請勿任意更動，※記號部分請勿填寫)

※申請案號：98126548

※申請日：98 年 08 月 06 日

※IPC 分類：

G06F 3/043

(2006.01)

一、發明名稱：(中文／英文)

接觸敏感裝置

Touch sensitive device

二、中文發明摘要：

一 接觸敏感裝置，包括一面板，其能夠支援彎曲波；
一使用者可存取之接觸敏感螢幕，其在該面板的一面上或形成該面板之該面的一部份，該接觸敏感螢幕具有複數不同之感測區域；複數激振器，其耦接至該面板，以施加彎曲波至該面板，以回應於該使用者接觸一感測區域而在該複數感測區域提供觸覺回饋；及信號處理機構，其配置成可施加信號至該等激振器，以便操縱藉由該複數激振器施加至該面板之彎曲波，藉此所施加之彎曲波的振幅係在被該使用者所接觸之感測區域最大化，且在其它之每一感測區域減少或減至最小。

三、英文發明摘要：

A touch sensitive device comprising a panel capable of supporting bending waves, a user-accessible touch sensitive screen on or forming part of a face of the panel, the touch sensitive screen having a plurality of different sensing areas, a plurality of vibration exciters coupled to the panel to apply bending waves to the panel to provide tactile feedback at the plurality of sensing areas in response to the user touching a sensing area, and signal processing means arranged to apply signals to the vibration exciters so as to steer bending waves applied to the panel by the plurality of vibration exciters whereby the amplitude of the applied bending waves is maximised at the sensing area touched by the user and reduced or minimised at each other sensing area.

四、指定代表圖：

(一)、本案指定代表圖為：第 (1a) 圖。

(二)、本代表圖之元件符號簡單說明：

10：接觸敏感裝置

12：接觸敏感螢幕

14：墊片

16：激振器

18：激振器

22：節點

44：節點

五、本案若有化學式時，請揭示最能顯示發明特徵的化學式：無

六、發明說明：

【發明所屬之技術領域】

本發明有關包括接觸敏感螢幕或面板之接觸敏感裝置。

【先前技術】

美國專利第 4,885,565 號、美國專利第 5,638,060 號、美國專利第 5,977,867 號、美國專利第 2002/0075135 號敘述當使用者接觸時具有觸覺回饋之接觸操作式設備。於美國專利第 4,885,565 號中，當一作動器被通電以提供觸覺回饋時，該作動器被提供用於賦予動作至該 CRT。於美國專利第 5,638,060 號中，一電壓係施加至壓電元件，其形成一開關，以振動該元件，以施加一反應力至使用者之手指。於美國專利第 5,977,867 號中，當該接觸螢幕係以手指或指標器接觸時，一觸覺回饋單元產生一被該使用者所感測之機械式振動。該機械式振動之振幅、振動頻率、及脈衝長度被控制，使該脈衝寬度係長到足以被感覺，但短到足以在該下一主要接觸之前終止。美國專利第 2002/0075135 號敘述第二傳感器之使用，以在暫態尖波之形式中提供一脈衝，以模擬一按鍵音。於上述每一先前技藝文件中，回應於一使用者之手指或指標器的離散接觸提供觸覺回饋。

【發明內容】

根據本發明，提供有一接觸敏感裝置，包括一面板，其能夠支援彎曲波；一使用者可存取之接觸敏感螢幕，其在該面板的一面上或形成該面板之該面的一部份，該接觸敏感螢幕具有複數不同之感測區域；複數激振器，其耦接至該面板，以施加彎曲波至該面板，以回應於該使用者接觸一感測區域而在該複數感測區域提供觸覺回饋；及信號處理機構，其配置成可施加信號至該等激振器，以便操縱藉由該複數激振器施加至該面板之彎曲波，藉此所施加之彎曲波的振幅係在被該使用者所接觸之感測區域最大化，且在其它之每一感測區域減少或減至最小。

由於該信號處理機構之結果，有一想要之信號（在一感測區域最大化之振動）及一不想要之信號（在另一感測區域最小化之振動）。該二者之比率可被敘述為一“信號噪音比”、或“SNR”。這通常係以分貝（dB）表達，且大值係比小值較好。

藉由操控該振動，其係可能確保每一感測區域或位置主要地接收用於該位置之觸覺介面信號，甚至當該等位置被同時地接觸時。該面板上之任何其他位置將遭受該等信號之組合，但這是不重要的。用於二感測區域，既然二同時之觸覺介面回饋被提供在空間地分開之位置，此特色可被稱為同時之雙區域觸覺介面。這可被延伸至多數信號及多數區域，以提供同時多區域觸覺介面。

當作另一選擇、或此外，為提供同時多區域觸覺介面，該信號處理機構可被配置，以施加具有小的或最小聲波

分量之彎曲波信號。這可為想要的，以確保提供至每一位置之觸覺介面信號係無聲的。

該面板可為有意地共振的，且其中藉由該等激振器所施加之信號造成該面板共振。譬如，該面板可為一共振彎曲波模式面板，如在國際專利申請案 WO97/09842 號中所敘述，其係以引用的方式併入本文中。該面板亦可為一揚聲器，其中另一激振器激發振動，該振動產生一聲波輸出。

該激振器可為一運動線圈傳感器及／或一壓電彎曲傳感器，譬如包括一共振元件之傳感器，例如在國際專利申請案 WO01/54450 號中所敘述，其係以引用的方式併入本文中。該等激振器可為／非為慣性式的。

該信號操縱可為使得藉由該使用者所接觸之信號感測區域被造成為腹點的，且其它之每一感測區域被造成為節點的。一波節點（節點）係一在激發之任何頻率沒有速度之節點，且一反波節點具有最大速度。

該裝置可包括 n 個數目之信號感測區域及大於 n 、例如 $n+1$ 個數目之激振器。這樣一來，所施加之彎曲波的振幅係在被該使用者所接觸之感測區域最大化至該最大可能之振幅，且在其它之每一感測區域係大約為零。換句話說， n 節點的反應可被達成。在這方面，用於“無聲的”需求可被考慮為等同於產生一節點的軸上壓力。為達成無聲的雙區域觸覺介面回饋，舉例來說在另一感測區域，其將為需要建立一波節點及零軸上壓力兩者。

另一選擇係，可有 n 個數目之信號感測區域及 n 個或比 n 個數目更少之激振器。於此配置中，其係仍然可能提供一“最低能量”解答，藉此所施加之彎曲波的振幅係在被該使用者所接觸之感測區域最大化，且在其它之每一感測區域減至最小。然而，該最大振幅可為少於以 $n+1$ 個激振器所達成之最大可能振幅及／或該最小值可為顯著地大於零。此一解答可為作得最好，以同樣地達成所有想要之節點反應，不然達成一些比其他者較佳之節點反應的其中之一。換句話說，同時地解決 MR 及無聲的觸覺介面可減少壓力及速度反應兩者，但不是一直至零。為達成一正確之解答需要大於 n 之另一激振器數目。

以一較大之激振器數目、例如大於 $n+1$ ，其應是可能導入額外之波節點，以改善該觸覺介面反應。其亦可為可能甚至藉由助長多極輻射進一步減少該聲波輸出。額外之波節點的導入可允許該非運動區域延伸超出沿著“節點線”所選擇之點。該等線之方向及形狀係頻率相依的，在該系統中之每一模式改變形狀。節點之組群可被觀察，以便減少沿著一線之動作。如果此線在該頻率範圍的一部份上方係自然地有波節的，該方法係比用於一任意線更可能為成功的。該節點線可被操縱遠離一自然之對稱線。

用於該一般之‘ m ’個輸入（亦即待施加至 m 個數目之激振器的信號）、‘ n ’個輸出（亦即 n 個數目之感測區域或 $n-1$ 個數目之感測區域與用於無聲的觸覺介面之期望）問題，在一演算法上有二原理變化，以發現該最佳之 m

個輸入。這些可被稱為該平行之“一起 (all at once)”特徵值方法與該串連之“一次一個”特徵值方法。用於有二個激振器及一個無聲的感測區域或二個感測區域之特定案例，一“tan theta”演算法可被用來界定待施加至該等激振器之信號。

該信號處理機構可施加信號至該等激振器，以便在複數感測區域同時地提供觸覺回饋。

根據本發明之另一態樣，提供有操作一如任何前述申請專利範圍中所主張之接觸敏感裝置的方法，包括感測藉由使用者所接觸之螢幕的一區域、及處理與施加信號至該複數激振器以操縱該面板中之彎曲波的步驟，藉此該振動之振幅係在被該使用者所接觸之感測區域最大化，且在其它之每一感測區域減少或減至最小。

施加至該等激振器之信號可如此被處理，以便同時地提供觸覺回饋至複數感測區域，同時減少該等感測區域間之串音或使該等感測區域間之串音減至最小。

該螢幕上之接觸可被偵測及／或追蹤，如在發給本申請人之國際專利申請案第 WO 01/48684、WO 03/005292 及／或 WO 04/053781 號中所敘述。這些國際專利申請案係以引用的方式併入本文中。另一選擇係，其他習知方法可被用來接收及記錄或感測此等接觸。

本發明進一步提供處理器控制碼，以尤其在一資料載體、或在諸如光學或電信號載體之資料載體上施行該等上述方法，該資料載體諸如磁碟、CD-ROM 或 DVD-ROM、

諸如唯讀記憶體（韌體）之程式的記憶體。施行本發明之具體實施例的編碼（及／或資料）可包括諸如 C 語言的傳統程式設計語言（已解譯或編譯）中之訊源、物件、或可執行碼、或組合碼、用於設定或控制一 ASIC（特殊應用積體電路）或 FPGA（現場可程式閘陣列）之編碼、或用於諸如 Verilog（商標）或 VHDL（超高速積體電路硬體描述語言）的硬體描述語言之編碼。如熟諳之人士將了解者，此碼及／或資料可被分佈於彼此通訊的複數耦接零組件之間。

【實施方式】

圖 1a 顯示一包括安裝在墊片 14 上之接觸敏感螢幕 12 的接觸敏感裝置 10 之模型。提供呈分佈式模式致動器 (DMAs; distributed mode actuators) 之形式的二激振器 16、18，以在該螢幕內產生一信號。一或多個感測器（未示出）被用於偵測該螢幕上之尖筆的接觸或運動。如在圖 1b 所顯示，外部空氣被明確地製作至 10 公分，及暗示地製作至無窮大。

為製作該系統，該二激振器之每一個係藉由點訊源及一頻率相依之力量未加工地模擬。該面板本身、及該等 DMAs 之配置兩者於一軸線或另一軸線中具有不對稱性。當作第一步驟，力量係分開地施加至驅動點 RP-1（藉由該第一激振器 16 所驅動）及 RP-2（藉由該第二激振器 18 所驅動）。在該系統中之所有點的反應被計算。

圖 2a 在該外表面上之一特別輸出節點（節點 22）對

著頻率顯示用於每一輸入之速度反應（互導納）。環繞著圖 1a 所示節點 22 之方塊界定第一感測區域。該分貝尺度係相對 1 m/s/N 。在大約 350-400Hz 之下，來自每一輸入之反應係非常類似的，但在較高之頻率，它們分開。圖 2b 對著頻率顯示該速度反應（互導納），而用於在該外表面上之第二輸出節點（節點 44）的每一輸入。環繞著圖 1a 所示節點 44 之方塊界定第二感測區域。在此節點之反應係一類似之特性，但在細節中與那些在節點 22 者不同。圖 2c 對著頻率顯示該聲壓位準，而用於在軸上 10 公分處之每一輸入。於每一圖面中，該信號之實部被顯示為一實線，且該虛部被顯示為一虛線。

一觸覺介面信號對該接觸敏感螢幕之使用者提供觸覺回饋。在一螢幕上可有超過一處被使用者所接觸之位置，且其想要的是每一位置僅只接收該位置用之觸覺介面信號，甚至當該等位置被同時地接觸時。如在圖 3a 所示，這可藉由確保當點 A 及 B 被同時地接觸時，用於施加至該第一及第二激振器 16、18 之信號的轉換函數在 A 產生一節點及在點 B 產生所需之觸覺介面信號，且在點 B 產生一節點及在點 A 產生所需之觸覺介面信號被達成。換句話說，用於每一接觸點，需要在另一接觸點產生一節點的轉換函數被獲得，且這些被使用於提供該適當之觸覺介面信號。一波節點（節點）係在任何激發頻率沒有速度之節點。

圖 3b 係一方塊圖，顯示該系統之主要處理元件。該

接觸螢幕 12 上之接觸被一或更多感測器 17 所偵測，且來自該等感測器 17 之輸出被餵入至一處理器 20。該處理器決定待施加至該等激振器 16、18 之信號，如在下面更詳細地說明者。這些信號係使用一信號發生器 22 施加至該等激振器。應了解雖然該信號發生器及處理器被顯示為分開之實體，該處理器功能性可被併入該信號發生器功能性。該等激振器 16、18 施加彎曲波振動至該接觸螢幕。

如在圖 3a 所示，藉由線性疊加，每一接觸點僅只接收其意欲之觸覺介面信號。該面板上之其他任何位置將遭受該等信號的一組合，但這是不重要的。既然在空間地分開之位置二提供同時之觸覺介面回饋，此特色可被稱為同時之雙區域觸覺介面。這可被延伸至多數信號及多數區域，以提供同時之多區域觸覺介面。

當作另一選擇、或此外，為提供同時之雙區域觸覺介面，其可為想要的是確保提供至每一位置之觸覺介面信號係無聲的。在這方面，用於“無聲的”需求可被考慮為等同於產生一節點的軸上壓力。為達成無聲的雙區域觸覺介面回饋，舉例來說在節點 22，其將為需要建立一波節點及零軸上壓力兩者。如在圖 2b 及 2c 所示，該問題係藉由該二輸出在行為及振幅中極為不同的事實所複雜化，故將需要該等反應之某一縮放。

於 JWS 瑞利“聲音之理論”第二冊中，瑞利教導一與速度及壓力有關之縮放因數。換句話說，以平均加速度 $\langle a \rangle$ 運動，他之第一完整定理敘述在離區域 A 之阻斷訊源

的距離 r 之壓力被給與為：

$$p = \frac{\rho_0}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \langle a \rangle \cdot A,$$

$$\text{在此 } \langle a \rangle = j \cdot \omega \cdot \langle v \rangle = \frac{1}{A} \cdot \iint a \cdot dA,$$

$\rho_0 = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ 係空氣之密度。

用於一活塞，該動作係均勻的，且 $\langle a \rangle = a$ 。用於一簡單支撐板，該平均值係與該峰值乘以 $\langle a \rangle = (2/\pi)^2 a$ 有關。故用於速度的一合適之預設縮放值係

$$s(f) = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \rho_0 \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^2$$

故所需之縮放係頻率、面板面積及測量距離之函數。

使用此縮放，一組合之誤差測量被形成：

$$M = (s) \cdot M1 + M2,$$

在此 $M1$ 及 $M2$ 係分別用於速度及壓力之個別誤差測量。

藉由改變 $s(f)$ ，其係可能變更施加至該速度或聲波最小化問題的其中之一的相雙重量。如果 $s=0$ ，該無聲的之觸覺介面行為被最佳化；如果 $s=\text{無窮大}$ ，該多區域行為被最佳化。

大致上，如果 n 節點的反應係想要的，則需要 $n+1$ 個輸入通道（對於考慮用於“無聲的”需求係有用的，如等同於產生一節點的軸上壓力）。換句話說，為達成無聲的回饋及雙區域觸覺介面回饋兩者，有二節點的反應（一反應在該面板上，且一反應在軸上 10 公分處），且如此需

要 3 個輸入通道。然而，於圖 1a 之模型中，僅只有二個輸入通道。據此，無聲的同時雙區域觸覺介面回饋可能以僅只這些二個輸入通道而未被精確地達成，另一個輸入通道係必需的。然而，如於此案例中，如果有比 $n+1$ 個輸入通道更少之通道，其係仍然可能提供一“最低能量”解答，其可為同樣地盡力達成所有想要之節點的反應、不然達成比其他更好之數個反應的其中之一。該方法涉及計算用於每一輸入之轉換函數，其將導致該想要之效果。

圖 4a 顯示施加至每一激振器 16、18 之輸入信號頻譜，以造成節點 22 保持固定不動（亦即產生一節點），以解決該雙觸覺介面問題。於該子模態之範圍中，產生這些頻譜之函數可藉由一常數、或一慢慢地改變之頻譜所逼近。在該較寬廣之頻帶上方，使用主動濾波器區段可為充分的；譬如，一用於通道 1 常數之和緩的（在 500Hz 為 3dB）峰型等化器（EQ），及一用於通道 2 之換相器，以於 400Hz 及 700Hz 之間由 +0.7 至 -0.7 改變該增益。圖 4b 顯示施加至每一激振器 16、18 之輸入信號頻譜，以對該無聲的雙觸覺介面問題最佳化該解答。這些結果係藉由下面所敘述之“tan theta”方法、或下面所敘述之“有尺度特徵向量”方法所獲得。

圖 5a 顯示解決該無聲的觸覺介面問題給與零軸上壓力，但在節點 22 留下一殘餘速度。反之，解決該多區域（MR）觸覺介面問題在節點 22 給與零速度，但留下一殘餘之軸上壓力。當與該無聲的觸覺介面最佳化作比較時，

圖 4b 之組合最佳化解答導致速度中之一般減少。相同地，當與雙重或多區域觸覺介面最佳化作比較時，圖 4b 之組合最佳化解答導致壓力中之一般減少。速度中之改良被集中在較低之頻率，且壓力中之改良被集中在較高之頻率。這些改良之平衡可藉由改變該等縮放因數 $s(f)$ 所變更。

該雙區域 (MR) 效果之有效性被測量當作節點 44 (該信號) 及節點 22 (該噪音) 間之信號噪音比 (SNR)。用於該 MR 最佳化，這是無限大的。圖 5b 顯示用於安靜之觸覺介面最佳化及用於組合最佳化的結果。該組合最佳化改良低於 450Hz 頻率用之 SNR。

包括該 MR 最佳化的任何最佳化之正確性係藉由供給至該 FE 程式及其自身之處理的資料之數值準確性所設定。如在圖 5c 所示，使係數精確至 6 小數位數，達成該等節點 22 及 44 間之分離的 120 分貝。如此，所提出之信號在節點 44 最大化該輸出及在節點 22 最小化該輸出。

