



(19) 대한민국특허청(KR)
(12) 공개특허공보(A)

(11) 공개번호 10-2024-0081949
(43) 공개일자 2024년06월10일

(51) 국제특허분류(Int. Cl.)
G01R 23/20 (2006.01) G01R 23/16 (2006.01)
G01R 31/34 (2006.01)
(52) CPC특허분류
G01R 23/20 (2021.05)
G01R 23/16 (2021.05)
(21) 출원번호 10-2022-0165729
(22) 출원일자 2022년12월01일
심사청구일자 2022년12월01일

(71) 출원인
인천대학교 산학협력단
인천광역시 연수구 갯벌로 27, 인천대학교 이노베이션센터(송도동)
(72) 발명자
윤중윤
인천광역시 연수구 해송로 70, 216동 602호(송도동, 송도웰카운티2단지)
(74) 대리인
김정수

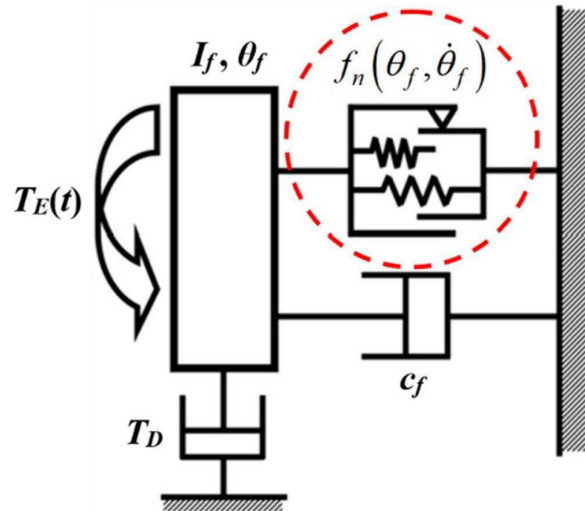
전체 청구항 수 : 총 9 항

(54) 발명의 명칭 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법

(57) 요약

본 발명에 따른 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법은 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템에 있어서, 안정성 조건들이 변화함에 따라 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서 하모닉 균형법을 사용하여 비선형 동적 특성들을 조사하는 단계; 및 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계;를 포함하여 구성되는 것을 특징으로 한다.

대표도 - 도1



(52) CPC특허분류

G01R 31/34 (2013.01)

명세서

청구범위

청구항 1

조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템에 있어서,

안정성 조건들이 변화함에 따라 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서 하모닉 균형법을 사용하여 비선형 동적 특성들을 조사하는 단계; 및

안정성 조건들을 위반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계;

를 포함하여 구성되는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 2

제 1항에 있어서,

상기 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서 상기 하모닉 균형법을 사용하여 비선형 동적 특성들을 조사하는 단계에서는,

상기 하모닉 균형법이 Hill의 방법을 적용하면서 수행되고, 안정 및 불안정 조건하에서 수치 시뮬레이션(NS)을 이용하여 시간 이력을 검토하는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 3

제 2항에 있어서,

상기 하모닉 균형법은 비선형 동적 특성들을 확인하기 위하여 주파수 상향 조건하에서 서브하모닉 지수 η 및 하모닉 균형법의 하모닉 지수와 연계된 하모닉스의 최대값이 N_{max} 이 각각 $\eta = 2$ 및 $N_{max} = 24$ 인 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 4

제 1항에 있어서,

상기 안정성 조건들을 위반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는,

시간 이력, 고속 푸리에 변환(FFT) 결과 및 푸앵카레 맵에서 상기 비선형 동적 응답들을 투영하면서 상기 비선형 동적 특성들을 조사하는 방법을 포함하고 그것을 분기 다이어그램과 비교하는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 5

제 4항에 있어서,

상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는,

수퍼 및 서브 하모닉 응답들이 호-길이 연속법에 기반하여 주파수 상향에 따라 조사되고, 변동적인 안정성 조건들을 수반한 해들의 호-길이를 비교함으로써 상기 수퍼 및 서브 하모닉 응답들을 이해하기 위한 분석적이고 수치적인 방법들을 제안하는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 6

제 5항에 있어서,

상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는,

안정한 상태와 불안정한 상태의 비선형 동적 거동을 비교하는데 있어, 안정한 상태의 동적 거동이 불안정한 상태의 하모닉 요소들보다 기본 주파수에 더욱 의존적인 하모닉 요소들을 포함하는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 7

제 5항에 있어서,

상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는,

불안정한 상태의 시스템 응답의 고속 푸리에 변환(FFT) 결과들이 안정한 상태의 시스템 응답보다 다양한 하모닉 요소들을 반영하는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 8

제 4항에 있어서,

상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는,

푸앵카레 맵에 투영될 때, 상기 비선형 동적 응답들 중 카오스 움직임이 다양한수의 점선으로 반영되는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

청구항 9

제 4항에 있어서,

상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는,

시스템 응답이 불안정한 상태에서 비선형 동적 거동들이 주기-더블링 캐스케이드(cascade)를 보여주고, 이후 카오스 움직임이 되는 것을 포함하는 것을 특징으로 하는 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법.

발명의 설명

기술 분야

본 발명은 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안

[0001]

정성 및 분기 분석방법에 관한 것으로, 특히 수퍼 및 서브 하모닉 환경에서 발생하는 비선형 동적 특성들을 조사하는 방법을 제안한다. 그것은 주로 주파수 상향 조건하에서 호-길이 방향에 따른 안정성 조건들의 분석에 중점을 둔 것으로, 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서 하모닉 균형법을 사용하여 비선형 동적 특성들을 조사하고, 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 방법에 관한 것이다.

배경 기술

- [0003] 비선형 동적 응답들을 조사하는 과정에서, 안정성 조건들은 중요한 정보를 포함할 수 있는데, 그것은 간단한 주기적 응답들로부터 주기-더블링, 준-주기 및 복잡계 움직임들을 포함하는 복잡한 동적 거동들까지의 범위에서 동적 변화들을 유발할 수도 있다.
- [0004] 상기 복잡한 동적 거동들을 확인하기 위해, 이 연구는 Hill의 방법을 사용하는 상기 하모닉 균형법(HBM)을 적용하며, 그것은 상기 시스템의 안정성 조건들을 알려준다. 게다가, 수치 시뮬레이션(NS)은 위상 평면도 및 푸앵카레 지도에서의 상기 시스템 응답들을 확인하기 위해 수행되었다. 변동적인 안정성 환경에 초점이 맞춰진 위상 다이어그램 및 푸앵카레 맵을 수반한 하모닉 균형법(HBM)에 기반한 비선형 움직임들 간의 비교는 물리적, 동적 거동들을 더욱 잘 이해할 수 있도록 해준다.
- [0006] 이 연구에 적용된 방법들에 관하여, 다양한 작업들이 선행되어왔다. 예를 들어, Peng 등은 Duffing 오실레이터를 사용하는 하모닉 균형법(HBM)으로서 비선형 출력 주파수 응답 함수들(NOFRFs)을 제안하였다. 강한 비선형 방정식들 가운데 비선형 출력 주파수 응답 함수들(NOFRFs)을 구현하기 위하여, 고전적인 주파수 응답 함수들(FRF)을 비선형적인 경우로 확장하는 Volterra 급수를 적용하였다. Chen 등은 비압축성 흐름속에서 변수의 변동성을 수반한 2차원 에어포일의 한계 사이클 오실레이션을 조사하는 점진적인 하모닉 균형법을 사용하였다. Duan 등은 서브 하모닉 공명을 조사하기 위해 가진 섭동법(excitation perturbation method)을 제안하였다. 서브 하모닉 효과들을 포착하기 위해, 저자들은 입력조건들을 변경하였다. 예를 들어, 관련된 서브 하모닉 입력 항들이 인위적으로 포함되었고, 그것은 연관된 서브 하모닉 응답들을 유발하였다.
- [0007] 게다가, 간극형태의 비선형성을 수반한 회전체 시스템의 상기 비선형적 주파수 응답을 확인하기 위하여 다항 하모닉 균형법을 적용함으로써 다양한 접근법들이 개발되어왔다.