藉由使用如圖 3a 所示之線性疊加，由在節點 22 具有一安靜區至具有不同信號之二區、亦即在節點 22 及 44 之不同回饋信號係一不重要的步驟。如果其係可能產生單一波節點，其係亦可能做成同時之雙區域觸覺介面。亦即，吾人能夠在空間地分開之位置處理二個同時之觸覺介面回饋。該第一接觸不須特別之處理-吾人使用我們之二通道，以保持該聲波輸出儘可能低。在該第二接觸上，以下必需發生。用於每一接觸點，需要在另一接觸點產生一節點之轉換函數被獲得，且這些被使用於提供該適當之觸覺介

面信號。藉由線性疊加，每一接觸點僅只接收其意欲之觸覺介面信號。該面板上之其他任何位置將遭受該等信號的一組合，但這是不重要的。

如上面所示，解決 MR 及無聲的觸覺介面將同時減少壓力及速度反應兩者，但不是一直至零。為達成一正確之解答需要另一個輸入通道。圖 6 顯示圖 1a 中之系統的變化，並具有三個輸入。輸入之數目超過輸出之數目，故對於無聲的雙區域觸覺介面最佳化有一正確之解答。於此案例中，該軸上壓力係零，且在節點 22 之速度亦係零。提供信號 RP-3 之第三激振器 20 已在對於該第二激振器 18 橫側地對稱之位置被加入。

圖 7a 對著頻率顯示該有尺度之聲壓位準，而用於在節點 22 及在軸上 10 公分處之信號 RP-3。解決該無聲的、多區域觸覺介面問題所需之三輸入頻譜的實部（實線）及虛部（虛線）被顯示在圖 7b 中。

用於藉由此解答所提供的 MR 觸覺介面之 SNR 係理論上無限大的，因在節點 22 之速度係同樣地為零。該無聲的觸覺介面部份之有效性係較難以評估，因雖然該軸上壓力係零，將仍然有聲波輻射。或許該最佳測量係比較來自此解答之輻射功率與來自一最大音響效果解答之輻射功率（藉由選擇來自只有該音響效果誤差矩陣之最高特徵值所發現）。此比較之估計結果被顯示在圖 7c 中，其亦顯示用於上述二輸入組合最佳化之聲波 SNR。

以更多之輸入，其將為可能導入額外之波節點，以改

良該觸覺介面反應。其亦為可能的是甚至藉由助長多極輻射進一步減少該聲波輸出。

額外之波節點的導入可允許該非運動區域延伸超出沿著“節點線”所選擇之點。該等線之方向及形狀係頻率相依的，在該系統中之每一模式改變形狀。為了規則化被保持固定不動之區域，超過一樣本點必需被使用。於此案例中，該相消將不是為完全的。譬如，使用節點 22 及 44 兩者當作目標，吾人可使用下面所敘述之方法（例如 $\tan \theta$ ），以於該最大及最小加總反應之間達成至少 10 分貝分離。這被說明在圖 8a 中。

使用該相同之分析，用於建立單一波節點，節點之組群可被觀察，以便減少沿著一線之動作。如果此線係在部份頻率範圍上方自然有節點的，該方法係比用於一任意線更可能為成功的。具有僅只二通道，證實在一延伸區域上方之控制將為更困難。為此，四或更多通道將或許被需要。

圖 8b 顯示用於一接觸螢幕上之節點線的三範例取樣點，如先前所述。該三點間之一些區別係可能的。在低頻，該線在藉由圖 4a 之頻譜所驅動的圖 1a 之接觸螢幕的 200Hz 順著該節點線。下面所敘述之方法產生用於該二激振器 16、18 之二組輸入，其導致用於該三節點之最小速度或用於該三節點之最大速度。這些二者之比率可被考慮為一“信號噪音比”，具有代表一較大之成功程度的較大值。此比率（SNR）係對著頻率繪製於圖 8c 中。該結果

不是如用於單一節點般驚人的，但其係一合理之結果。該節點線被操縱遠離一自然之對稱線。

如先前所述，以額外之輸入，其應是可能改良該觸覺介面反應。為該目的，一額外之輸入在圖 8b 所示之該組節點被使用於幫助最小化該等速度（在此運用中，該聲響應不被考慮）。用於三輸入之 SNR 亦被繪製在圖 8c 中。在藉由使用該額外的輸入所獲得之 SNR 中有一清楚之改良。SNR 中之典型的改良係越過該整個頻率範圍之 10 分貝。

為不同之節點組重複該製程。此時該組係由直接地越過該面板經過上述節點 22 之七個節點所形成。如在圖 8d 所示，與二個輸入作比較，更好之結果係以三個輸入達成。

用於任何多區域系統，有若干輸入及若干測量點。該最簡單之案例係二個輸入及一個目標位置，但如上述，該問題可頗為更複雜，涉及更多輸入、及延伸之目標區域。解決該簡單及更複雜之問題兩者的各種方法被敘述在下面：

藉由“ $\tan \theta$ ”方式的一簡單之最小化問題 & 解答

考慮具有二輸入及一輸出之系統。讓由輸入 1（例如圖 1a 中之第一激振器 16）至該輸出的轉換函數被 P_1 所代表，且由輸入 2（例如圖 1a 中之第二激振器 18）至該輸出的轉換函數被 P_2 所代表。然後，用於輸入信號 a 及 $-b$ ，該輸出信號頻譜 T 被給與為

$$T = a \cdot P_1 - b \cdot P_2,$$

在此 a 、 b 、 P_1 、 P_2 及 T 全部係頻率之複合函數。

待解決之問題係對於所有頻率使 T 減至最小。對該問題無唯一的解答，但其由觀察變得清楚的是該 a 及 b 應為有關的；特別地是

$$b = a \cdot P_1 / P_2 \text{、或 } a = b \cdot P_2 / P_1$$

使用這些比率大致上不是一項好主意，因 P_1 或 P_2 可包含零。一簡單之解答係設定 $a = P_2$ 及 $b = P_1$ 。亦常見的是將該解答正規化至單位能量，亦即 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。因 P_1 及 P_2 大致上係複量，該等絕對值係重要的。如此， T 係藉由以下設定減至最小：

$$a = \frac{P_2}{\sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2}}, b = \frac{P_1}{\sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2}}$$

順便一提， T 係藉由以下設定最大化至一：

$$a = \frac{\overline{P_1}}{\sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2}}, b = -\frac{\overline{P_2}}{\sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2}}$$

如果 P_1 或 P_2 係遠離該輸入被測量，如大致上於音響效果之案例中，該轉換函數將包括呈延遲形式之超相。因此，這些 a 及 b 之值不能為該最佳之選擇。如果吾人設定 $a = \cos(\theta)$ 及 $b = \sin(\theta)$ ，則 $\tan(\theta) = P_1 / P_2$ 。此解答可被敘述為該“ $\tan \theta$ ”解答，且產生具有遠較少之超相的 a 及 b 。其清楚的是由於該三角恆等式， $a^2 + b^2 = 1$ ，但因 θ 大致上係複合的， $|a|^2 + |b|^2 \neq 1$ ，故正規化將仍然被需要。

於此簡單之範例中，該最小化問題係藉由檢查所解決

。因這大致上係不可能的，其將為有利的是具有發現該解答之有系統的方法。

變異的方法

能量函數之最小化係很多以數學模型化之物理分支的一主要製程，且譬如形成有限元素分析之根基。手邊之工作係對一函數決定導致固定不動值之參數值（亦即發現波節點、線或壓力）。該製程之第一步驟係形成該能量函數。用於我們之範例， T 之平方模數可被使用，亦即

$E = |T|^2 = |a \cdot P1 - b \cdot P2|^2$ 。該固定不動值發生在 E 之最大值及最小值。

$$E = (a \cdot P1 - b \cdot P2) \cdot \overline{(a \cdot P1 - b \cdot P2)}$$

在 a 及 b 之值上有一限制 - 它們不能兩者皆為零。此限制可使用一所謂“拉格朗日乘數”被表達，以修改該能量方程式，如此：

$$E = (a \cdot P1 - b \cdot P2) \cdot \overline{(a \cdot P1 - b \cdot P2)} + \lambda \cdot (\bar{a} \cdot a + \bar{b} \cdot b - 1)$$

在這些問題型式中常見的是考慮每一變數之共軛複數當作一獨立之變數。我們將遵循在此之實例，且依序相對於每一共軛變數微分 E ，如此：

$$\frac{\partial E}{\partial a} = (a \cdot P1 - b \cdot P2) \cdot \overline{P1} + \lambda \cdot a \dots (1) \quad \frac{\partial E}{\partial \bar{b}} = -(a \cdot P1 - b \cdot P2) \cdot \overline{P2} + \lambda \cdot b \dots (2)$$

在該等固定不動點，這些之兩者必需為零。其係可能馬上看見先前區段中所發現之解答亦可在此施加。然而，

連續正式地解決方程式之系統，首先該等方程式藉由發現以下者被組合至消除 λ ：

$$(1).b - (2).a$$

$$(a \cdot P1 - b \cdot P2) \cdot \overline{P1} \cdot b + (a \cdot P1 - b \cdot P2) \cdot \overline{P2} \cdot a = 0$$

該結果之方程式於 a 及 b 中係二次的，該二解答對應於 E 之最大及最小值。導入 $a = \cos(\theta)$ 及 $b = \sin(\theta)$ - 雖然嚴格來說這不滿足該拉格朗日限制 - 獲得 $\tan(\theta)$ 之二次方程式。

$$P1 \cdot \overline{P2} + (|P1|^2 - |P2|^2) \cdot \tan(\theta) - P2 \cdot \overline{P1} \cdot \tan(\theta)^2 = 0$$

並不是說於很多案例中，

$(|P1|^2 - |P2|^2)^2 + 4 \cdot P1 \cdot \overline{P2} \cdot P2 \cdot \overline{P1} = (|P1|^2 + |P2|^2)^2$ ，我們達成與先前相同之解答，亦即

$$\theta = \arctan\left(\frac{P1}{P2}\right) \quad \text{用於該最小值，且} \quad \theta = \overline{\arctan\left(-\frac{P2}{P1}\right)} \quad \text{用於該}$$

最大值。

用於完整性，應注意的是此恆等式可能不適用於一般之案例中，在此 $P1$ 及 $P2$ 係反應之總和或積分。雖然如此，其係可能使用該“ $\tan \theta$ ”方式之此變異系統地發現兩固定不動值。一項應用被更詳細地說明在下面，以說明這些解答如何可被使用於上述範例中。

應用 1：無聲的觸覺介面。

於每件事係完全地對稱之案例中，該無聲的觸覺介面問題係微不足道的 - a 與 b 被設定至相等值。當在該系統中有不對稱性時，此假定係不再有效。解決該問題係發現二組輸入值 a 及 b ，其給與用於音頻之最大輸出及用於無聲的觸覺介面之最小輸出。這正好是該“變異方法”段落中所解決之問題。

圖 9a 所示之 $P1$ 及 $P2$ 、如 $dB SPL$ ，係在 10 公分之聲波反應，於此案例中藉由有限元素模擬所獲得 - 他們能同樣很好地藉由測量所獲得。該等壓力位準來自以額定之 1N 力量加上一些頻率相依性模擬 DMA。（一典型之 DMA 將具有大約 $15-30 mN/V$ 之額定力量。於該圖面中之 SPL 位準係如此高於將以一真實 DMA 所達成者。）

源自使用一對最佳濾波器之結果（最大及最小，根據用於 θ 之二解答），係與圖 9b 中之簡單的總和及差值相比較。注意該減至最小對之軸上反應係零壓力（-無限大 dB ）。在大部份該頻帶上方，該加總之反應係高於該減去之反應，其未總是如此。雖然，該軸上反應不會告訴原委，在該前半球上方之平均的結果將顯示出類似特色。

由於該最佳化程序之結果，有一想要之信號（該最大值）及一不想要之信號（該最小值）。該二者之比率可被敘述為一“信號噪音比”、或“ SNR ”。這通常係以分貝表達，且大值係比小值更好。圖 9c 清楚地顯示該最佳化之信號對如何在每一頻率最大化該 SNR ，遍及該整個頻譜範圍給與 10-20 分貝之改良。吾人注意到該標準之總和及

相差對，該 SNR 實際上係負的，低於大約 330Hz。據此，將上述技術應用至一具有不對稱性的系統中之無聲的觸覺介面問題，與該簡單之總和及相差解答作比較導致很多分貝的信號噪音比中之改良，其用於對稱系統係適當的。

藉由在若干離散之取樣點測量該目標，上述之解答可如關於圖 8b 所敘述地被應用至延伸區域。於此案例中，其想要的是藉由處理該等輸入同時最小化該等輸出。現在有比輸入信號更多之輸出信號，故該結果係不正確的。這是該變異方法的各強度之一 - 其可發現該最佳之近似值。

$$\sum_i T_i = \sum_i |a \cdot P1_i - b \cdot P2_i|^2 = \sum_i (a \cdot P1_i - b \cdot P2_i) \cdot \overline{(a \cdot P1_i - b \cdot P2_i)}$$

$$E = \sum_i (a \cdot P1_i - b \cdot P2_i) \cdot \overline{(a \cdot P1_i - b \cdot P2_i)} + \lambda \cdot (\bar{a} \cdot a + \bar{b} \cdot b - 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= \sum_i (a \cdot P1_i - b \cdot P2_i) \cdot \overline{P1_i} + \lambda \cdot a \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -\sum_i (a \cdot P1_i - b \cdot P2_i) \cdot \overline{P2_i} + \lambda \cdot b \end{aligned}$$

如先前解決這些產生

$$S12 + (S11 - S22) \cdot \tan(\theta) - S21 \cdot \tan(\theta)^2 = 0$$

在此

$$S_{nm} = \sum_i Pn_i \cdot \overline{Pm_i}$$

$$\theta_m = \arctan\left(\frac{S11 - S22 + \sqrt{(S11 - S22)^2 + 4 \cdot S12 \cdot S21}}{2 \cdot S21}\right), \text{ 給與該最小值}$$

$$\theta_p = \arctan \left(\frac{S_{11} - S_{22} - \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4 \cdot S_{12} \cdot S_{21}}}{2 \cdot S_{21}} \right), \text{ 給與該最大值}$$

該方法同樣延伸至積分，且至超過二個輸入。

譬如，該誤差函數及該等總和可被以積分替換；

$$E = \iint [a \cdot P_1(\underline{r}) - b \cdot P_2(\underline{r})]^2 dA + \lambda \cdot (\bar{a} \cdot a + \bar{b} \cdot b - 1)$$

$$S_{nm} = \iint P_n(\underline{r}) \cdot \overline{P_m(\underline{r})} dA$$

應用 2：雙區域觸覺介面

其係可能同時在一選定反應指定一最小反應及在另一選定位置指定一非零反應。這在雙區域系統中可為很有用的。

“強大的”解答。

我們具有二個輸入（譬如），以在另一點產生一波節點及觸覺介面回饋。由輸入 i 輸出 j 界定轉換函數 P_{i_j} 。

同時地解決 $a \cdot P_{1_1} + b \cdot P_{2_1} = 0$ 及 $a \cdot P_{2_1} + b \cdot P_{2_2} = g$ 。

$$\begin{pmatrix} P_{1_1} & P_{2_1} \\ P_{1_2} & P_{2_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1_1} & P_{2_1} \\ P_{1_2} & P_{2_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$a = -\frac{P_{2_1}}{P_{1_1} \cdot P_{2_2} - P_{1_2} \cdot P_{2_1}} \cdot g, \quad b = \frac{P_{1_1}}{P_{1_1} \cdot P_{2_2} - P_{1_2} \cdot P_{2_1}} \cdot g$$

所提供之分母係絕非零，此對轉換函數將在點 1 產生一節點的反應，且一複合之轉換函數在點 2 正好等於 g 。

“微弱之”解答

同時地解決 $|a \cdot P1_1 + b \cdot P2_1|^2 = 0$ 及
 $|a \cdot P2_1 + b \cdot P2_2|^2 = |g|^2$ 。

使用下面所討論之變異方法解決用於 a 及 b 之第一最小化，且正規化該結果，以滿足該第二方程式。

$$a = r \cdot \cos(\theta), b = -r \cdot \sin(\theta), \tan(\theta) = -\frac{P1_1}{P1_2}$$

$$r^2 \cdot [(\cos(\theta) \cdot P2_1 - \sin(\theta) \cdot P2_2)]^2 = |g|^2, \text{ 因此 } r =$$

所提供之分母係絕非零，此對轉換函數將在點 1 產生一節點的反應，且一功率轉換函數在點 2 等於 $|g|^2$ 。在點 2 之結果的輸出將不需要具有與 g 相同之相位反應，故該強制係未如強的。

對上述方法有其他延伸，特別是有關當考慮超過二個輸入通道時。這些延伸係一般的，且將同樣很好地應用至該二通道案例。另外，當沒有正確之解答係可用時，藉由使用特徵值分析當作一工具，我們獲得“最佳”解答。

該變異方法及該特徵值問題間之關係。

當使下面之形式 E 的能量函數減至最小時，我們抵達一組同時之方程式：

$$E = \left| \sum_n a_n \cdot P_n \right|^2, \frac{\partial E}{\partial a_n} = \overline{P_n} \cdot \sum_n a_n \cdot P_n = 0, \text{ 對於所有 } n$$

在此 P_i 係至該系統之輸入，且 a_i 係施加至這些輸入之常數、亦即該先前二通道系統中之 a 及 b 。

我們可將此方程式之系統寫入矩陣形式，如此

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} = 0, \text{ 在此 } \underline{\underline{M}}_{i,j} = \overline{P_i} \cdot P_j, \text{ , 且在此 } v_i = a_i \quad (1)$$

注意該 M 係共軛對稱的，亦即 $\underline{\underline{M}}_{j,i} = \overline{\underline{\underline{M}}_{i,j}}$

我們希望發現一非微不足道的解答；亦即一異於該微不足道的 $v=0$ 之解答，其雖然數學上有效，係未過多使用。

因 v 之任何線性縮放亦係對該方程式的一解答，該 a_i 未被唯一地界定。我們需要一額外之方程式，以限制該縮放。觀看事情之另一方式係陳述用於一正確之解答，輸入變數之數目必需大於測量點之數目。任一方式有超過自由變數之另一方程式，故 M 之行列式將為零。

考慮該矩陣特徵值問題，在此我們希望發現一對於該方程式非微不足道的解答。

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} - \lambda \cdot \underline{v} = 0 \quad , \text{ 在此 } \lambda \text{ 係一特徵值，且該相關之 } \underline{v} \text{ 係該特徵向量。} \quad (2)$$

因 M 係共軛對稱的，所有該等特徵值將為實數及非負數。如果 $\lambda=0$ 係對於該特徵值問題的一解答，其應為清楚的是我們具有我們之原始方程式。故 v 係用於 $\lambda=0$ 之特徵向量。

關於此方法特別強大之處係甚至當對於 (1) 沒有解答時，對於具有 λ 之最小值的 (2) 之解答係該最近之近似答案。

譬如，使用上面所提出之問題：

$$\begin{pmatrix} \overline{P1} \cdot P1 & -\overline{P1} \cdot P2 \\ -\overline{P2} \cdot P1 & \overline{P2} \cdot P2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \text{ 具有一解答 } \lambda = 0, b/a = P1/P2 \text{ 。$$

另一特徵值對應於該最大值； $\lambda = |P1|^2 + |P2|^2, b/a = -\overline{P2}/P1$

當使用一特徵值解算器以發現 a_i 之這些值時，所使用之縮放本質上係任意的。其常見的是正規化該特徵向量，且如此做將設定該等振幅；

$$\sum_i |a_i|^2 = 1$$

$$\text{譬如, } a = \frac{P2}{\sqrt{|P1|^2 + |P2|^2}}, b = \frac{P1}{\sqrt{|P1|^2 + |P2|^2}}$$

然而，該參考相位仍然為任意的 - 如果 v 係對該特徵問題的一經正規化之解答，則故為 $v \cdot e^{j\theta}$ 。構成用於 θ 之“最佳”值及如何發現該“最佳”值係一稍後段落之主題。

該特徵值 λ 之值剛好是與特徵向量之選擇有關聯的能量。該證明如下：

$$E = \left| \sum_n a_n \cdot P_n \right|^2 = \sum_n a_n \cdot P_n \cdot \sum_m \overline{a_m} \cdot \overline{P_m} = \sum_m \overline{a_m} \cdot \left(\sum_n \overline{P_m} \cdot P_n \cdot a_n \right) = \sum_m \overline{a_m} \cdot \left(\sum_n M_{mn} \cdot a_n \right)$$

由我們之特徵值方程式及該特徵向量之正規化，我們能繼續被陳述

$$E = \sum_m \overline{a_m} \cdot \left(\sum_n M_{mn} \cdot a_n \right) = \sum_m \overline{a_m} \cdot (\lambda \cdot a_m) = \lambda \cdot \sum_m \overline{a_m} \cdot a_m = \lambda$$

解決該特徵值問題

原則上， n 階之系統具有 n 個特徵值，其係藉由解決

第 n 階多項式方程式所發現。然而，我們不需要所有該等特徵值 - 僅只需要該最小值。

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} - \lambda \cdot \underline{v} = 0, \text{ 導致 } |M - \lambda \cdot I| = 0, \text{ 導致 } \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = 0$$

如果對於該問題有一正確之解答，該行列式將具有 λ 當作一因數。譬如，

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ \bar{b} & c-\lambda \end{pmatrix} \right| = (a-\lambda)(c-\lambda) - |b|^2 = 0$$

$$a \cdot c - |b|^2 - (a+c) \cdot \lambda + \lambda^2 = 0$$

如果 $a \cdot c - |b|^2 = 0$ ，則有一正確之解答。

因方程式之數目係大於未知數之數目，對於 v 有超過一組之可能的解答，但它們係全部同等的；

$$(a-\lambda) \cdot v_0 + b \cdot v_1 = 0, \frac{v_1}{v_0} = \frac{\lambda-a}{b}$$

$$\bar{b} \cdot v_0 + (c-\lambda) \cdot v_1 = 0, \frac{v_1}{v_0} = \frac{\bar{b}}{\lambda-c}$$

譬如

$$a=2, b=1+1j, c=3; 6-2-5\lambda+\lambda^2=0; \lambda=1, 4$$

$$(\lambda-2)/(1+1j) = (-1+1j)/2 \text{ 或 } 1-1j$$

$$(1-1j)/(\lambda-3) = (-1+1j)/2 \text{ 或 } 1-1j$$

故對於該對方程式之最佳解答

被 $v_1/v_0 = (-1+1j)/2$ 所給與

選擇用於該解答之“最佳”縮放

數學上言之，對於該問題之任何解答係與任何其他者一樣好。然而，我們正試著解決一工程問題。該矩陣 M 、及其特徵向量 v 兩者係頻率之函數。我們希望使用 v 之分量當作轉換函數，故具有突然改變之符號或相位係非較佳的。

$$\underline{M(\omega)} \cdot \underline{v(\omega)} = 0$$

用於二變數之問題，我們使用該代入 $a = \cos(\theta)$ 及 $b = \sin(\theta)$ ，且該解答用於 $\tan(\theta)$ 。此方法似乎以低超相產生 a 及 b 之值。然而，使用此方法迅速地變得不實用的，因該等方程式變得越來越複雜，以形成沒有關係之解答。譬如，用於 3 個變數，我們具有 2 角度，且能使用該球極映射，以給與 $a = \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)$ ， $b = \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)$ ， $c = \sin(\theta)$ 。

代替之，讓我們使用該變異方法，以決定用於 θ 之“最佳”值。我們將最佳地界定是，以意指具有該最小之總虛部分量。

現在，讓 $v' = v \cdot e^{j\theta}$ ，讓 $v = v_r + j \cdot v_i$ ，且界定我們之誤差能量如

$$SSE = \sum_i \text{Im}(v'_i)^2 = \sum_i \text{Im}((v_r + j \cdot v_i) \cdot (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)))^2 = \sum_i (v_i \cdot \cos(\theta) + v_r \cdot \sin(\theta))^2$$

讓這

$$rr = \text{Re}(v) \cdot \text{Re}(v) = \sum v_r^2, \quad ii = \text{Im}(v) \cdot \text{Im}(v) = \sum v_i^2, \quad ri = \text{Re}(v) \cdot \text{Im}(v) = \sum v_r \cdot v_i$$

接著

$$SSE = \cos(\theta)^2 \cdot ii + 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot ri + \sin(\theta)^2 \cdot rr$$

(用於 $\theta = 0$, $SSE = ii$, 其係我們之最初成本。如果可能, 我們想要減少此成本) 。

現在相對於 θ 微分, 以給與我們之方程式

$$2 \cdot (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) \cdot ri + 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (rr - ii) = 0$$

經過除以 $2 \cdot \cos(\theta)^2$, 我們獲得以下呈 $\tan(\theta)$ 之二次式;

$$ri + \tan(\theta) \cdot (rr - ii) - \tan(\theta)^2 \cdot ri = 0$$

對於該二解答, 給與 SSE 之最小值之一解答係

$$\tan(\theta) = \frac{rr - ii - \sqrt{(rr - ii)^2 + 4 \cdot ri^2}}{2 \cdot ri}$$

如果 $ri = 0$, 則我們具有二特別之情形;

如果 $ri = 0$ 及 $rr \geq ii$, 則 $\theta = 0$ 。

如果 $ri = 0$ 及 $rr < ii$, 則 $\theta = \pi/2$ 。

選擇用於 v 之最佳值中之最後步驟係確定該第一分量之實部係正的 (任何分量可被用於此目的) , 亦即

$$\begin{array}{ll} \text{步驟1.} & v' = v \cdot e^{j\theta} \\ \text{步驟2} & \text{如果 } v'_0 < 0, v' = -v' \end{array}$$

範例

$$v = \begin{pmatrix} 0.908 - 0.419j \\ 0.770 - 0.638j \\ 0.9999 - 0.01j \\ 0.343 - 0.939j \end{pmatrix},$$

$rr=2.534$, $ii=1.466$, $ri=-1.204$; 解答給與 $\theta =0.577$

$$v' = \begin{pmatrix} 0.990 + 0.143j \\ 0.993 - 0.115j \\ 0.844 + 0.537j \\ 0.800 - 0.600j \end{pmatrix}$$

$rr'=3.318$, $ii'=0.682$, $ri=0$

注意使 ii 減至最小同時地最大化 rr 及設定 ri 爲零。

技術之比較-工作範例

考慮具有二輸出之二輸入裝置（亦即上述裝置）。將有用於使每一輸出個別地減至最小之正確的解答，但對同時之最小化僅只一大約之解答。

輸出1轉移導納： $P1_1 = 0.472 + 0.00344j$, $P2_1 = 0.479 - 0.129j$

輸出2轉移導納： $P1_2 = -0.206 - 0.195j$, $P2_2 = 0.262 + 0.000274j$

形成二誤差貢獻度矩陣

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.223 & 0.226 - 0.063j \\ 0.226 + 0.063j & 0.246 \end{pmatrix}; \quad |M1| = 0, \text{ 亦即正確之解答可能}$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 0.080 & -0.054 + 0.050j \\ -0.054 - 0.050j & 0.069 \end{pmatrix}; \quad |M2| = 0, \text{ 亦即正確之解答可能}$$

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 0.303 & 0.171 - 0.012j \\ 0.171 + 0.012j & 0.315 \end{pmatrix}; \quad |M1 + M2| = 0.066$$

我們現在使用該“tan theta”方法以解決該三種情況。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0.718 - 0.093j \\ -0.682 - 0.098j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0.623 - 0.270j \\ 0.692 + 0.244j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{1+2} = \begin{pmatrix} 0.719 - 0.024j \\ -0.694 - 0.025j \end{pmatrix}$$

現在用於該特徵向量方法。我具有二特徵向量解算器；一解算器同時地解決所有向量，且另一解算器解決一特定之特徵值。當該等向量係複合的時（兩答案係正確的），它們給與不同之數值解答，但在應用該“最佳”的縮放演算法之後，兩解算器給與和那些在上面者相同之結果。

M1：特徵值，0 及 0.469：

在縮放之前的特徵向量： $(-0.698 + 0.195j, 0.689 - 0.0013j)$ 或 $(0.724, -0.664-0.184j)$
 在縮放之後的特徵向量： $(0.718 - 0.093j, -0.682 - 0.098j)$

M2：特徵值，0 及 0.149：

在縮放之前的特徵向量： $(-0.5 + 0.46j, 0.734 - 0.0030j)$ 或 $(0.498 - 0.462j, 0.724)$
 在縮放之後的特徵向量： $(0.623 - 0.270j, 0.692 + 0.244j)$

M1+M2：特徵值，0.137 及 0.480：

在縮放之前的特徵向量： $(-0.717 + 0.051j, 0.695 - 0.0007j)$ 或 $(0.719, -0.693-0.049j)$
 在縮放之後的特徵向量： $(0.719 - 0.024j, -0.694 - 0.025j)$

加入第三輸入

現在考慮來自第三輸入通道之貢獻度。

輸出1轉移導納： $P3_1 = -0.067 - 0.180j$
 輸出2轉移導納： $P3_2 = 0.264 + 0.0014j$

將這些貢獻度加入至該誤差矩陣

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.223 & 0.226 - 0.063j & -0.032 - 0.085j \\ 0.226 + 0.063j & 0.246 & -0.009 - 0.095j \\ -0.032 + 0.085j & -0.009 + 0.095j & 0.037 \end{pmatrix}; \quad |M1| = 0$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 0.080 & -0.054 + 0.050j & -0.055 + 0.051j \\ -0.054 - 0.050j & 0.069 & 0.069 - 0.0004j \\ -0.055 - 0.051j & 0.069 + 0.0004j & 0.070 \end{pmatrix}; \quad |M2| = 0$$

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 0.303 & 0.171 - 0.012j & -0.087 - 0.034j \\ 0.171 + 0.012j & 0.315 & 0.061 - 0.095j \\ -0.087 + 0.034j & 0.061 + 0.095j & 0.107 \end{pmatrix};$$

$$|M1 + M2| = 0$$

現在對於該結合問題有一正確之解答，且 $M1 + M2$ 具有一零特徵值。（注意該 $M1$ 及 $M2$ 每一個分別具有二零特徵值 - 亦即它們具有一退化之特徵值。對該問題有二完全正交之解答，且這些二解答之任何線性總和係亦一解答）。

$M1 + M2$ ：特徵值是 0、0.218 及 0.506：

在縮放之後的特徵向量：(0.434 - 0.011j, -0.418 + 0.199j, 0.764 + 0.115j)

如上面所顯示，用於二個輸入，該“tan theta”方法係較快及更簡單地施行，然而用於三或四個輸入，該“有尺度特徵向量”方法係更容易。兩方法產生該相同之結果。用於一正確之解答，輸入變數之數目必需大於測量點之數目。當沒有正確之解答係可用的時，藉由使用特徵值分析當作一用於該一般問題之工具，我們獲得該“最佳”解答。

用於該一般之‘m’個輸入，‘n’個輸出之最小化問題，在一演算法上有二原理變化，以發現該最佳之 m 個輸入。這些可被稱為該平行之“一起”方法及該串連之“一次一個”方法。大致上，這些可被任意地組合。如果 $m > n$ ，

則所有路線以相同、正確之答案終止（在捨入誤差內）。如果 $m \leq n$ ，則僅只有大約之解答，且所採取之路線將影響該最後之結果。如果 $m < n$ ，該串連方法係有用的，且部份之該 n 個輸出係比其它更重要。該等重要之輸出被正確地解決，且及那些殘餘部份獲得一最佳之配合解答。

該平行、“一起”演算法

圖 10a 係一平行解算器之方塊圖。一誤差矩陣被形成，且對應於該最低特徵值之特徵向量被選擇。如果 $m > n$ ，則該特徵值將為零，且該結果正確。

該遞迴或連續之“一次一個”演算法

圖 10b 係一遞迴解算器之方塊圖，一用於該最重要之輸出的誤差矩陣被形成，且對應於該 $(m-1)$ 最低特徵值之特徵向量被形成。這些被用作新的輸入向量，且該過程被重複。該過程以 2×2 特徵值解答終止。回溯法接著對該原始問題重編該解答。

關於所有遞迴演算法，此過程可被轉變成一迭代（或連續）之過程。用於該第一 $m-2$ 個循環，所有該等輸出具有正確之解答。用於該殘餘之循環，這些解答之最佳線性組合被發現最小化該等殘餘誤差。

範例 1： $m=3$ ， $n=2$

$$\begin{aligned} \text{輸出1轉移導納:} & \quad P1_1 = 0.472 + 0.00344j \\ \text{輸出2轉移導納:} & \quad P1_2 = -0.206 - 0.195j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{輸出1轉移導納:} & \quad P2_1 = 0.479 - 0.129j \\ \text{輸出2轉移導納:} & \quad P2_2 = 0.262 + 0.000274j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{輸出1轉移導納:} & \quad P3_1 = -0.067 - 0.180j \\ \text{輸出2轉移導納:} & \quad P3_2 = 0.264 + 0.0014j \end{aligned}$$

一起

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 0.303 & 0.171 - 0.012j & -0.087 - 0.034j \\ 0.171 + 0.012j & 0.315 & 0.061 - 0.095j \\ -0.087 + 0.034j & 0.061 + 0.095j & 0.107 \end{pmatrix};$$

$$|M1 + M2| = 0$$

M1 + M2：特徵值為 0、0.218 及 0.506：

在縮放之後的特徵向量：(0.434 - 0.011j, -0.418 + 0.199j, 0.764 + 0.115j)

一次一個

解決輸出 1，且接著輸出 2。因 $3 > 2$ ，我們將獲得該相同之解答。

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.223 & 0.226 - 0.063j & -0.032 - 0.085j \\ 0.226 + 0.063j & 0.246 & -0.009 - 0.095j \\ -0.032 + 0.085j & -0.009 + 0.095j & 0.037 \end{pmatrix}; \quad |M1| = 0$$

M1：特徵值為 0、0 及 0.506：

特徵向量V1：(0.748, -0.596 - 0.165j, 0.085 - 0.224j)

特徵向量V2：(-0.062 + 0.026j, 0.096 + 0.350j, 0.929)

新的問題：選擇 a 及 b，使得該 $a \cdot V1 + b \cdot V2$ 最小化輸出 2。

新的轉移導納係：

$$\begin{aligned}pv1 &= (P1_2 \ P2_2 \ P3_2).V1 = -0.287 - 0.250j \\pv2 &= (P1_2 \ P2_2 \ P3_2).V1 = 0.287 + 0.100j\end{aligned}$$

我們現在使用這些二轉移導納當作該等輸出重複該過程。

新的誤差矩陣係

$$M1' = \begin{pmatrix} 0.145 & -0.107 + 0.043j \\ -0.107 - 0.043j & 0.093 \end{pmatrix}; |M1| = 0, \text{ 亦即正確之解答可能}$$

M1'特徵值，0 及 0.237

在縮放之後的特徵向量：(0.608 - 0.145j, 0.772 + 0.114j)

現在組合 V1 及 V2 以獲得該等輸入

$$(0.608 - 0.145j) V1 + (0.772 + 0.114) V2 = (0.404 - 0.095j, -0.352 + 0.268j, 0.737 - 0.042j)$$

正規化及縮放該結果：(0.434 - 0.011j, -0.418 + 0.199j, 0.764 + 0.115j)

注意這是與先前一樣，剛好如其原樣。

範例 2：m=3，n>=3

在此我們具有 1 個聲波壓力輸出及若干速度輸出。

聲波有尺度的誤差矩陣係 M1，被加總速度有尺度的誤差矩陣係 M2。

$$M1 = \begin{pmatrix} 3.928 & -2.667 + 2.473j & -2.674 + 2.506j \\ -2.667 - 2.473j & 3.367 & 3.393 - 0.018j \\ -2.674 - 2.506j & 3.393 + 0.018j & 3.418 \end{pmatrix}; \quad |M1| = 0$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 1.023 & 0.602 - 0.112j & -0.528 + 0.409j \\ 0.602 + 0.112j & 0.977 & -1.144 + 0.205j \\ -0.528 - 0.409j & -1.144 - 0.205j & 5.473 \end{pmatrix}; \quad |M2| = 2.510$$