선행기술문헌

비특허문헌

- [0009] (비특허문헌 0001) 1. Miguel, L. P., Teloli, R. O. & Silva, S. Some practical regards on the application of the harmonic balance method for hysteresis models.Mech. Syst.Signal Process. 143, 106842. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106842> (2020).
- (비특허문헌 0002) 2. Detroux, T., Renson, L., Masset, L. & Kerschen, G. Te harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems.Comput.MethodsAppl.Mech.Eng.296,18-38. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.017> (2015).
- (비특허문헌 0003) 3. Xie, L., Baguet, S., Prabel, B. & Dufour, R. Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems.Mech.Syst.SignalProcess.88,445-461. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.09.037> (2017).
- (비특허문헌 0004) 4. Al-shyyab, A. & Kahraman, A. Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: Sub-harmonic motions.J. Sound Vib. 279, 417-451. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.029> (2005).
- (비특허문헌 0005) 5. Seydel, R. Practical Bifurcation and Stability Analysis (Springer, 1994).
- (비특허문헌 0006) 6. Royston, T. J. & Singh, R. Periodic response of mechanical systems with local non-linearities using an enhanced Galerkin technique. J. Sound Vib. 194(2), 243-263.

<https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0355> (1996).

(비특허문헌 0007) 7. Huang, D. & Xu, W. Sensitivity analysis of primary resonances and bifurcations of a controlled piecewise-smooth system with negative stiffness. *Commun.NonlinearSci.Numer.Simul.* 52, 124-147. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.04.019> (2017).

(비특허문헌 0008) 8. Lee, J. H. & Singh, R. Nonlinear frequency responses of quarter vehicle models with amplitude-sensitive engine mounts. *J. Sound Vib.* 313, 784-805. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.12.006> (2008).

(비특허문헌 0009) 9. Comparin, R. J. & Singh, R. Non-linear frequency response characteristics of an impact pair. *J. Sound Vib.* 134(2), 259-290. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(89\)90652-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(89)90652-4) (1989).

(비특허문헌 0010) 10. Kim, T. C., Rook, T. E. & Singh, R. Effect of smoothening functions on the frequency response of an oscillator with clearance non-linearity. *J. Sound Vib.* 263, 665-678. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01469-4](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01469-4) (2003).

(비특허문헌 0011) 11. Rook, T. E. & Singh, R. Dynamic analysis of a reverse-idler gear pair with concurrent clearance. *J. Sound Vib.* 182(2), 303-322. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.0198> (1995).

(비특허문헌 0012) 12. Comparin, R. J. & Singh, R. Frequency response characteristics of a multi-degree-of-freedom system with clearance. *J. Sound Vib.* 142(1), 101-124. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90585-N](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90585-N) (1990).

(비특허문헌 0013) 13. Sundararajan, P. & Noah, S. T. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method-application to rotor systems. *Trans. ASME J. Vib. Acoust.* 119, 9-20. <https://doi.org/10.1115/1.2889694> (1997).

(비특허문헌 0014) 14. Sundararajan, P. & Noah, S. T. An algorithm for response and stability of large order non-linear systems-application to rotor systems. *J. Sound Vib.* 214(4), 695-723. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1614> (1998).

(비특허문헌 0015) 15. Yoon, J. Y. & Lee, H. I. Dynamic vibratory motion analysis of a multi-degree-of-freedom torsional system with strongly stiff nonlinearities. *Proc. IMechE Part C J. Mech. Eng. Sci.* 229(8), 1399-1414. <https://doi.org/10.1177/0954406214543674> (2014).

(비특허문헌 0016) 16. Kim, T. C., Rook, T. E. & Singh, R. Super- and sub-harmonic response calculation for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method. *J. Sound Vib.* 281, 965-993. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.039> (2005).

(비특허문헌 0017) 17. Yoon, J. Y. & Yoon, H. S. Nonlinear frequency response analysis of a multistage clutch damper with multiple nonlinearities. *ASME. J. Comput. Nonlinear Dyn.* 9(3), 031007. <https://doi.org/10.1115/1.4026036> (2014).

(비특허문헌 0018) 18. Peng, Z. K., Lang, Z. Q., Billings, S. A. & Tomlinson, G. R. Comparison between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. *J. Sound Vib.* 311, 56-73. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.035> (2008).

(비특허문헌 0019) Figure 14. Comparison of HBM and bifurcation diagram with RMS values focused on sub-harmonic response regime. Key: dashed line, HBM result with stable solutions; plus, HBM result with unstable solutions; circle, bifurcation diagrams. 18 Vol.: (1234567890) Scientific Reports (2021) 11:23601 <https://doi.org/10.1038/s41598-021-03088-z>

(비특허문헌 0020) 19. Chen, Y. M., Liu, J. K. & Meng, G. Incremental harmonic balance method for nonlinear flutter of an airfoil with uncertain-butbounded parameters. *Appl. Math. Model.* 36, 657-667. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.016> (2012).

(비특허문헌 0021) 20. Duan, C., Rook, T. E. & Singh, R. Sub-harmonic resonance in a nearly pre-loaded mechanical oscillator. *Nonlinear Dyn.* 50, 639-650. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9185-y> (2007).

- (비특허문헌 0022) 21. Masiani, R., Capecchi, D. & Vestroni, F. Resonant and coupled response of hysteretic two-degree-of-freedom systems using harmonic balance method. Int. J. Non-Linear Mech. 37,1421-1434. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00023-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00023-9) (2002).
- (비특허문헌 0023) 22. Raghothama, A. & Narayanan, S. Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. J. Sound Vib. 226(3), 469-492. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2264> (1999).
- (비특허문헌 0024) 23. Raghothama, A. & Narayanan, S. Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method. Ocean Eng. 27, 1087-1107. [https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(99\)00025-6](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(99)00025-6) (2000).
- (비특허문헌 0025) 24. Shen, Y., Yang, S. & Liu, X. Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method. Int. J. Mech. Sci. 48, 1256-1263. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.06.003> (2006).
- (비특허문헌 0026) 25. Wong, C. W., Zhang, W. S. & Lau, S. L. Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method. J. Sound Vib. 48, 1256-1263. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90913-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90913-5) (2006).
- (비특허문헌 0027) 26. Von Groll, G. & Ewins, D. J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. J. Sound Vib. 241(2), 223-233. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3298> (2001).
- (비특허문헌 0028) 27. Deconinck, B. & Nathan-Kutz, J. Computing spectra of linear operators using the Floquet-Fourier-Hill method. J. Comput. Phys. 219, 296-321. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.03.020> (2006).
- (비특허문헌 0029) 28. Yoon, J. Y. & Singh, R. Effect of multi-staged clutch damper characteristics on transmission gear rattle under two engine conditions. Proc. IMechE Part D J. Automob. Eng. 227(9), 1273-1294.
- (비특허문헌 0030) <https://doi.org/10.1177/0954407013493267> (2013).
- (비특허문헌 0031) 29. Dormand, J. R. & Prince, P. J. A family of embedded Runge-Kutta formulae. J. Comput. Appl. Math. 6(1), 19-26. [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3) (1980).

발명의 내용

해결하려는 과제

- [0010] 본 발명은 종래기술의 문제점을 해결하고자 제안된 것으로, 조각별 형태의 비선형성에 의해 유발된 비선형 동적 거동은 일반적으로, 수퍼 및 서브 하모닉 응답들을 반영한다. 비선형 동적 거동들 속에서 관찰되는 안정성 조건들로부터 다양한 영향들을 도출할 수 있고, 특히 물리적 움직임이 투영될 때 그렇다.
- [0011] 따라서, 이 연구는 변동 안정성 조건들에 관하여 비선형 동적 특성들을 조사하는데 초점이 맞춰져 있다. 이를 위해, 하모닉 균형법은 첫째로 Hill의 방법을 적용하면서 수행되었고, 안정 및 불안정 조건하에서 수치 시뮬레이션들을 이용하여 시간 이력을 검토하였다. 둘째로 수퍼 및 서브 하모닉 응답들은 호-길이 연속법에 기반한 주파수 상향에 따라 조사되었다. 안정성 조건들은 호 길이를 따라 다양한 반면, 분기 현상은 그것들의 안정적인 또는 불안정적인 상태에 따라 또한 다양한 특성들을 보여준다. 그러므로, 상기 연구 결과물들은 호-길이의 방향에 따른 다양한 안정성 조건들을 결정하기 위해 주기-더블링, 주기-더블링 캐스케이드(cascade), 그리고 준-주기 응답들과 같은 비선형 동적 거동들을 결정하는 것은 바람직하다. 결국, 이 연구는 변동적인 안정성 조건들을 수반한 해들의 호-길이를 비교함으로써 수퍼 및 서브 하모닉 응답들을 이해하기 위한 분석적이고 수치적인 방법들을 제안한다.

과제의 해결 수단

- [0013] 본 발명에 따른 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법은,
- [0014] 안정성 조건들이 변화함에 따라 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서 하모닉 균형법을 사용하여 비선형 동적 특성들을 조사하는 단계; 및 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계;를 포함하여 구성되는 것을 특징으로 한다.
- [0015] 또한, 상기 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서 상기 하모닉 균형법을 사용하여 비선형 동적 특성들을 조사하는 단계에서는, 상기 하모닉 균형법이 Hill의 방법을 적용하면서 수행되고, 안정 및 불안정 조건하에서 수치 시뮬레이션(NS)을 이용하여 시간 이력을 검토하는 것을 특징으로 한다.
- [0016] 또한, 상기 하모닉 균형법은 비선형 동적 특성들을 확인하기 위하여 주파수 상향 조건하에서 서브하모닉 지수 N_{max} 및 하모닉 균형법의 하모닉 지수와 연계된 하모닉스의 최대값 $\eta = 2$ 및 $N_{max} = 24$ 이 각각 인 것을 특징으로 한다.
- [0017] 또한, 상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는, 시간 이력, 고속 푸리에 변환(FFT) 결과 및 푸앵카레 맵에서 상기 비선형 동적 응답들을 투영하면서 상기 비선형 동적 특성들을 조사하는 방법을 포함하고 그것을 분기 다이어그램과 비교하는 것을 특징으로 한다.
- [0018] 또한, 상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는, 수퍼 및 서브 하모닉 응답들이 호-길이 연속법에 기반하여 주파수 상향에 따라 조사되고, 변동적인 안정성 조건들을 수반한 해들의 호-길이를 비교함으로써 상기 수퍼 및 서브 하모닉 응답들을 이해하기 위한 분석적이고 수치적인 방법들을 제안하는 것을 특징으로 한다.
- [0019] 또한, 상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는, 안정한 상태와 불안정한 상태의 비선형 동적 거동을 비교하는데 있어, 안정한 상태의 동적 거동이 불안정한 상태의 하모닉 요소들보다 기본 주파수에 더욱 의존적인 하모닉 요소들을 포함하는 것을 특징으로 한다.
- [0020] 또한, 상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는, 불안정한 상태의 시스템 응답의 고속 푸리에 변환(FFT) 결과들이 안정한 상태의 시스템 응답보다 다양한 하모닉 요소들을 반영하는 것을 특징으로 한다.
- [0021] 또한, 상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는, 푸앵카레 맵에 투영될 때, 상기 비선형 동적 응답들 중 카오스 움직임이 다양한 수의 점선으로 반영되는 것을 특징으로 한다.
- [0022] 또한, 상기 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하는 단계는, 시스템 응답이 불안정한 상태에서 비선형 동적 거동들이 주기-더블링 캐스케이드(cascade)를 보여주고, 이후 카오스 움직임이 되는 것을 포함하는 것을 특징으로 한다.

발명의 효과

- [0024] 본 발명에 따른 조각별 형태의 비선형성을 포함하는 회전체 시스템 내에서 수퍼 및 서브 하모닉 응답특성에 대한 안정성 및 분기 분석방법은,
- [0025] (1) 하모닉 균형법을 사용하면서 변동적인 안정성 조건들을 수반한 수퍼 및 서브 하모닉 영역들에서의 동적 특성들을 조사하는 방법을 제공한다. 호-길이의 방향에 따른 안정성 변화는 선행 연구들에서 조사되지 않았던 주기-더블링, 주기-더블링 캐스케이드(cascade)와 같은 다양한 비선형 움직임들에 대한 시스템 응답의 깊은 상관관계를 나타낸다.
- [0026] (2) 안정성 조건들을 수반한 분기점들을 비교함으로써 상기 비선형 동적 응답들을 분석하는 방법을 제공한다. 또한, 복잡한 동적 조건들을 이해하기 위하여, 고속 푸리에 변환(FFT) 결과들, 위상 다이어그램 및 푸앵카레 지도는 분기점들과 비교된다. 이런 문제들을 해결하기 위하여, 이 연구는 1-자유도를 수반한 회전체 시스템내의

특정한 다단계 클러치 댐퍼 모델에 집중하는데, 그것은 차량의 드라이브라인 시스템에 유발되는 진동 문제들을 이해하게 할 것이며 증가된 소음과 진동 문제들을 줄일 수 있는 더 나은 가이드라인을 제시할 수 있다.

도면의 간단한 설명

[0028]

도 1은 조각별 형태의 비선형성에 의해 영향받는 1-자유도를 수반하는 회전체 시스템으로, 클러치 댐퍼들에 영향을 받는 비선형 회전체 시스템을 나타낸 도면이다.

도 2는 조각별 형태의 비선형성에 의해 영향받는 1-자유도를 수반하는 회전체 시스템으로, 다단계 클러치 댐퍼들에 의해 유발되는 비대칭 토크 $T_c(\delta_1)$ 의 변화를 나타낸 도면이다.

도 3은 주파수 상향하에 안정성 조건들을 반영하는 RMS를 수반한 비선형 주파수 응답으로, 수퍼 및 서브 하모닉 상태에서의 RMS 값을 나타낸 도면이다.