一起

所有 n 個輸出誤差矩陣被加總，且對應於該最低特徵值之特徵向量被發現。

$$\text{特徵值 } (M1 + M2) = 1.146, 3.869, 13.173$$

$$\text{解答} = (0.739 - 0.235j, 0.483 + 0.306j, 0.246 + 0.104j)$$

一次一個

事實上，我們僅只解決該音響效果問題，然後一起做該剩下部份。該方式，該音響效果問題正好被解決。

$$\text{特徵值 } (M1) = 0, 0, 10.714$$

$$V1 = (0.770 - 0.199j, 0.376 + 0.202j, 0.377 + 0.206j)$$

$$V2 = (0.097 - 0.071j, 0.765 + 0.010j, -0.632 + 0.0016j)$$

因 $V1$ 及 $V2$ 兩者對應於零特徵值， $a.V1 + b.V2$ 亦係一對應於零特徵值之特徵向量 - 亦即其係對該音響效果問題的一正確之解答。

用於該結構之問題使用 a 及 b 形成該“一起”最小化

$$M2 = \begin{pmatrix} 1.314 & -0.381 + 0.341j \\ -0.381 - 0.341j & 0.093 \end{pmatrix}; \quad |M2| = 5.098$$

M1' 特徵值，1.222 及 4.172

在縮放之後的特徵向量：(0.984 - 0.016j, 0.113 + 0.115j)

現在結合 V1 及 V2 以獲得該等輸入

$$(0.984 - 0.016j) V1 + (0.113 + 0.115j) V2 = (0.776 - 0.207j, 0.473 + 0.283j, 0.290 - 0.124j)$$

正規化及縮放該結果：(0.755 - 0.211j, -0.466 + 0.270j, 0.246 + 0.104j)

注意這是類似的，但與該“一起”解答不完全相同。當延伸至涵蓋頻率之範圍時，其對該音響效果問題給與一精密之結果，在此數值捨入於該連續之案例中造成該很輕微之非零壓力。然而，如在圖 10c 所示，與該平行之解答作比較，該連續之解答對於該結構之問題係一稍微較差之解答。

如在上面提出者，該二方法係不互相排斥，且該平行方法可在該連續過程中之任何點被採納，特別是完成該過程。特別是當部份該等輸出係比其他更重要時，在輸入之數目不會超過輸出的數目之處，該連續方法係有用的。該等重要之輸出被正確地解決，且那些殘餘部份獲得一最佳之配合解答。

【圖式簡單說明】

本發明係當作範例圖樣地說明於所附之圖面中，其中

:

圖 1a 係一接觸敏感螢幕之平面圖；

圖 1b 係圖 1a 之螢幕之一 FE（有限元素）模型，顯示內部及外部音響效果；

圖 2a 係一曲線圖，在節點 22 對著頻率顯示互導納（dB），用於施加在二位置之額定 1N 輸入；

圖 2b 係一曲線圖，在節點 44 對著頻率顯示互導納（dB），用於施加在二位置之額定 1N 輸入；

圖 2c 係一曲線圖，在軸上 10 公分處對著頻率顯示聲壓位準，用於施加在二位置之額定 1N 輸入；

圖 3a 係在分開位置的二觸覺介面信號之一說明；

圖 3b 係該裝置之各零組件的方塊圖；

圖 4a 係一曲線圖，顯示用於每一激振器之輸入頻譜，以達成雙區域觸覺介面；

圖 4b 係一曲線圖，顯示用於每一激振器之輸入頻譜，以最佳化無聲的雙區域觸覺介面；

圖 5a 係一曲線圖，對著用於該速度之頻率及用於圖 4a 及 4b 之輸入的壓力顯示該殘餘反應（聲壓位準）；

圖 5b 係一曲線圖，對於圖 4a 之輸入繪製在該接觸螢幕上之二點的合成速度；

圖 5c 係一曲線圖，對於圖 4a 及 4b 之輸入對著頻率繪製該信號噪音比（SNR）；

圖 6 係另一選擇之接觸敏感裝置；

圖 7a 係在該螢幕上之一點及在軸上 10 公分處用於第三信號的聲壓（dB）對著頻率之曲線圖；

圖 7b 係一曲線圖，顯示用於無聲的雙區域觸覺介面之每一激振器的輸入頻譜；

圖 7c 對著頻率比較該 SNR，而用於圖 4b 及圖 7b 之輸入頻譜；

圖 8a 使用二點最小化方案繪製在接觸螢幕上之二點的速度中之同時減少；

圖 8b 顯示用於該接觸螢幕上之節點線的三取樣點；

圖 8c 分別使用二及三個輸入對著頻率繪製該信號噪音比，而用於圖 8b 之螢幕，並具有最佳化用於三節點之結果；

圖 8d 分別使用二及三個輸入對著頻率繪製該信號噪音比，而用於圖 8b 之螢幕，並具有最佳化用於七節點之結果；

圖 9a 對著頻率顯示該軸向聲壓位準，而用於具有不對稱性的系統中之每一通道；

圖 9b 對著頻率顯示該 rms 平均聲壓位準，而用於具有正規化輸入位準之組合通道及最佳化通道；

圖 9c 顯示用於圖 9b 所顯示之信號的信號至噪音配額；

圖 10a 係一平行解算器之方塊圖；

圖 10b 係一遞迴解算器之方塊圖，及

圖 10c 比較用於圖 10a 及 10b 之解答的速度減少性能。

【 主 要 元 件 符 號 說 明 】

10：接 觸 敏 感 裝 置

12：接 觸 敏 感 螢 幕

14：墊 片

16：激 振 器

17：感 測 器

18：激 振 器

20：處 理 器

22：節 點

44：節 點

七、申請專利範圍：

1. 一種接觸敏感裝置，包括：一面板，其能夠支援彎曲波；一使用者可存取之接觸敏感螢幕，其在該面板的一面上或形成該面板之該面的一部份，該接觸敏感螢幕具有複數感測區域；複數激振器，其耦接至該面板，以施加彎曲波至該面板，以回應於該使用者接觸該一或多個感測區域而在該等感測區域之一或多個提供觸覺回饋(tactile feedback)，該觸覺回饋包含所欲之觸覺信號(haptic signals)；及信號處理機構，其配置成施加信號至該等激振器，以便操縱該等彎曲波，使得各所欲之觸覺信號被提供於被接觸之該感測區域作為一回應且於其他至少一個感測區域被最小化。

2. 如申請專利範圍第 1 項之接觸敏感裝置，其中該信號處理機構被配置成施加具有小的或最小之聲波分量的彎曲波信號。

3. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，包括 n 個數目之信號感測區域及 $n+1$ 個數目之激振器。

4. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，其中該面板係意欲共振的，且其中藉由該等激振器所施加之信號造成該面板共振。

5. 如申請專利範圍第 4 項之接觸敏感裝置，其中該信號操縱係使得藉由該使用者所接觸之信號感測區域被造成為腹點的，且其它之每一感測區域被造成為節點的。

6. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，其

中該信號處理機構施加信號至該等激振器，以便在該複數感測區域同時地提供觸覺回饋。

7. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，其中該等激振器係環繞該面板隔開。

8. 如申請專利範圍第 7 項之接觸敏感裝置，其中該等激振器被定位在該面板之周邊。

9. 如申請專利範圍第 7 項之接觸敏感裝置，其中該等激振器被定位在該面板上，以助長反對稱的模式。

10. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，其中該信號處理機構被配置成控制至每一激振器之信號的時序、相位及頻率之至少一個。

11. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，其中該面板被終止，以減少彎曲波振動之邊緣反射。

12. 如申請專利範圍第 1 或 2 項之接觸敏感裝置，其中各所欲之觸覺信號之該經施加彎曲波之振幅於被該使用者接觸之該感測區域被最大化。

13. 一種操作如申請專利範圍第 1 至 12 項之任一項所申請的接觸敏感裝置之方法，包括以下步驟：感測由使用者所接觸之螢幕的一或多個區域；及處理與施加信號至複數激振器，該複數激振器在該等感測區域之一或多個包含所欲之觸覺信號，以操縱該面板中之該彎曲波，使得各所欲之觸覺信號被提供於被接觸之該感測區域作為一回應且於其他至少一個感測區域被最小化。

14. 如申請專利範圍第 13 項之方法，包括處理被施

加至該等激振器之信號，以便同時地提供觸覺回饋至複數感測區域，而減少該等感測區域間之串音或使該等感測區域間之串音減至最小。

15. 如申請專利範圍第 13 或 14 項之方法，其中該信號處理包括 n 個數目之信號感測區域及 $n+1$ 個數目之激振器。

16. 如申請專利範圍第 13 或 14 項之方法，其中該面板係意欲共振的，且其中該方法包括以該等激振器施加信號，以造成該面板共振。

17. 如申請專利範圍第 13 或 14 項之方法，包括操控該等信號，以致藉由該使用者所接觸之信號感測區域被造成為腹點的，且其它之每一感測區域被造成為節點的。

18. 如申請專利範圍第 17 項之方法，其中該操控包括調整至最少二激振器之信號的時序、相位及頻率之至少一個，以控制該面板上之來自該至少二激振器的行進波相交之位置，且致使來自該至少二激振器的行進波係在該相交位置處於一致之振幅最大值。

19. 如申請專利範圍第 13 或 14 項之方法，包括施加信號至該等激振器，以便在該複數感測區域同時地提供觸覺回饋。

20. 一種攜載電腦程式碼之載體，以當運轉時實施如申請專利範圍第 13 至 19 項之方法。

圖式

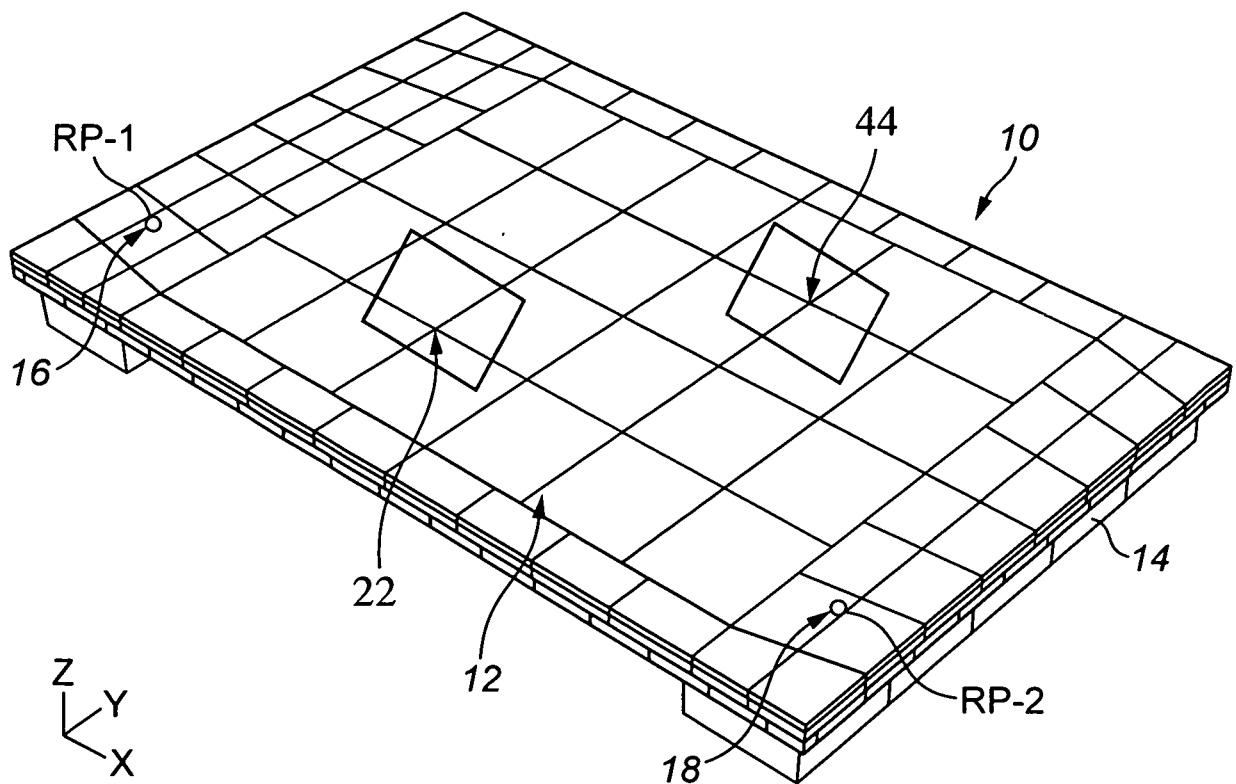
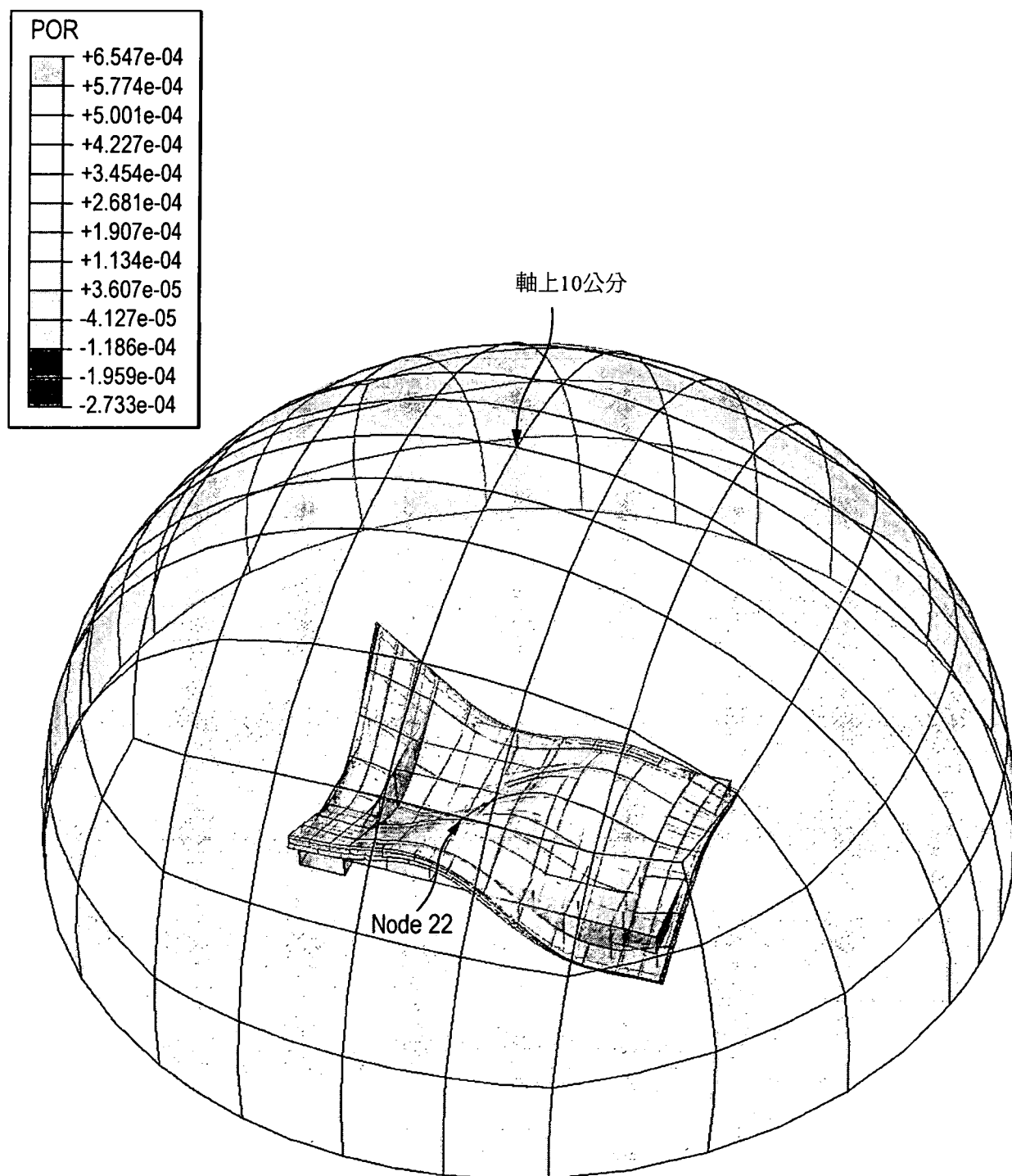
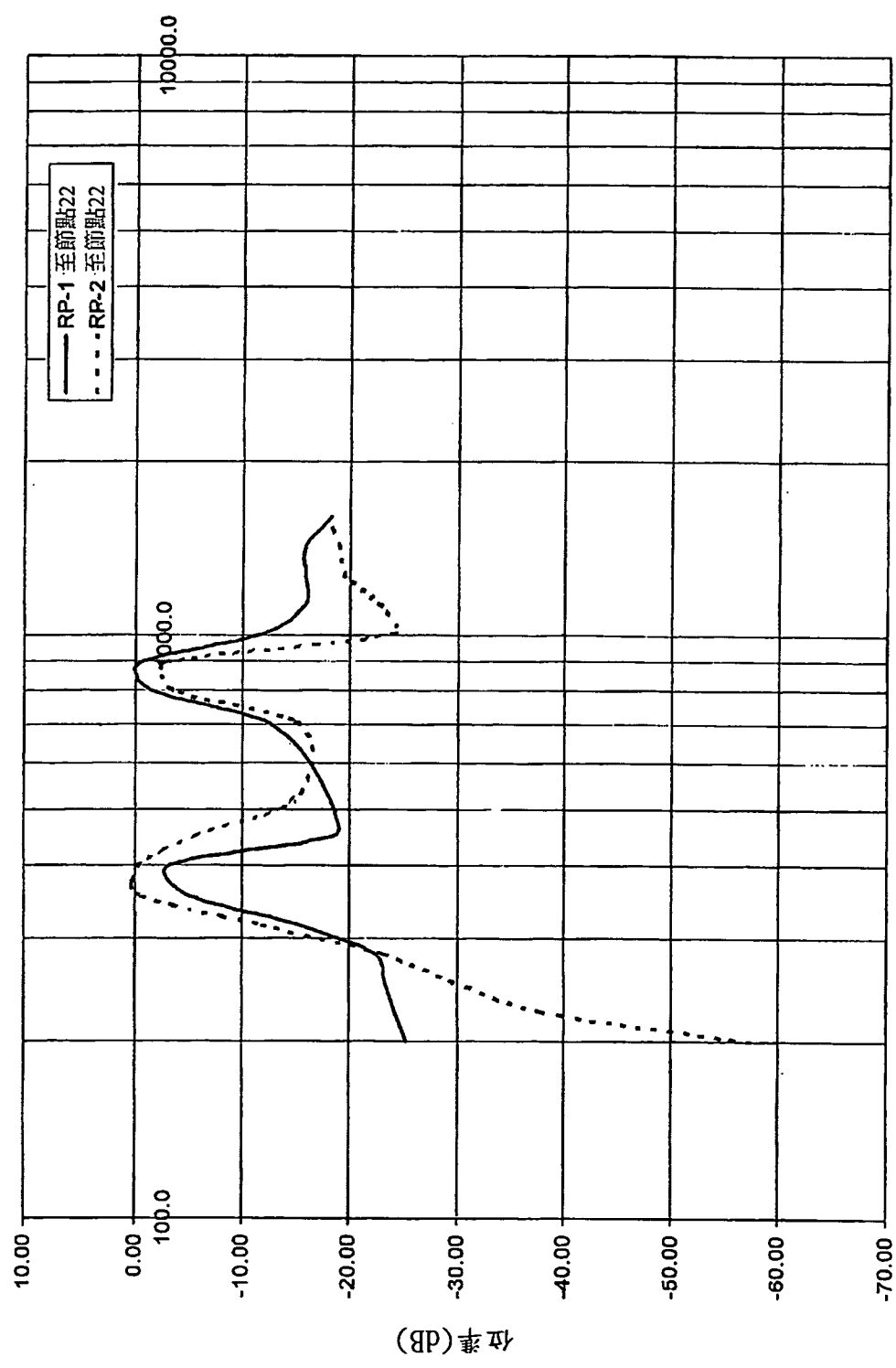