도 4는 주파수 상향하에 안정성 조건들을 반영하는 RMS를 수반한 비선형 주파수 응답으로, 수퍼 하모닉 상태 및 그것의 동적인 흐름을 나타낸 도면이다.

도 5는 주파수 상향하에 안정성 조건들을 반영하는 RMS를 수반한 비선형 주파수 응답으로, 서브 하모닉 상태 및 그것의 동적인 흐름을 나타낸 도면이다.

도 6은 RMS 값을 수반하는 수퍼 하모닉 상태에 포커싱 된 비선형 주파수 응답들을 나타낸 도면이다.

도 7은 수퍼 하모닉 상태에서 수치 시뮬레이션(NS)에 의해 계산된 시간 이력을 비교한 것으로, (a) 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.26일 때의 시간 이력, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.275일 때의 시간 이력, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.285일 때의 시간 이력, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.315일 때의 시간 이력을 나타낸 도면이다.

도 8은 시간 이력의 200 사이클에 기초하여 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값을 비교한 것으로, (a)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.26일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.275일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.285일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.315일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값을 나타낸 도면이다.

도 9는 서로 다른 주파수 상태에 따라 위상 다이어그램을 비교한 것으로, (a)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.26일 때의 위상 다이어그램, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.275일 때의 위상 다이어그램, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.285일 때의 위상 다이어그램, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.315일 때의 위상 다이어그램을 나타낸 도면이다.

도 10은 서로 다른 주파수 상태에 따라 푸앵카레 맵을 비교한 것으로, (a)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.26일 때의 푸앵카레 맵, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.275일 때의 푸앵카레 맵, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.285일 때의 푸앵카레 맵, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.315일 때의 푸앵카레 맵을 나타낸 도면이다.

도 11은 수퍼 하모닉 응답 상태에 포커싱 된 RMS 값을 수반하는 하모닉 균형법(HBM) 및 분기 다이어그램을 비교한 도면이다.

도 12는 RMS 값을 수반하는 서브 하모닉 상태에 포커싱 된 비선형 주파수 응답을 나타낸 도면이다.

도 13은 서브 하모닉 상태에서 수치 시뮬레이션(NS)에 의해 계산된 시간 이력을 비교한 것으로, (a)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.98일 때의 시간 이력, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.995일 때의 시간 이력, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.0일 때의 시간 이력, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.02일 때의 시간 이력을 나타낸 도면이다.

도 14는 시간 이력의 200 사이클에 기초하여 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값을 비교한 것으로, (a)는 정규화

주파수($\bar{\omega}$)가 0.98일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.995일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.0일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.02일 때의 고속 푸리에 변환(FFT)의 결과 값을 나타낸 도면이다.

도 15는 서로 다른 주파수 상태에 따른 위상 다이어그램을 비교한 것으로, (a)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.98일 때의 위상 다이어그램, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.995일 때의 위상 다이어그램, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.0일 때의 위상 다이어그램, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.02일 때의 위상 다이어그램을 나타낸 도면이다.

도 16은 서로 다른 주파수 상태에 따른 푸앵카레 맵을 비교한 것으로, (a)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.98일 때의 푸앵카레 맵, (b)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 0.995일 때의 푸앵카레 맵, (c)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.0일 때의 푸앵카레 맵, (d)는 정규화 주파수($\bar{\omega}$)가 1.02일 때의 푸앵카레 맵을 나타낸 도면이다.

도 17은 서브 하모닉 상태에 포커싱 된 RMS 값을 수반하는 하모닉 균형법(HBM) 및 분기 다이어그램을 비교한 도면이다.

표 1은 실제 물리적인 다단계 클러치 댐퍼의 특성들을 나타낸 표이다.

표 2는 차량의 WOT 상태를 가정한 입력 토크의 상세한 내용을 나타낸 표이다.

표 3은 주파수 상향에 기반한 수퍼 및 서브 하모닉 상태에서의 동적 특성들을 나타낸 표이다.

발명을 실시하기 위한 구체적인 내용

[0029] 본 발명의 실시예들을 설명함에 있어서, 본 발명과 관련된 공지기술에 대한 구체적인 설명이 본 발명의 요지를 불필요하게 흐릴 수 있다고 판단되는 경우에는 그 상세한 설명을 생략하기로 한다. 그리고, 후술되는 용어들은 본 발명에서의 기능을 고려하여 정의된 용어들로서 이는 사용자, 운용자의 의도 또는 관례 등에 따라 달라질 수 있다. 그러므로 그 정의는 본 명세서 전반에 걸친 내용을 토대로 내려져야 할 것이다. 상세한 설명에서 사용되는 용어는 단지 본 발명의 실시예들을 기술하기 위한 것이며, 결코 제한적으로 해석되어서는 안 된다. 명확하게 달리 사용되지 않는 한, 단수 형태의 표현은 복수 형태의 의미를 포함한다. 본 설명에서, "포함" 또는 "구비"와 같은 표현은 어떤 특성들, 숫자들, 단계들, 동작들, 요소들, 이들의 일부 또는 조합을 가리키기 위한 것이며, 기술된 것 이외에 하나 또는 그 이상의 다른 특성, 숫자, 단계, 동작, 요소, 이들의 일부 또는 조합의 존재 또는 가능성을 배제하는 것으로 해석되어서는 안 된다.

[0030] 이하, 도면을 참조하여 본 발명의 구체적인 실시형태를 설명하기로 한다. 이하의 상세한 설명은 본 명세서에서 기술된 방법, 장치 및/또는 시스템에 대한 포괄적인 이해를 돕기 위해 제공된다. 또한, 도면들 중 동일한 구성 요소 또는 부품들은 가능한 한 동일한 참조부호를 나타내고 있음에 유의해야 한다. 그러나 이는 예시에 불과하며 본 발명은 이에 제한되지 않는다. 이하, 첨부된 도면을 참조하여 본 발명에 따른 바람직한 실시예를 설명한다.

[0032] 1. 문제 형식과 그것의 기본적인 형식

[0033] 시스템 모델링과 조각별 형태의 비선형성

[0034] 도 1은 조각별 형태의 비선형성을 수반하는 비선형 회전체 시스템을 개시한다. 이 때, 상기 1-자유도를 수반한 비선형 시스템은 플라이 휠 및 선행 연구들에 기반한 다단계 클러치 댐퍼들에 집중된 드라이브라인의 일부분이다. 효율적인 비선형성은 마른 마찰 소재를 수반한 비대칭 회전 스프링에 기초한다. 조각별 형태의 비선형성에 의해 유발된 비선형적인 힘 $f_n(\theta_f, \dot{\theta}_f)$ ($\mathcal{F}$ 는 T_c)을 분석하기 위해, 수학적 공식들은 도 2의 빨간 점선 화살표로 도시된 바와 같이, 히스테리시스 효과를 고려함으로써 도출될 수 있다.

[0036] 이 때, θ_f 및 $\dot{\theta}_f$ 은 도 1에 도시된 것처럼, 각변위 및 각속도를 나타낸다. 먼저 평활계수 $\sigma_C = 1 \times 10^3$ 의 강성에 의해 유발된 클러치 토크 $T_s(\theta_f)$ 는 아래와 같이 유도된다.

[0038] [수학식 1a]

$$T_s(\theta_f) = k_{C1}\theta_f + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (k_{C(i)} - k_{C(i-1)}) (T_{sp(i-1)} - T_{sn(i-1)})$$

[0039]

[0040] [수학식 1b]

$$T_{sp(i)} = (\theta_f - \phi_{p(i)}) [\tanh\{\sigma_C(\theta_f - \phi_{p(i)})\} + 1]$$

[0041]

[0042] [수학식 1c]

$$T_{sn(i)} = (\theta_f + \phi_{n(i)}) [\tanh\{\sigma_C(\theta_f + \phi_{n(i)})\} - 1]$$

[0043]

[0045] 이 때, $K_{C(N)}$ ($\Leftrightarrow K_{C(i)}$) 는 클러치 강성의 N번째(혹은 i번째) 단계를 나타낸 것이고, $T_{sp(i)}$ ($\Leftrightarrow T_{sn(i)}$) 는 i번째 단계에서의 강성에 의해 유발된 클러치 토크의 양수부(혹은 음수부)를 표현하며, $\phi_{p(i)}$ ($\Leftrightarrow -\phi_{n(i)}$) 는 양수부(혹은 음수부)의 i번째 전이각을 개시한다. 게다가, 히스테리시스에 의해 유발된 클러치 토크 T_H 는 평활계수 $\sigma_H = 0.1$ 에서 고려된 값이다.

[0047] [수학식 2a]

$$T_H(\theta_f, \dot{\theta}_f) = \frac{H(N)}{2} \tanh(\sigma_H \dot{\theta}_f) + \sum_{i=2}^N \left(\frac{H(i)}{4} - \frac{H(i-1)}{4} \right) [T_{Hp(i-1)} + T_{Hn(i-1)}]$$

[0048]

[0049] [수학식 2b]

$$T_{Hp(i)} = \tanh\{\sigma_C(\theta_f - \phi_{p(i)})\} [1 + \tanh(\sigma_H \dot{\theta}_f)]$$

[0050]

[0051] [수학식 2c]

$$T_{Hn(i)} = \tanh\{\sigma_C(\theta_f + \phi_{n(i)})\} [1 - \tanh(\sigma_H \dot{\theta}_f)]$$

[0052]

표 1

Property	Stage	Value
Torsional stiffness, k_C (linearized in a piecewise manner) (Nm/rad)	1	10.1
	2	61.8
	3	595.8
	4	1838.0
Hysteresis, H_i (Nm)	1	0.98
	2	1.96
	3	19.6
	4	26.5
Transition angle at positive side ($\theta_f > 0$), ϕ_{pi} (rad)	1	0.05
	2	0.16
	3	0.30
	4	0.39
Transition angle at negative side ($\theta_f < 0$), ϕ_{ni} (rad)	1	-0.04
	2	-0.05
	3	-0.09
	4	-0.15

[0054]

표 2

Torque component		
Magnitude (Nm)		Phase (rad)
T_M	T_{pl}	
168.9	251.5	-1.93

[0055]

표 3

Stability conditions	Sweeping direction	Dynamic characteristics
Stable $\rightarrow$ Unstable (STU)	$+\rightarrow -$	Saddle-node point
	$+\rightarrow +$	Period-doubling cascade
Unstable $\rightarrow$ Stable (UTS)	$+\rightarrow -$	Period-doubling
	$+\rightarrow +$	

[0056]

[0058] 이 때, H_N (또는 $H_{(i)}$)는 히스테리시스의 N번째 단계이고, $T_{Hp(i)}$ (또는 $T_{Hn(i)}$)는 i번째 단계에서의 히스테리시스에 의해 유발된 클러치 토크의 양수부(또는 음수부)이다. 식 1 및 식 2를 사용하여 계산된 토크에 더하여, 예비 하중 T_{pr} 은 반드시 θ_{1pr} 함수로서 고려되어야만 한다.

[0060] [수학식 3a]

$$T_{SPr}(\theta_{1pr}) = \frac{1}{2}T_{Pr1}[\tanh(\sigma_C\theta_{1pr}) + 1] + \frac{1}{2}T_{Pr2}[-\tanh(\sigma_C\theta_{1pr}) + 1]$$

[0061]

[0062] [수학식 3b]

$$\theta_{1pr} = \theta_f - \phi_{pr}$$

[0065] 이 때, T_{spr} 은 예비하중에 의해 유발된 클러치 토크의 총합이고, T_{pr1} (또는 T_{pr2}) 는 예비하중에 의해 유발된 양의 토크 (또는 음의 토크)를 나타내며, ϕ_{pr} 은 예비하중에 위치한 각을 나타낸다. 결국, 총 클러치 토크는 다음과 같이 수학식 1 내지 3의 $T_s(\theta_f)$, $T_H(\theta_f, \dot{\theta}_f)$ 및 $T_{spr}(\theta_{1pr})$ 의 합으로 추정된다.

[0067] [수학식 4]

$$f_n(\theta_f, \dot{\theta}_f) = T_C(\theta_{1pr}, \dot{\theta}_{1pr}) = T_S(\theta_{1pr}) + T_H(\theta_{1pr}, \dot{\theta}_{1pr}) + T_{SPR}(\theta_{1pr})$$

[0070] 게다가 이 연구에서는 선형 회전 스프링이 갑자기 바뀌고 히스테리시스 효과가 순조롭게 반영되었기 때문에 선행연구에 기반해 상대적으로 높은 값의 σ_c 와 낮은 값의 σ_H 를 적용했다. 클러치 토크 $f_n(\theta_f, \dot{\theta}_f)$ (또는 T_C) 의 자세한 내용은 표 1에 기재되어 있다.

[0071] 도 2는 강성 및 히스테리시스 영역의 1단계에서 4단계까지를 표현한다. 동적 특징들을 조사하기 위하여, 도 1에 보여지는 회전체 시스템에 적용된 변수들은 다음과 같다: 플라이 휠의 관성 $I_f = 1.38 \times 10^{-1} kgm^2$; 점성 댐핑 $C_f = 1.59 Nm/s$. 도 1에 도시된 단일 자유도 시스템에 기반하여, 비선형 함수 $f_n(\theta_f, \dot{\theta}_f)$ 의 모션방정식은 아래와 같이 유도한다.

[0073] [수학식 5]

$$I_f \ddot{\theta}_f(t) + c \dot{\theta}_f(t) + f_n(\theta_f, \dot{\theta}_f) = T_E(t) - T_D$$

[0076] 이 때, $T_E(t)$ 및 T_D 은 사인과 입력 및 드래그 토크를 각각 의미한다. 일반적으로 입력 토크는 아래와 같이 측정된 데이터를 기반으로 하여 푸리에 계수에 의해 주어진다.

[0078] [수학식 6]

$$T_E(t) = T_m + \sum_{i=1}^{N_{max}} T_{pi} \cos(i\omega_p t + \varphi_{pi})$$

[0081] 이 때, T_m 및 T_{pi} 는 각각 입력 토크의 평균값 및 하모닉 성분별 크기이고, ω_p 및 φ_{pi} 는 가진 주파수 및 위상각을 각각 의미한다. 그리고 N_{max} 는 하모닉 균형법의 하모닉 지수와 연계된 하모닉스의 최대값을 나타낸다. 적용된 입력 토크의 자세한 내용은 표 2에 개시되어 있다. 이번 연구에서 드래그 토크는 정상응답상태 하에서 $T_D = T_m$ 으로 가정한다.