圖1a



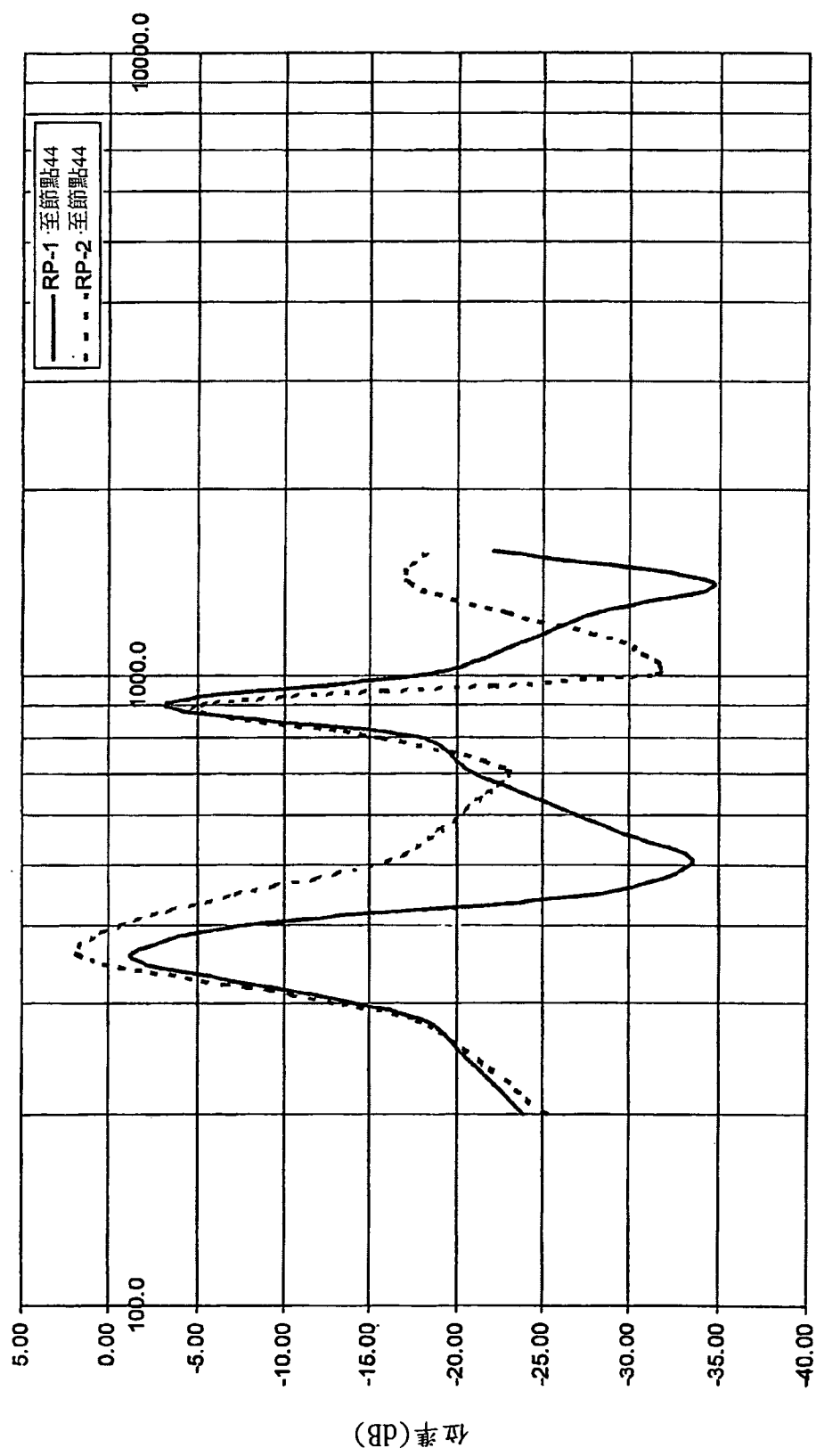
Z
Y
X

圖 1b



頻率 (Hz)

圖2a



頻率 (Hz)

圖 2b

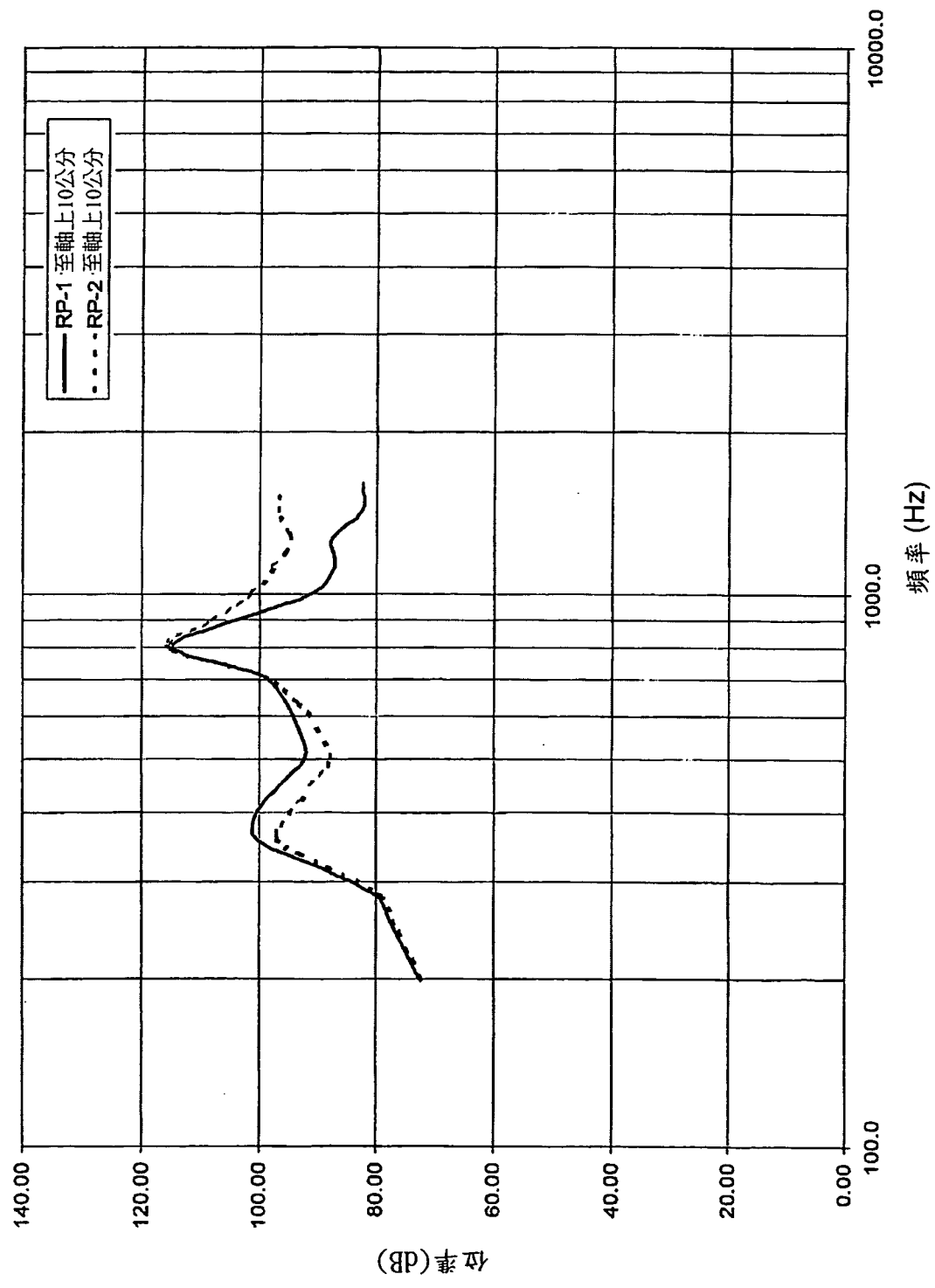


圖2c

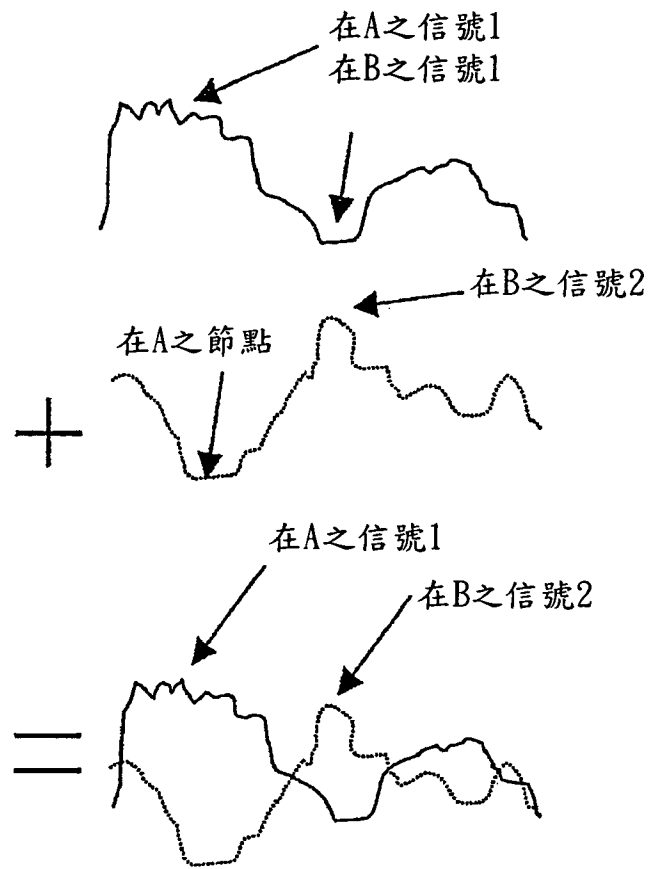


圖3a

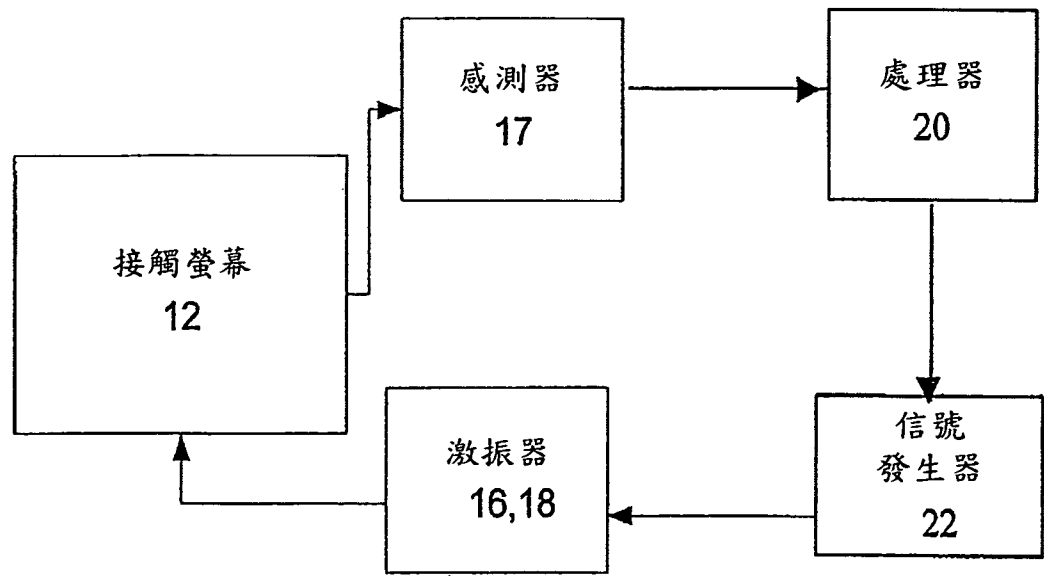
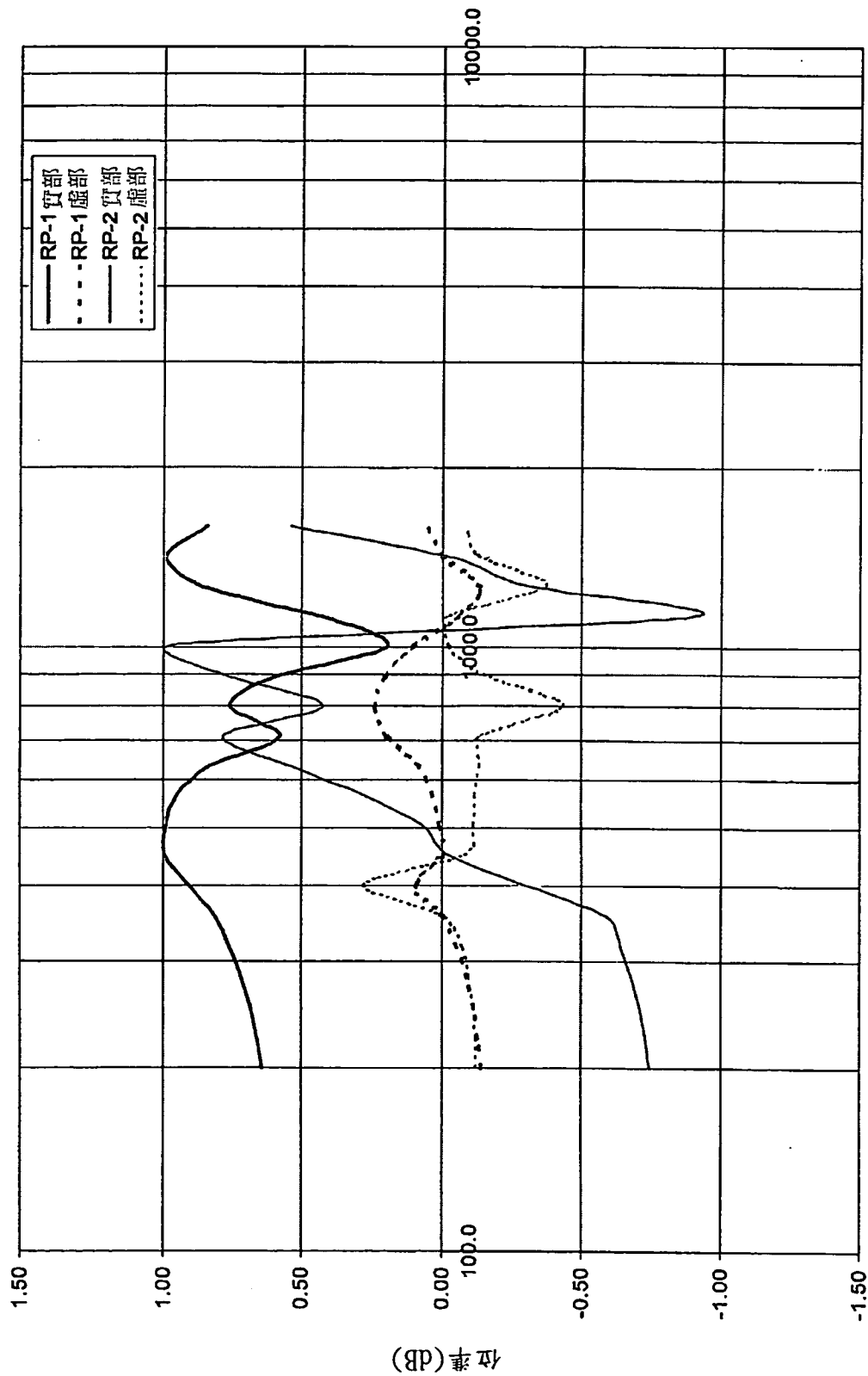
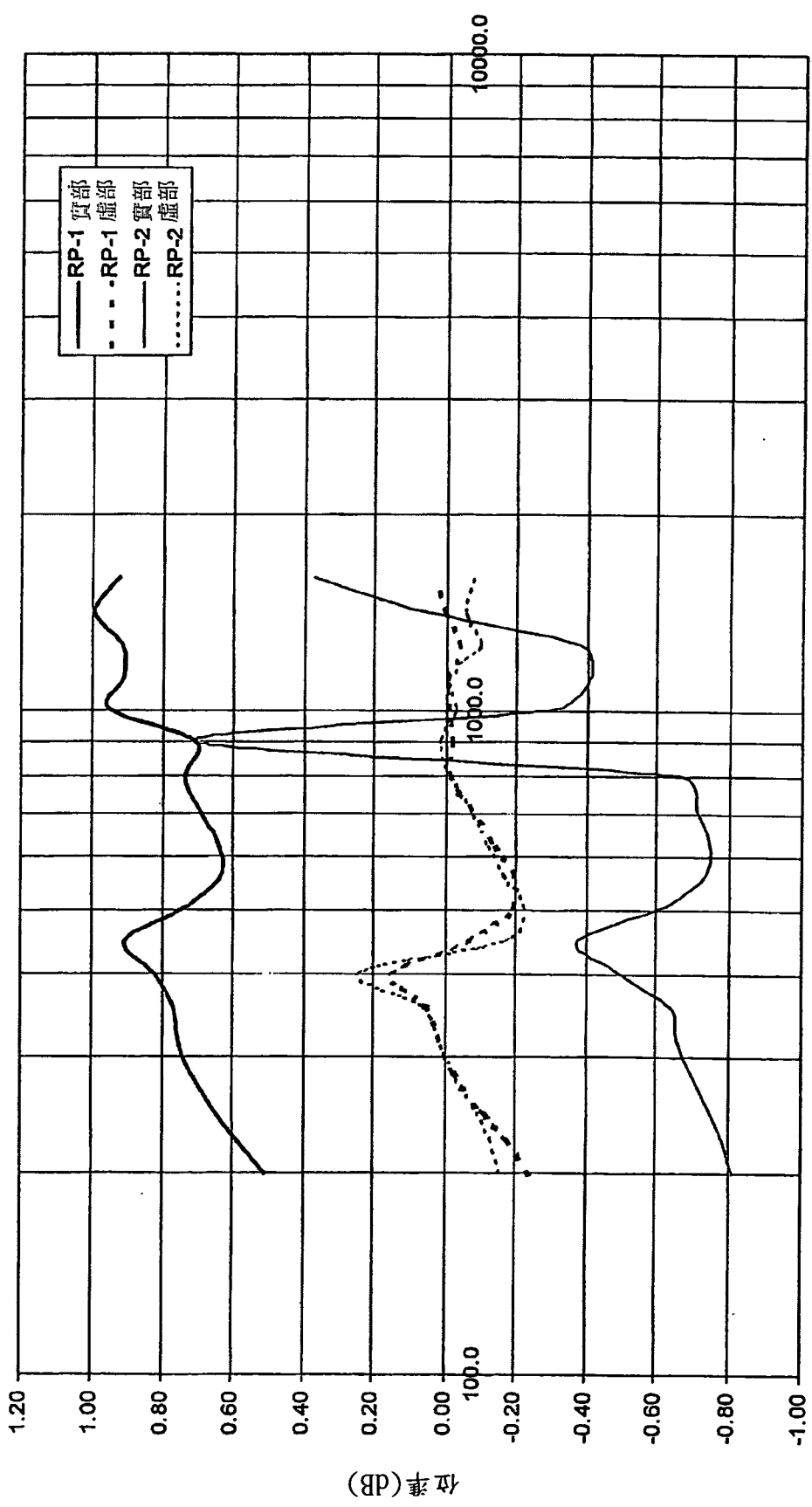