[0083] [수학식 7]

$$-\omega^2 m \underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}'' \underline{\theta}_c + \omega c \underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\theta}_c + \underline{\mathbf{f}}_n(\underline{\theta}_f, \dot{\underline{\theta}}_f) - \underline{\mathbf{F}}_E(t) = \underline{\mathbf{0}}$$

[0086] 이와 관련된 공식들은 아래와 같이 정의된다.

[0088] [수학식 8a]

$$\underline{\theta}_f(t) = \underline{\mathbf{H}} \underline{\theta}_c$$

[0090] [수학식 8b]

$$\underline{\theta}_f(t) = [\theta_f(t_0) \ \theta_f(t_1) \ \cdots \ \theta_f(t_{m-2}) \ \theta_f(t_{m-1})]^T$$

[0092] [수학식 8c]

$$\underline{\theta}_c = [\theta_m \ \theta_{a(1)} \ \theta_{b(1)} \ \cdots \ \theta_{a(k)} \ \theta_{b(k)} \ \cdots \ \theta_{a(\eta N_{\max})} \ \theta_{b(\eta N_{\max})}]^T$$

[0094] [수학식 8d]

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cos(k\psi_0) & \sin(k\psi_0) & \cdots \\ 1 & \cdots & \cos(k\psi_1) & \sin(k\psi_1) & \cdots \\ & \ddots & & & \ddots \\ 1 & \cdots & \cos(k\psi_{N-2}) & \sin(k\psi_{N-2}) & \cdots \\ 1 & \cdots & \cos(k\psi_{N-1}) & \sin(k\psi_{N-1}) & \cdots \end{bmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{H}}} = \omega \underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}', \underline{\underline{\mathbf{H}}}'' = -\omega^2 \underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}''$$

[0096] [수학식 8e]

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

[0098] [수학식 8f]

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}'' = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

[0101] 마찬가지로, 비선형 및 입력 함수들은 아래와 같이 정의된다.

[0103] [수학식 9a]

$$\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}(\underline{\theta}_{\mathbf{f}}, \dot{\underline{\theta}}_{\mathbf{f}}) = \underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{nc}}$$

[0105] [수학식 9b]

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{E}}(t) = \underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{Ec}}$$

[0107] [수학식 9c]

$$\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{nc}} = [f_m \ f_{a(1)} \ f_{b(1)} \ \cdots \ f_{a(k)} \ f_{b(k)} \ \cdots \ f_{a(\eta N_{\max})} \ f_{b(\eta N_{\max})}]^T$$

[0109] [수학식 9d]

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{Ec}} = [F_m \ F_{a(1)} \ F_{b(1)} \ \cdots \ F_{a(k)} \ F_{b(k)} \ \cdots \ F_{a(\eta N_{\max})} \ F_{b(\eta N_{\max})}]^T$$

[0112] 관련 변수들은 다음과 같다.

[0113] 비차원 시간 스케일 및 고유주파수 ω_n 으로 표현되는 정규화된 주파수 $\bar{\omega}t = \psi$ 및 $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_n}$, $0 \leq t < T \rightarrow 0 \leq \psi < \frac{2\pi}{\omega_n}$ 에 해당하는 시구간 $T = \eta\tau$; 서브하모닉 지수 η , 기본 가진 주파수 τ ; 점진적인 지수 $k = \omega_n, 2\omega_n, 3\omega_n, \dots$. 수학식 7에서 $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\bar{\omega}d\theta}{d\psi} = \bar{\omega}\theta'$ 및 $\theta(t) = \bar{\omega}^2\theta''$ 의 관계를 적용함으로써 기본 방정식의 전체 Galerkin 구조는 다음과 같이 정의된다.

[0115] [수학식 10a]

$$\underline{\mathbf{H}}\underline{\Psi} = \underline{\mathbf{0}}$$

[0117] [수학식 10b]

$$\underline{\Psi} = -\bar{\omega}^2 m \underline{\mathbf{P}}'' \underline{\theta}_{\mathbf{c}} + \bar{\omega} c \underline{\mathbf{P}}' \underline{\theta}_{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{nc}} - \underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{Ec}} = \underline{\mathbf{0}}$$

[0120] 수학식 10a 및 수학식 10b에서 연관된 변수 $\bar{\omega}$ 를 가지고 $\theta_{\mathbf{c}}$ 의 해를 계산하기 위하여, Newton-Raphson 방법은 $\psi \rightarrow 0$ 인 조건을 기반으로 사용되는데, 여기서 ψ 는 $\theta_{\mathbf{c}}$ 및 $\bar{\omega}$, 즉 $\psi(\theta_{\mathbf{c}}, \bar{\omega})$ 의 함수로 여겨진다. Newton-Raphson 방법을 사용하여, 선행문헌들에 나와있듯이, 각 스텝의 $\theta_{\mathbf{c}}$ 및 $\bar{\omega}$ 해들이 결정된다.

[0122] 2. 주파수 상향에 따른 초기 값 검토

[0123] 도 3 내지 도 5는 주파수 상향 조건하에서 $\eta = 2$ 및 $N_{\max} = 24$ 인 하모닉 균형법(HBM)에 의해 얻어진 초기 값을 제시한다. 비대칭 조각별 형태의 비선형성에 의해 유발되는 비선형 응답들을 포착하기 위하여, $N_{\max} = 24$ 와 같은 충분한 수가 선행 연구에 기반하여 적용된다. 또한, 이 연구는 비선형 동적 특성들을 확인하기 위한 주파수 상향 조건들에 초점을 맞추고 있다. 안정성 조건들을 확인하기 위하여, Hill의 방법이 이 연구에서 적용되었다. 여기서, 도 3에 (b) 및 (c)로 도시된 붉은 점선은 수퍼 및 서브 하모닉 응답 상태를 나타낸다. 서브 하모닉 응답들을 획득하기 위하여, 작은 범위의 가진 입력 값들이 인위적으로 적용된다. 이 연구를 위하여,

$\eta = 2$ 및 $N_{max} = 24$ 인 입력 토크 벡터의 유효한 구성요소들은 수학적 9a 내지 수학적 9d의 $F_m = 168.9$, $F_{a(2)} = -87.97, F_{b(2)} = 235.65$ 로 표현된다. 서브 하모닉 응답을 일으키기 위하여, $F_{a(1)}$ 및 $F_{b(1)}$ 와 같은 서브 하모닉 위치에 관한 입력 토크의 구성요소들은 각각 $F_{a(1)} = \epsilon F_{a(2)}$ 및 $F_{b(1)} = \epsilon F_{b(2)}$ 을 나타낸다. 이 때, 적용된 값은 $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ 이다. 도 4 및 도 5에 도시된 것은 각각 수퍼 및 서브 하모닉 상태에서의 시스템 응답을 보여주며, 붉은 점은 안정한 상태를, 푸른 크로스타인은 불안정한 상태를 각각 나타낸다. 이러한 상태에서, 상기 안정성 조건들은 주파수 상향 조건하에서 호-길이를 따라 안정한 상태에서부터 불안정한 상태로(STU) 그리고 불안정한 상태에서부터 안정한 상태로(UTS)의 변화를 보여준다. 예를 들어, 도 4 및 도 5의 (1)에 표시된 위치는 해의 방향이 STU일 때 상승에서 하강으로 갑자기 변하는 것을 나타낸다. (또는 UTS일 때 하강에서 상승으로 갑자기 변하는 것을 나타낸다.) 그러나, 도 4 및 도 5의 (2)에 표시된 위치는 해의 방향이 STU일 때(또는 UTS일 때), 주파수 상향과 같은 경향을 따르는 것을 보여준다. 그러므로 연관된 안정성 조건들 및 호-길이 방향에 관한 특정 목적들에 제시되는 것처럼, 이 연구는 시간 이력, 고속 푸리에 변환(FFT) 도메인 및 푸앵카레 맵에서 그 응답들을 그리면서 비선형 동적 특성들을 조사하였고, 분기 다이어그램과 그것들을 비교하였다.