圖3b



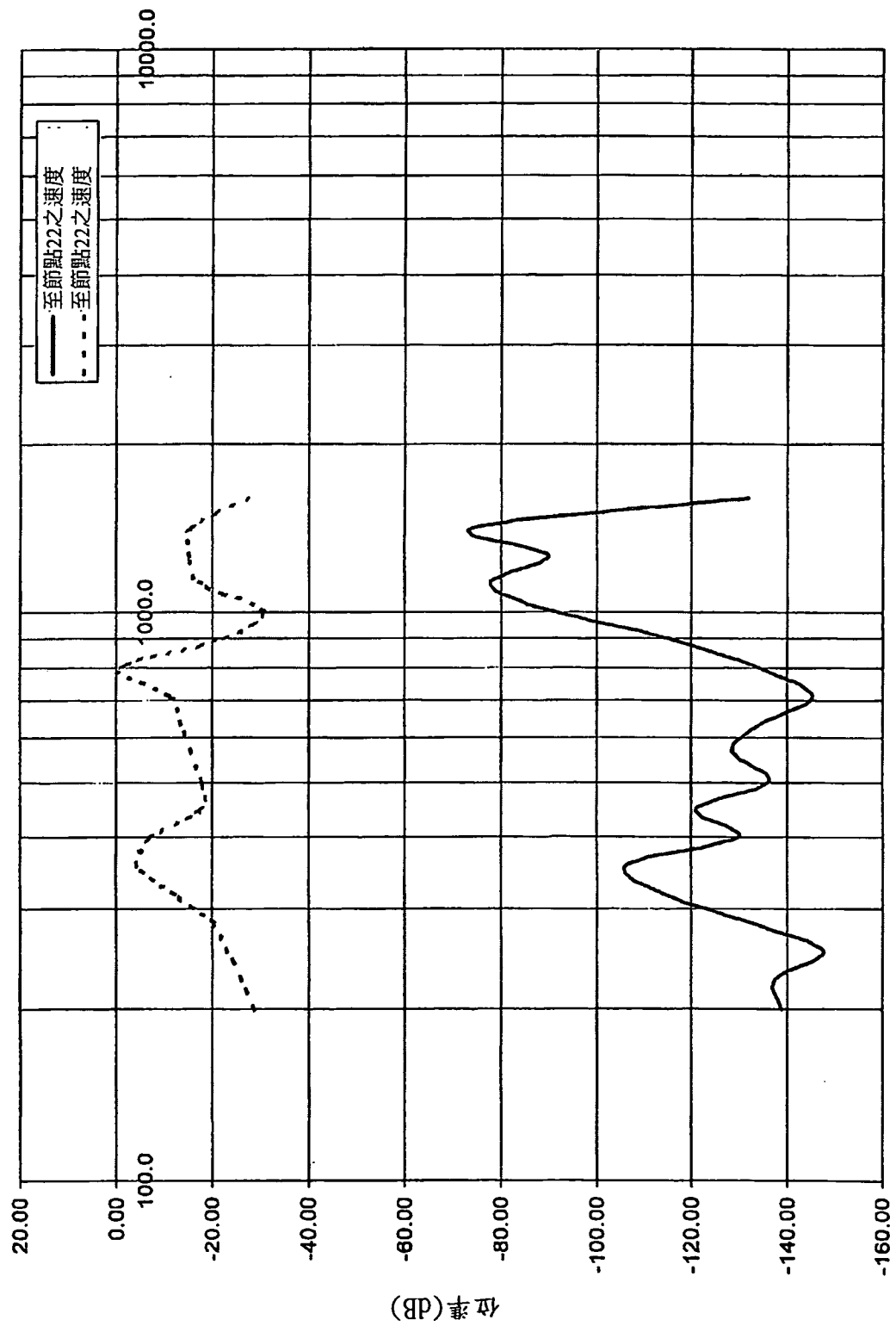
頻率 (Hz)

圖4a



頻率 (Hz)

圖 4b



頻率(Hz)

圖5a

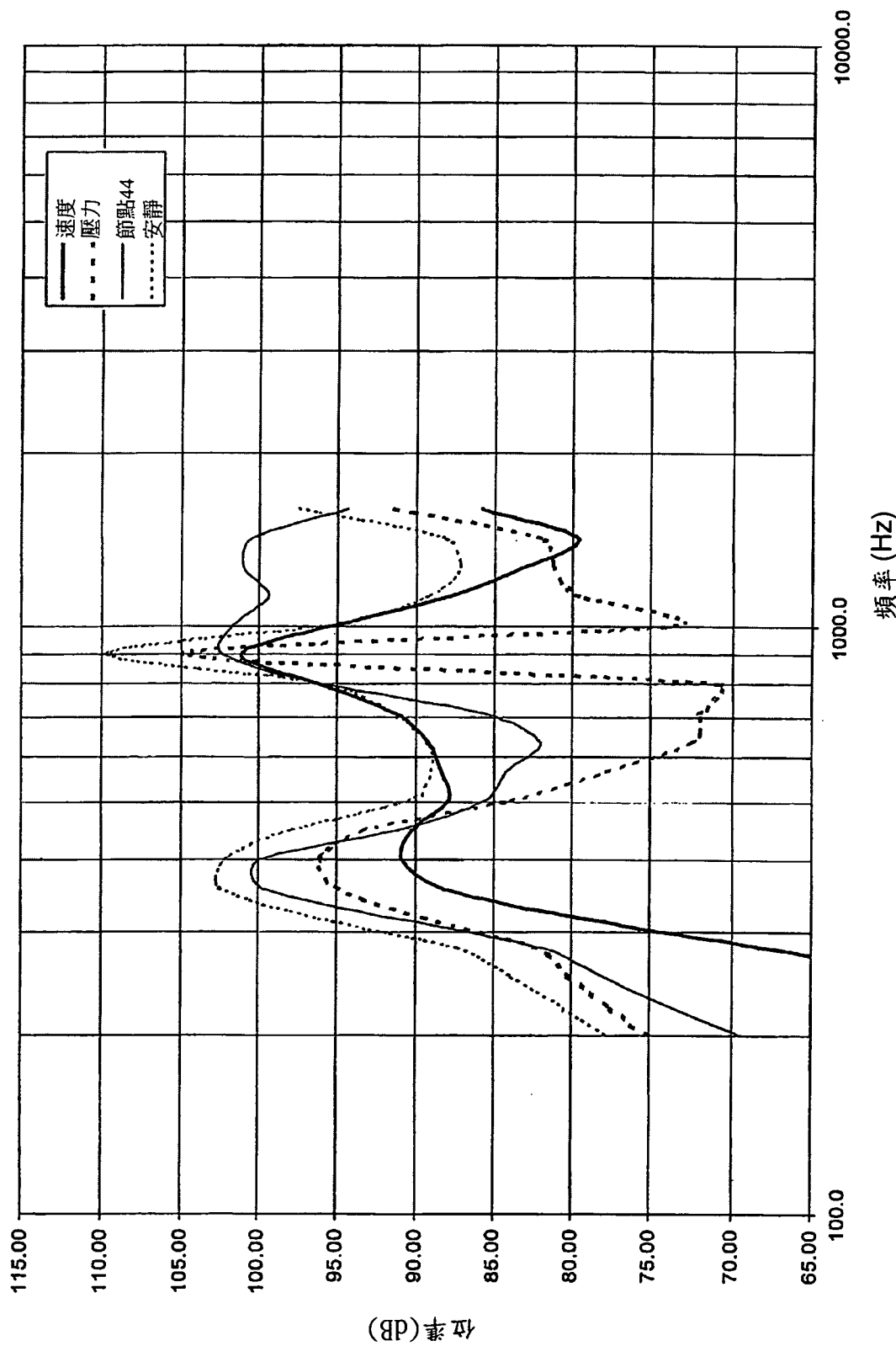
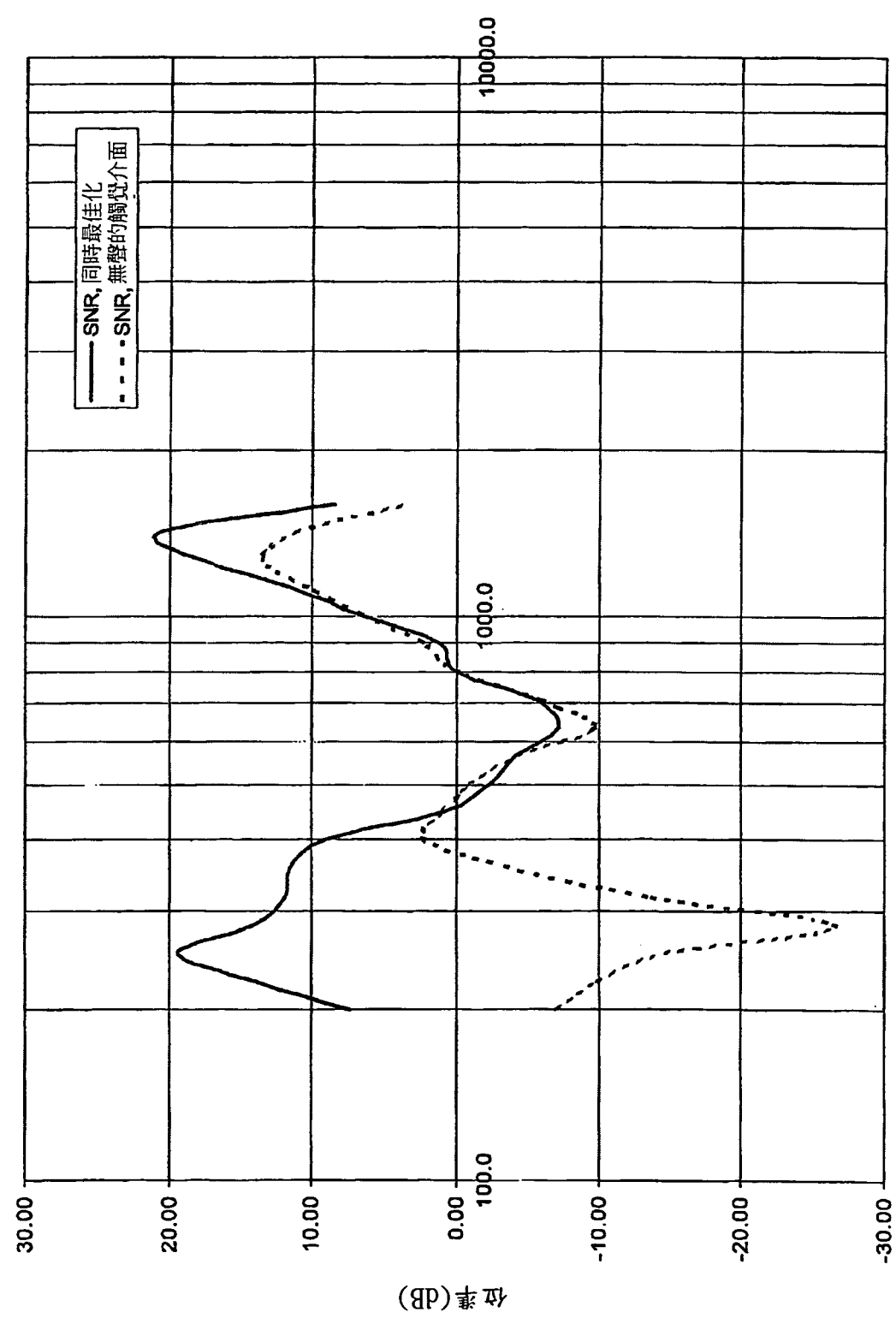


圖 5b



頻率 (Hz)