[0125]

3. 수퍼 하모닉 응답 검토

[0126]

도 6은 도 3 내지 도 5에 제시된 수퍼 하모닉 응답들의 상세도를 보여준다. 비선형 동적 거동들을 확인하기 위하여, 그 시스템 응답들은 (A), (B), (C) 및 (D)에 나타난 다양한 상태를 따라 분석될 수도 있고, 이 때 정규화된 주파수는 각각 0.26, 0.275, 0.285 및 0.315이다. 여기서, 상기 STU 상태는 (A)와 (B) 사이에 위치하며, 호-길이의 방향은 반대로 관찰된다. 일반적으로, 이 점은 점핑 현상이 발생하는 새들-로드 포인트와 연관된다; 그러므로, 수치적 또는 실험적 결과는 얻어질 수 없다. 따라서, 이 연구는 상기 주파수 상향처럼 같은 방향에서의 비선형 응답들을 조사하는 것에 초점을 맞추는데, 선행 연구들에서 불안정한 조건들로 추정되는 동적 거동들은 시스템의 실제 움직임에 관해 철저하게 조사되지 않았기 때문에, STU 및 UTS는 변화된다. 도 6의 (A)는 안정한 조건하에서 수퍼 하모닉 상태의 공명을 나타낸다. 도 6의 (C)는 주파수 상향과 같은 방향의 수퍼 하모닉 상태 주위의 또다른 안정 조건을 보여준다. 그러나, 그것은 도 6의 (B) 및 (D)에 표시된 두가지 불안정한 상태 사이에 위치한다. 이 때, 상기 (B) 및 (D)의 두가지 불안정한 상태는 주파수 상향과 같은 호-길이 방향에서 관찰된다. 도 7, 8, 9 및 10은 도 6의 (A), (B), (C) 및 (D) 상태에 따른 시간이력, 고속 푸리에 변환(FFT) 결과, 위상 다이어그램 및 푸앵카레 맵의 시뮬레이션 결과를 보여준다.

[0127]

도 7은 도 6의 (A), (B), (C) 및 (D) 상태에서의 시간이력을 비교한다. 도 7의 (a)는 명백하게 비선형 응답을 개시하는데, 그것은 도 8의 (a)에 도시된 바와 같이 고속 푸리에 변환(FFT) 결과에서도 관찰되는 것으로, 비선형 응답이 도 6에 도시된 것처럼 불안정 상태에 위치하기 때문이다. 주파수 범위가 도 6의 (B), (C) 및 (D) 상태의 주파수로 변하기 때문에, 그 동적 거동들은 도 7에 도시된 시간이력으로부터 명백하게 복잡한 현상으로 나타난다. 도 6의 (B), (C) 및 (D) 상태의 응답들이 자세히 검토될 때, 상기 동적 특성들은 상기 안정성 조건들과 밀접하게 연관된다는 것이 관찰될 수 있다. 예를 들어, (C) 및 (B) 상태(또는 (D) 상태)의 시간이력을 서로 비교할 때, (C) 상태의 동적 거동은 (B)상태(또는 (D)상태)의 하모닉 요소들보다 기본 주파수에 의존적인 하모닉 요소들의 수를 명백히 포함한다. (C)상태의 동적 응답이 안정성 조건에 관한 것일 때, 그것은 안정한 조건을 반영한다. 그러나, (B) 및 (D) 상태의 동적 응답은 불안정한 조건으로 추정된다.

[0128]

게다가, 도 8의 고속 푸리에 변환(FFT) 결과들은 안정성 조건들에 따른 동적 특성들의 관계성을 나타낸다. 예를 들어, 도 8의 (c)는 $\omega = 5.2 \text{ Hz}$ (또는 $\bar{\omega} = 0.285$)와 같이 기본적인 하모닉 요소들에 따른 동적 특성들의 관계성을 나타낸다. 그러나, 불안정한 상태 (B) 및 (D)에서의 시스템 응답은 도 8의 (b) 및 도 8의 (d)에 도시된 것처럼 다양한 수의 하모닉 요소들을 반영한다. 도 8의 (d)에 도시된 바와 같이, 상태 (D)에서의 동적 거동은 가장 복잡한 요소를 표현한다.

[0129]

STU 및 UTS에 관한 다양한 안정성 조건하의 동적 거동은 도 9 및 도 10에 도시된 것처럼, 그 응답이 위상 다이어그램 및 푸앵카레 맵에 투영될 때 철저히 확인될 수 있다. 수치 시뮬레이션(NS)를 사용하는 위상 다이어그램 및 푸앵카레 맵을 결정하기 위해, 이 연구는 변형된 Runge-Kutta법을 적용한다. 과도 응답 효과가 완전히 제거되기까지 시스템 응답은 500사이클 동안 계산하고, 마지막 200사이클동안의 결과를 정상상태 응답특성으로 도출한다. 도 9의 (a)에 도시된 (A) 상태의 시스템 응답은 명백하게 세 개의 주도적 원들을(dominant circles) 나타

내고, 이는 도 10의 (a)에 도시된 바와 같이 푸앵카레 맵의 오직 한 점으로 구성된다. (A)상태의 동적 거동과 비교하여 (B), (C) 및 (D) 상태의 다른 움직임들은 더욱 복잡한 원들을 보인다. 안정한 (C) 상태에서 동적 거동이 확인되면, 위상 다이어그램 또한 유사한 개수의 원들로 이루어지는 것이 명백하고, 상대적으로 푸앵카레 맵 안의 점 개수는 적어지는데, 예를 들어 도 10의 (c)에서는 2개이다. 그러나, 도 9의 (b) 및 도 9의 (d)로부터 전체적인 원의 모양이 명확함에도 불구하고, 불안정한 상태 (B) 및 (D)에서의 동적 응답들은 훨씬 많은 수의 원들을 보여준다. 이러한 동적 특성들은 도 10의 (b) 및 도 10의 (d)에 도시된 것처럼 푸앵카레 맵 안에 잘 투영된다. 특히, (D)상태에서의 동적 거동은 카오스 현상을 보여주는데, 이는 도 10의 (d)에 도시된 바와 같이 다양한 수의 점선으로 반영되어 있다.

[0130] 안정성 조건을 고려함으로써 서로 다른 주파수 상태에 따라 동적 응답들을 검토하는 것에 기반하여, 그 동적 거동들은 분기 다이어그램에 투영될 때, 훨씬 명확하게 이해될 수 있다. 분기 다이어그램을 만들어내기 위하여, RMS 값의 200개 사이클은 각 사이클로부터 얻어질 수 있었다.