圖5c

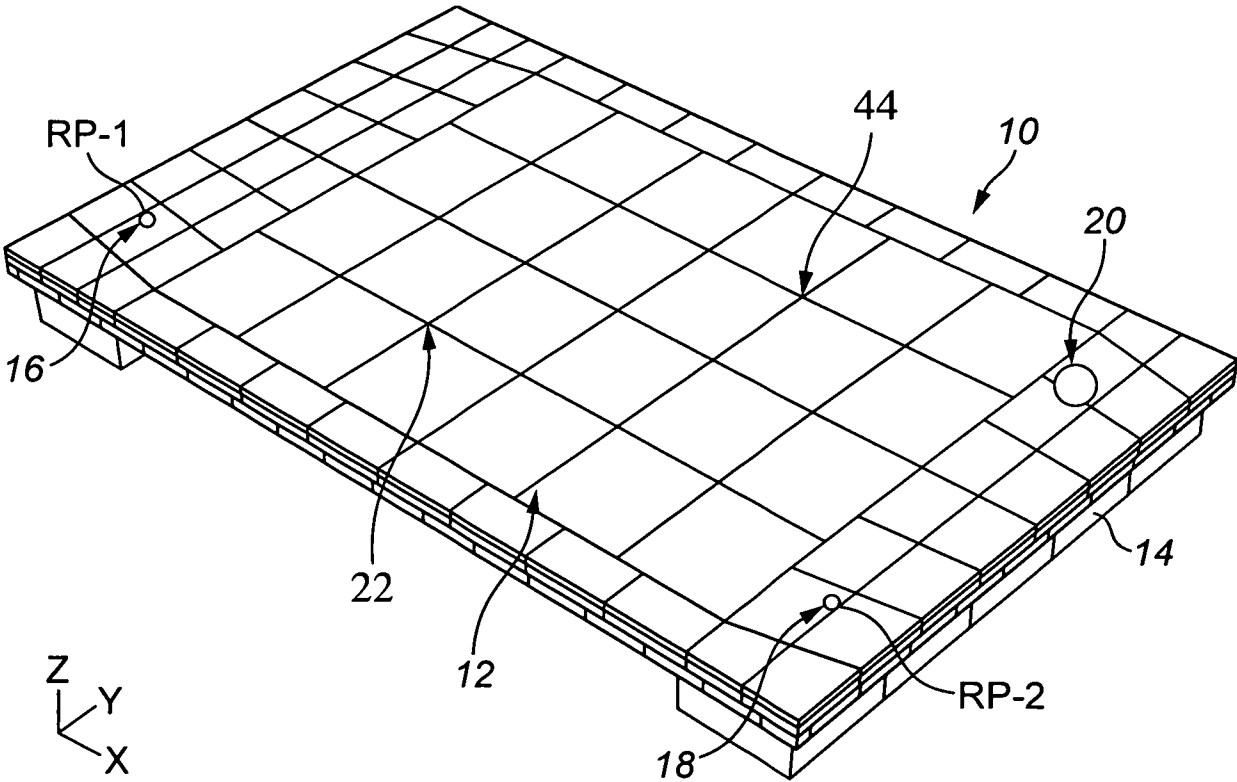


圖6

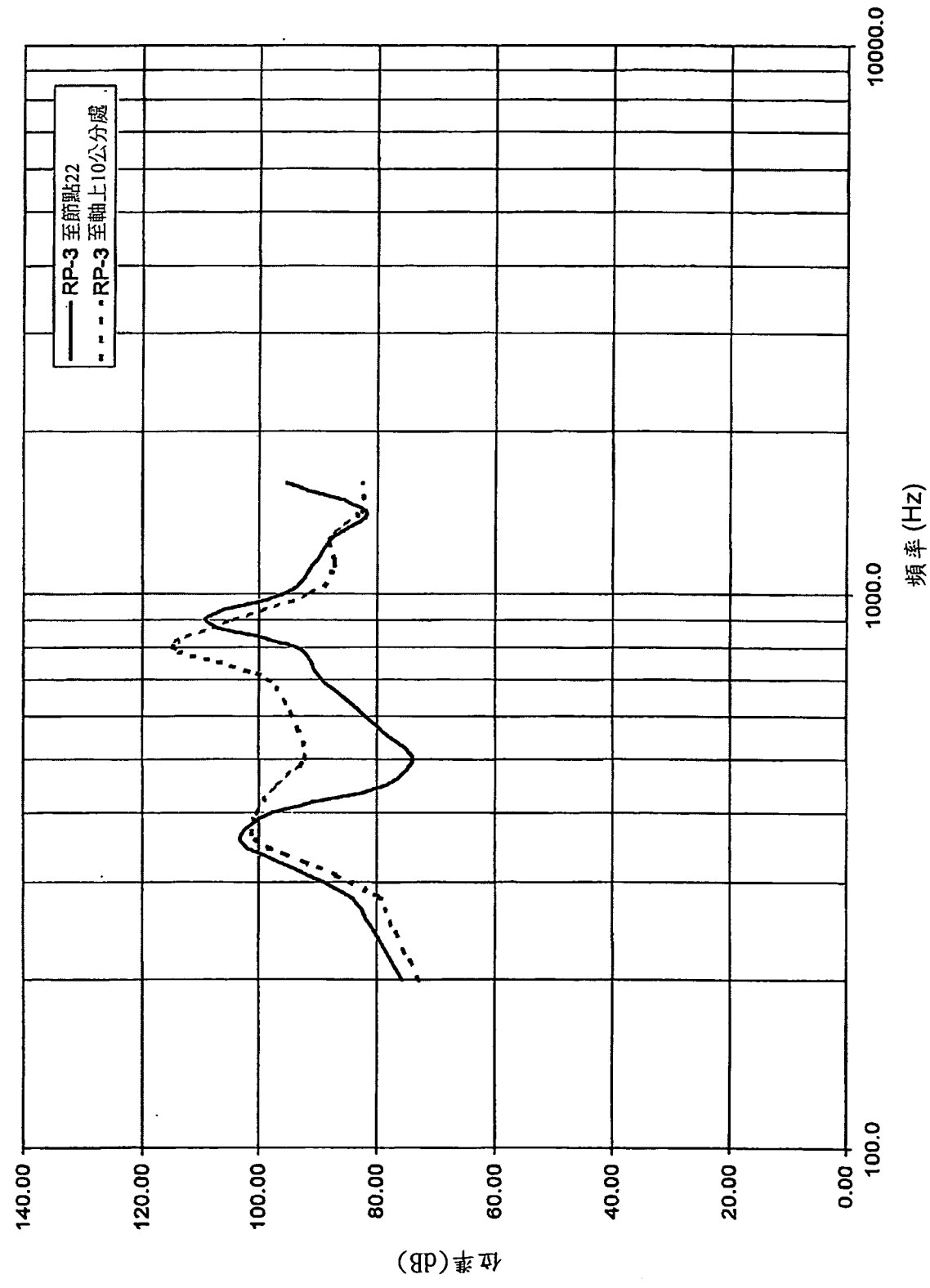


圖7a

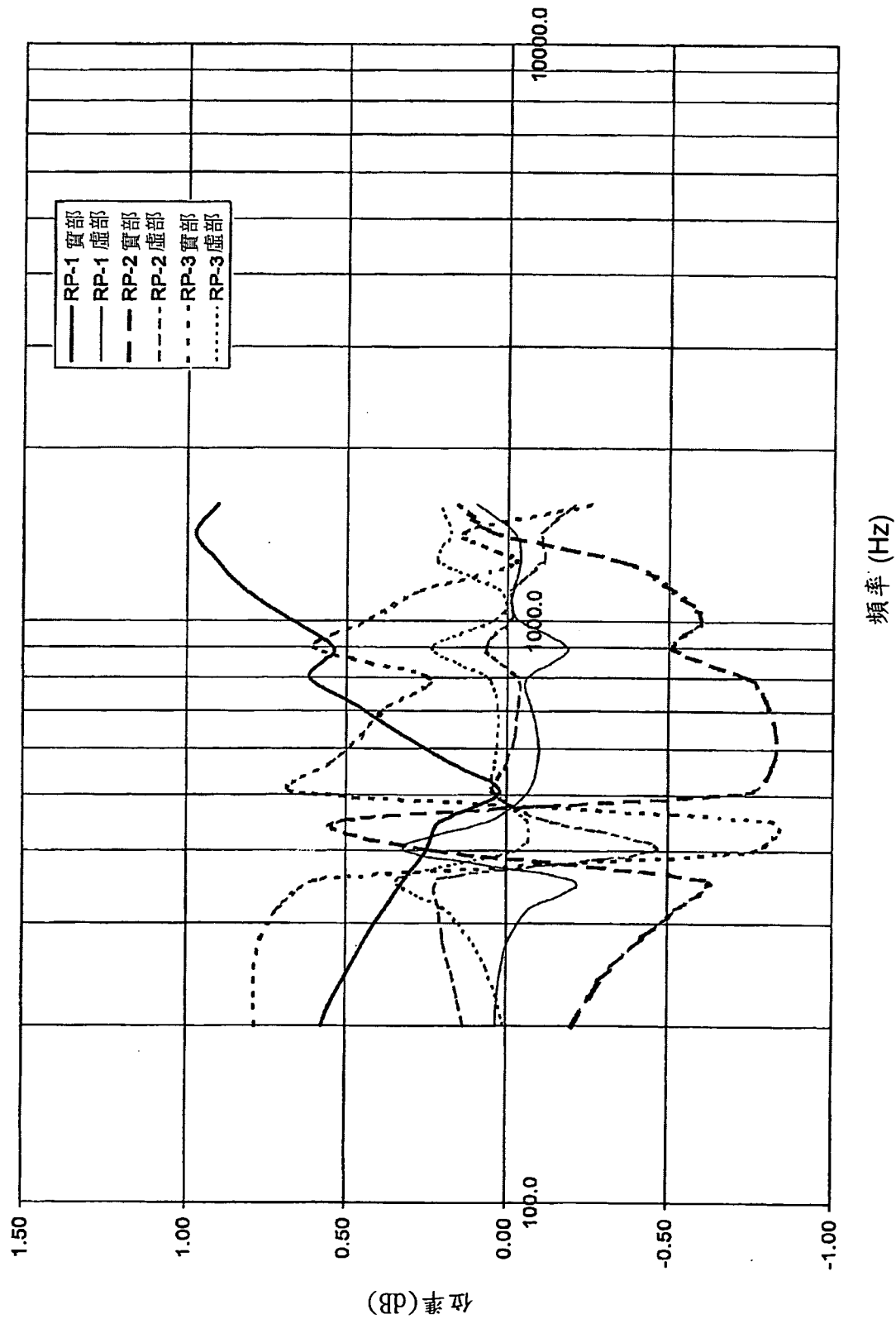


圖 7b

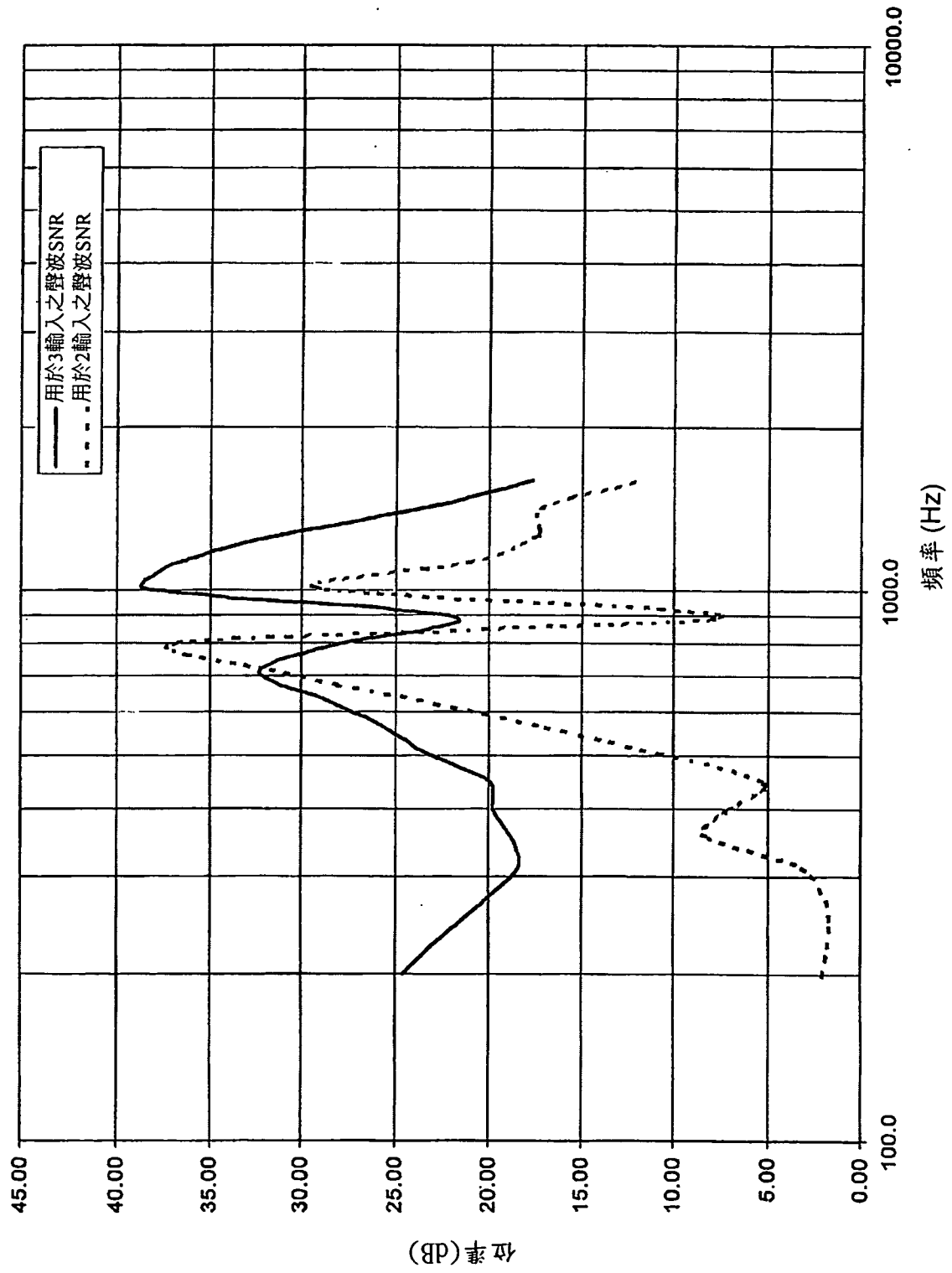


圖7c

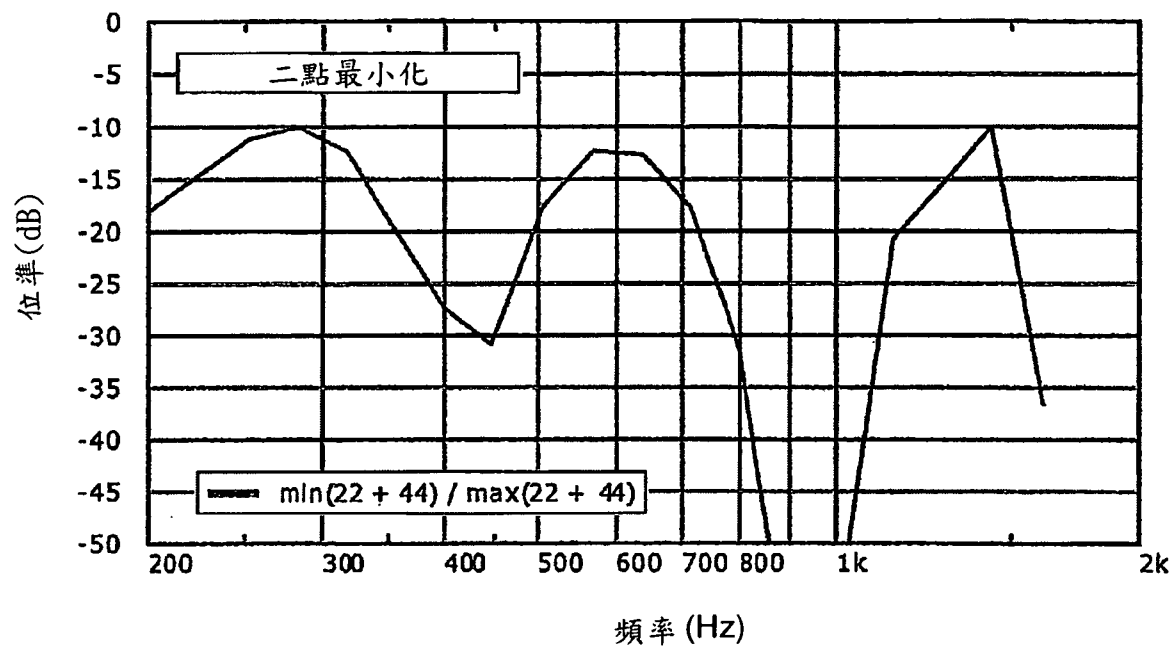


圖 8a

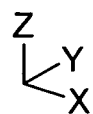
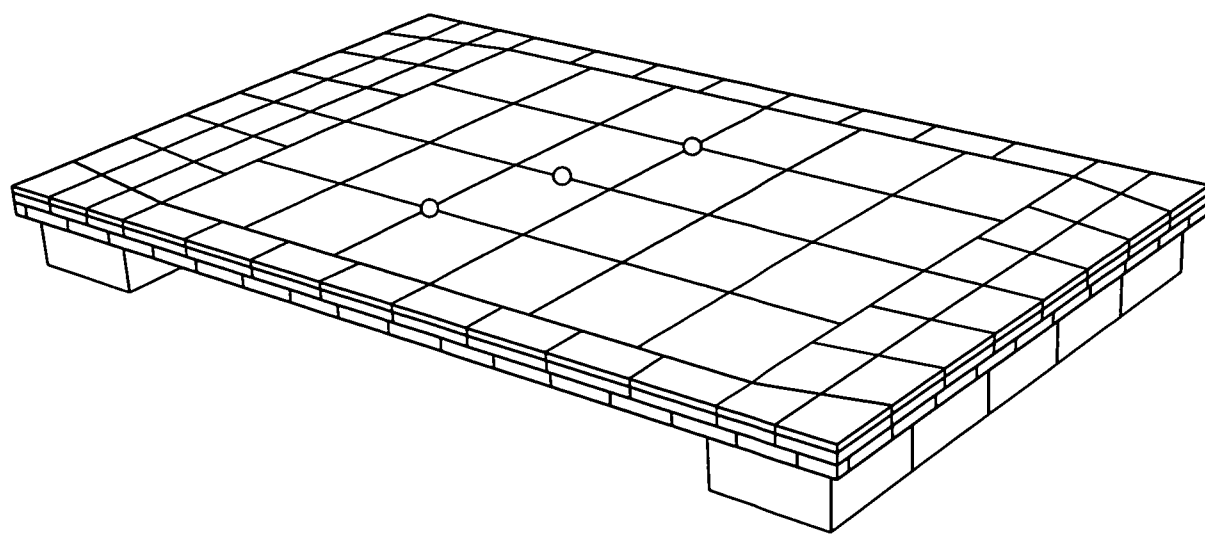


圖 8b

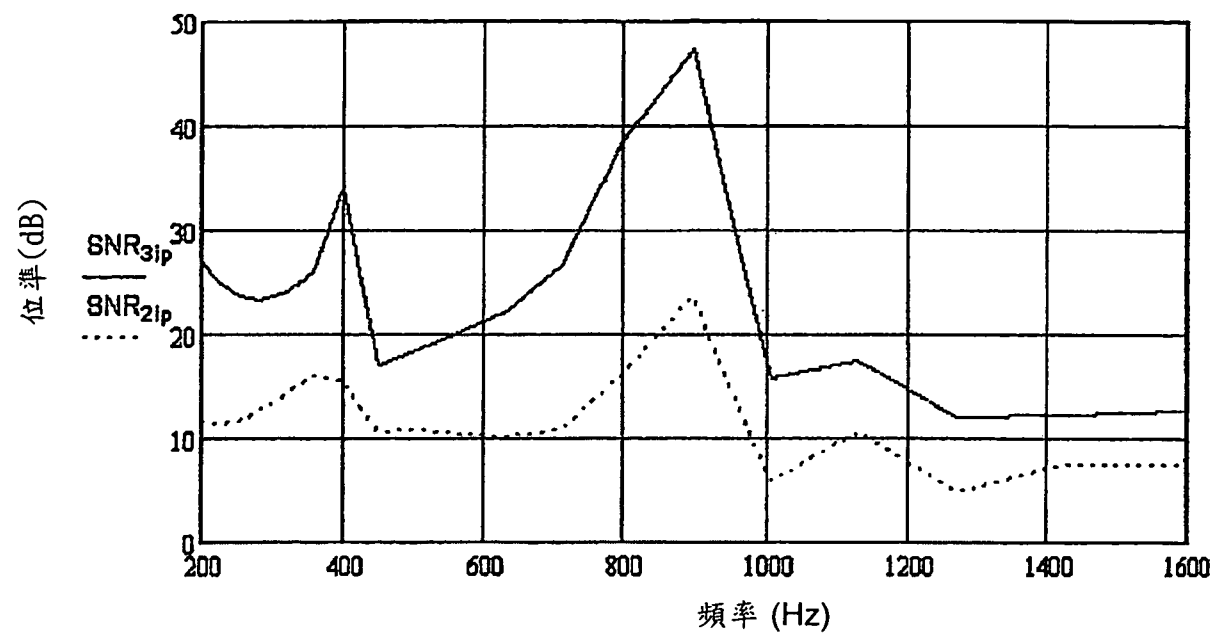


圖 8c

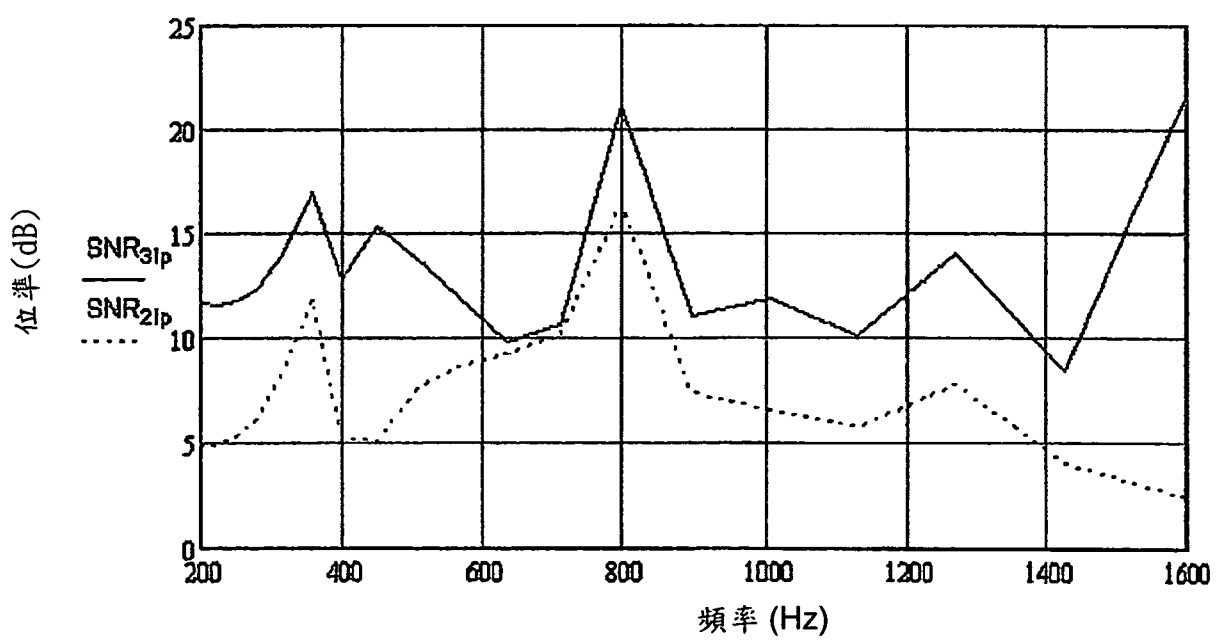


圖 8d

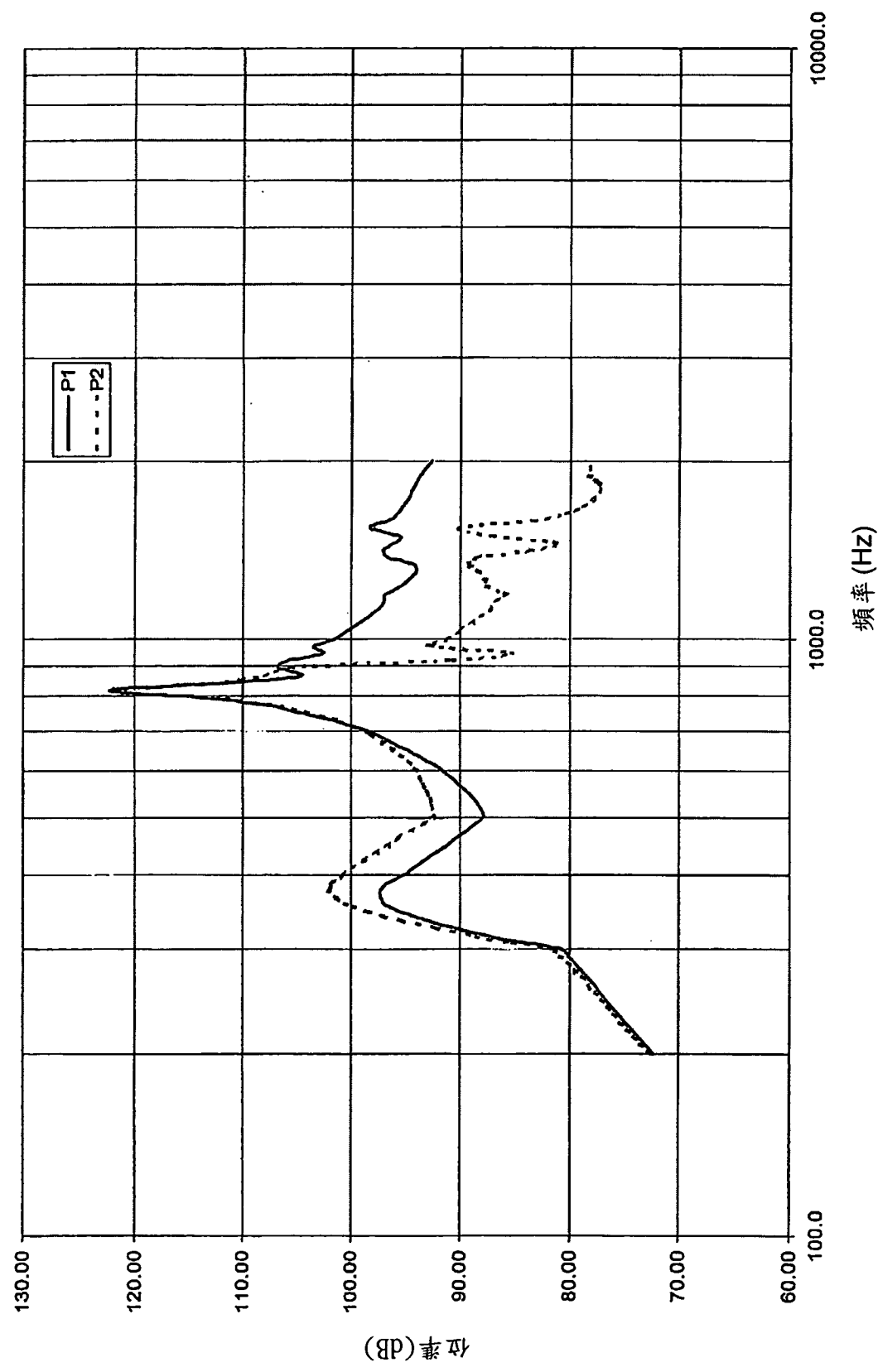


圖9a

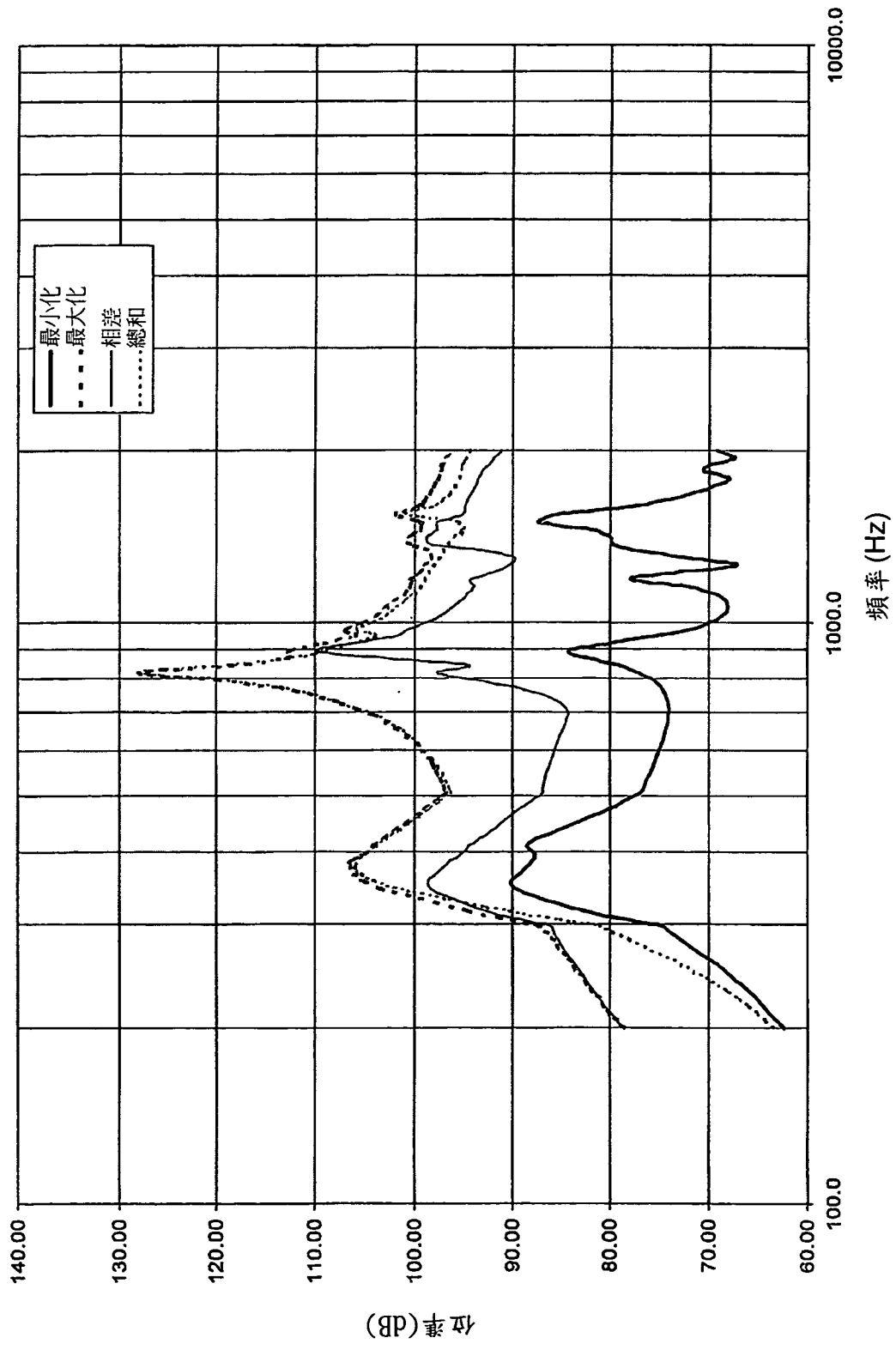
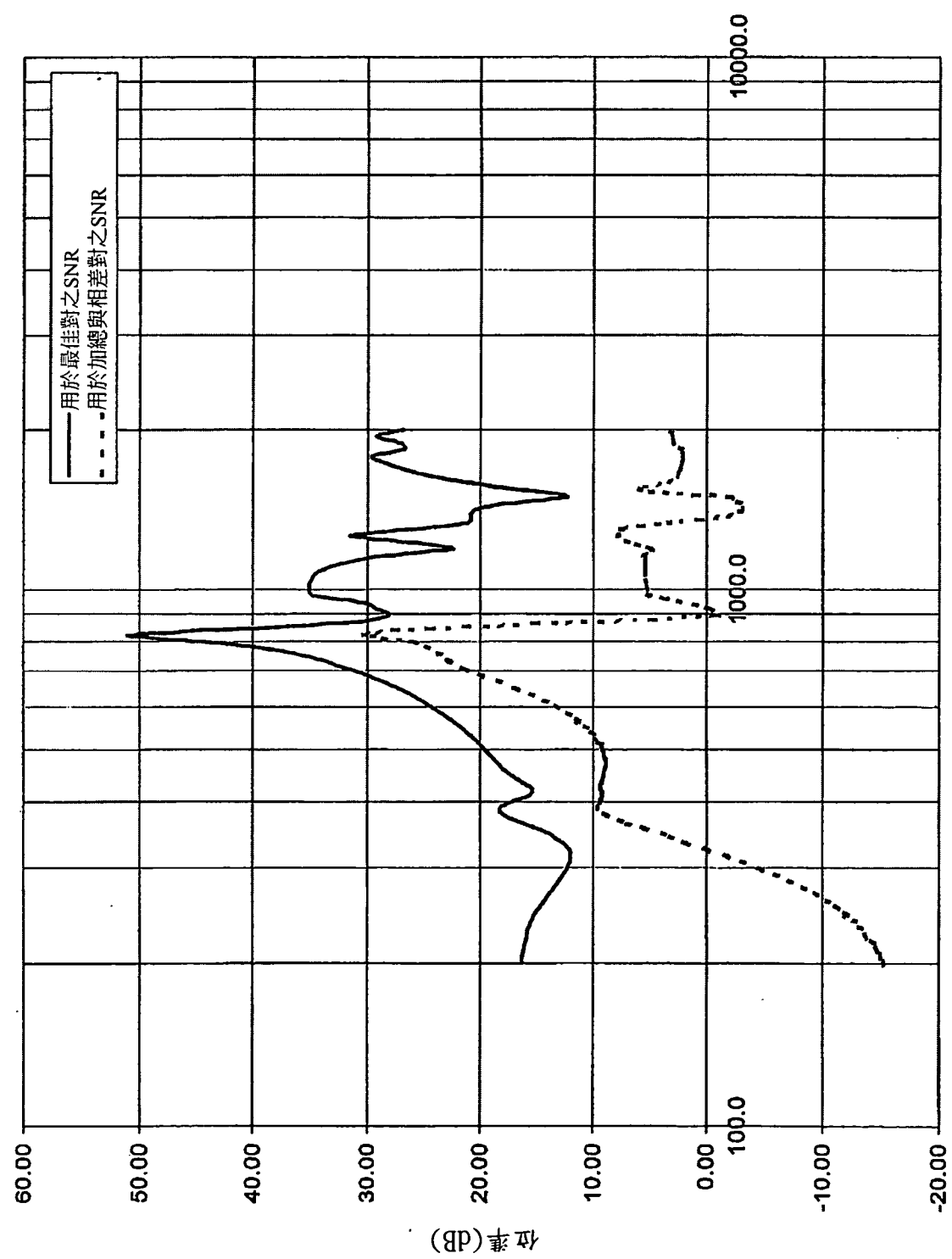


圖 9b



頻率 (Hz)

圖9c

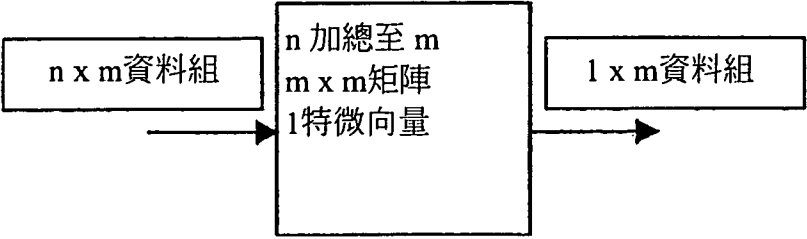


圖 10a

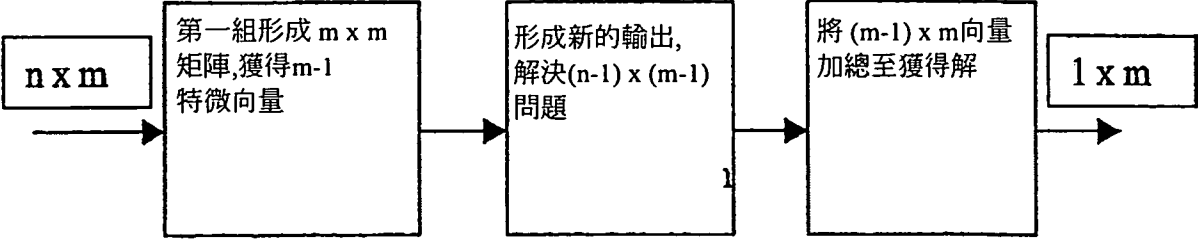


圖 10b

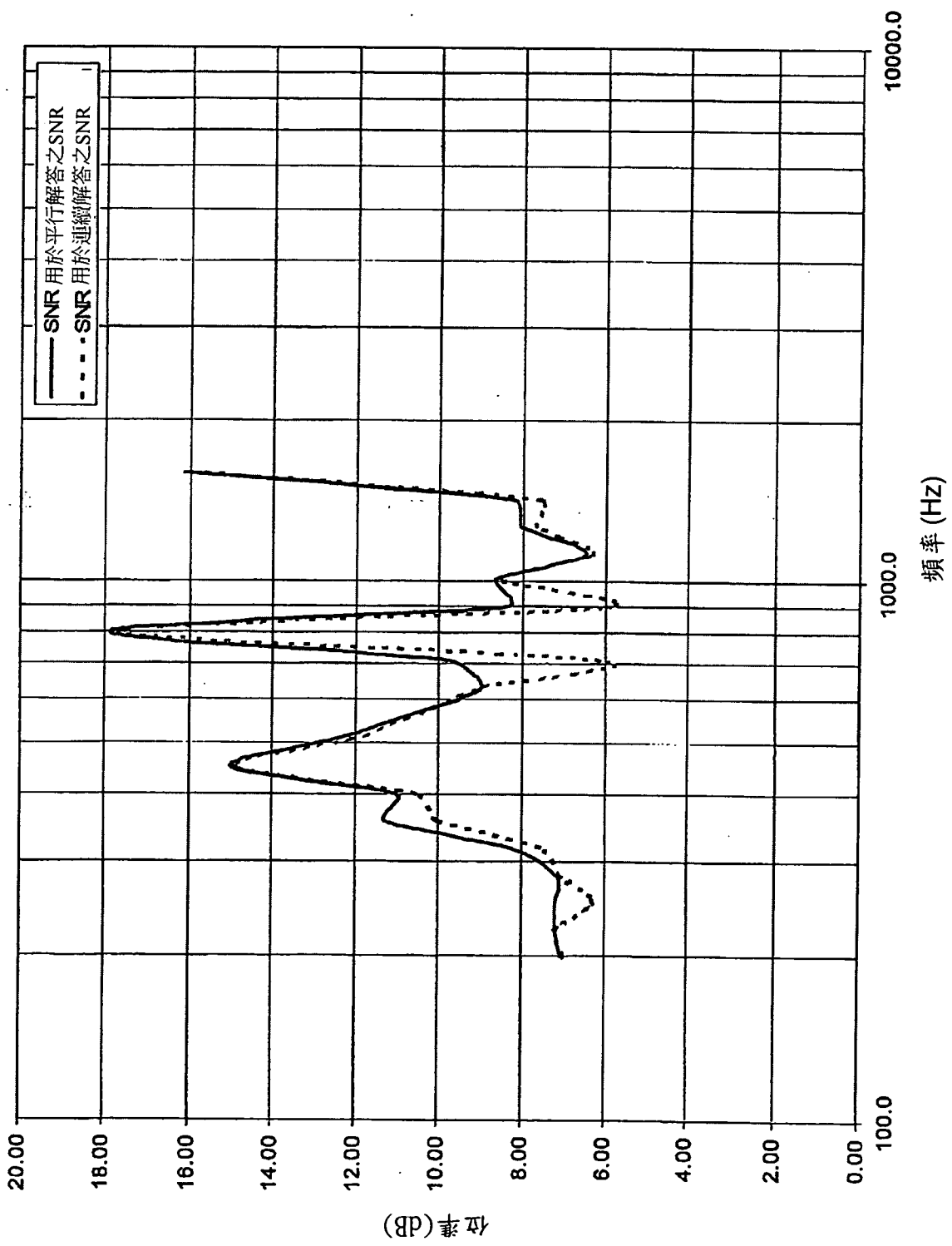


圖10c