[0131] 전체적으로, 도 7, 8, 9 및 10에 도시된 (A), (B), (C) 및 (D) 상태의 동적 거동들이 도 11에 도시된 상기 분기 다이어그램과 비교될 때, 각 상태에서의 응답은 명확한 방식으로 결정될 수 있다. 예를 들어, (A) 상태는 어떠한 분기도 개시하고 있지 않은데, 이것은 이미 순수한 수퍼 하모닉 응답으로 확인된 것이다. (B), (C) 및 (D) 상태에서의 응답 변이 때문에, 이러한 영역의 관련 분기는 명백히 복잡한 특성들과 함께 관찰된다. 안정성 조건들이 각 분기 상태와 비교될 때, 불안정한 조건에 따른 (B) 상태는 상태 (A) 및 (B) 사이에 위치한 주기-더블링 캐스케이드(cascade)후에, 즉시 주기-더블링을 보여준다. 상태 (C)는 안정적인 조건과 함께 주기-더블링 상태로 되돌아간다. STU 조건하에서 상태가 (D)로 변경될 때, 분기는 더 복잡해지고 카오스 응답이 반영된다. 표 3은 안정성 및 호-길이 방향에 기반한 다양한 조건하에서 동적 특성들을 요약하고 있다. 상기 표에서 "+" 및 "-" 상징은 주파수 상향의 같은 방향 혹은 반대 방향을 의미한다.

[0133] 4. 서브-하모닉 응답들의 결과

[0134] 도 12는 도 3 내지 도 5에 도시된 서브-하모닉 응답들의 상세도이다. 시스템 응답은 (A), (B), (C) 및 (D)에 의해 유발된 다양한 상태에 따라 분석될 수 있고, 그 때 정규화된 주파수 각각은 $\bar{\omega} = 0.98, 0.995, 1.0$ 및 1.02 이다. 이 때, STU 상태는 (A) 및 (B) 사이에서 발견되는데, 이 때 호-길이의 방향은 반대로 된다. 도 12에서 (A) 상태는 서브-하모닉 응답들이 발생하기 전에 즉시 기본적인 하모닉 응답 영역을 보여준다.

[0135] 이것들은 각각 도 13 및 도 14에서 명확히 관찰된다. 서브-하모닉 응답 영역들, 즉 상태 (B), (C) 및 (D) 사이에서, 상태 (C) 및 (D)는 불안정한 조건과 연관된다. 불안정한 상태 (C) 및 (D)에서의 호-길이는 주파수 상향과 같은 방향을 따른다. (A)에서 (B)로의 주파수 상태 변화 때문에, 동적 거동들은 상태 (B)에서의 서브-하모닉 효과를 명확하게 반영한다. 도 13의 (a), 도 13의 (b) 및 도 14 (a), 도 14 (b)에서 도시된 시간 이력 및 고속 푸리에 변환(FFT) 결과들이 비교될 때, 동적 특성들의 변화는 쉽게 확인된다. 주파수 범위가 상태 (C) 및 (D)의 주파수 범위로 변하기 때문에, 상기 동적 거동들은 도 13의 (c), 도 13의 (d) 및 도 14의 (c), 도 14의 (d)에 도시된 것처럼 (A) 및 (B) 상태의 동적 거동들보다 훨씬 복잡하다. 상태 (C) 및 (D)의 동적 응답이 확인될 때, 동적 특징들이 안정성 조건에 밀접하게 연관되어 있다는 것은 자명하고, 이는 앞서 수퍼 하모닉 영역에서 밝혀졌다. 상태 (C) 및 (D)에서의 동적 거동은 도 13의 (c), 도 13의 (d) 및 도 14의 (c), 도 14의 (d)에 도시된 것처럼 하모닉 요소들을 더 많이 포함하고 있다는 것을 보여준다. 특히, 상태 (D)에서의 동적 응답은 도 14의 (d)에 도시된 것처럼 다양한 하모닉 요소들을 포함하고 있다.

[0136] STU 및 UTS와 연관된 서브-하모닉 영역에서의 동적 거동들은 도 12 및 도 13에 도시된 것처럼 위상 다이어그램 및 푸앵카레 맵을 사용하는 것으로 또한 분석된다. 위상 다이어그램으로부터, 원의 수는 상태 (A)에서부터 상태 (D)까지 주파수 범위 변화에 따라 증가한다. 특히 상태 (D)는 아주 많은 수의 주기 원을 보여주는데, 그곳에서는 카오스 움직임이 기대된다. 이러한 변동적인 동적 조건들은 도 13에 도시된 바와 같이 푸앵카레 맵에 기반하여 검토되어졌다. (A)에서 (D)까지 상태가 변화함에 따라 주기점들의 수는 증가한다. 도 13의 (d)는 변동적인 주기점들이 지나감에 따라 카오스 움직임을 명확하게 보여준다.

[0137] 전체적으로, 도 10, 11, 12 및 13에서 상태 (A), (B), (C) 및 (D)에서의 동적 거동들이 도 14에 도시된 것처럼 분기 다이어그램으로 비교될 때, 동적 거동들과 안정성 조건들 간의 강한 관계는 명백하고 이는 앞서 수퍼 하모닉 영역에서 검토되었다. 예를 들어, (A) 상태는 오직 기본적인 하모닉 응답만을 개시한다. 그러나, 분기는 주파수 영역이 (B), (C) 및 (D)로 전환될 때 나타난다. (B) 상태에서 시스템 응답이 안정적일 때, 도 14로부터 명

백히 알 수 있듯이 시스템 응답은 주기-더블링을 구현하고, 그것은 서브-하모닉 응답과 연관되어 있다. 그러나 시스템 응답이 도 14에서 도시된 바와 같이, 상태 (C) 및 (D)와 같이 불안정한 조건에 머물 때, 동적 거동들은 주기-더블링 캐스케이드를 보여주고 마침내 움직임이 카오스가 된다. 이것은 또한 표 3에 나타나 있듯이 서로 연관되어 있다.

5. 결론

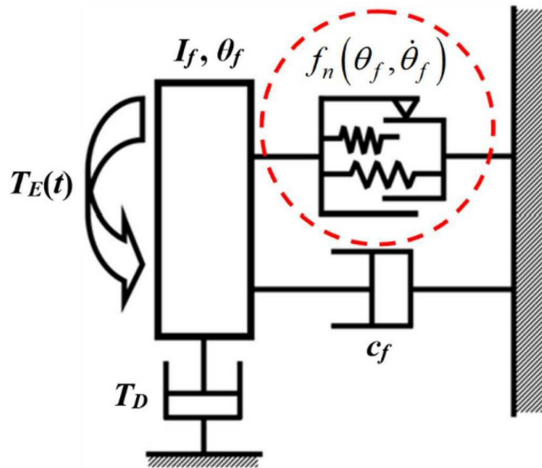
이 연구에서는 수퍼 및 서브 하모닉 영역의 비선형 동적 특성들을 분석했다. 불안정 상태와 연관된 비선형 움직임들을 이해하기 위하여, 이 연구는 안정성 및 분기 분석을 이용할 것을 제안한다. 첫째로, 안정성 조건들이 변화함에 따라, 수퍼 및 서브 하모닉 영역에서의 동적 특성들은 하모닉 균형법을 사용하면서 조사되었다. 이 때, 호-길이의 방향에 따라 안정성 변동들은 주기-더블링, 주기-더블링 캐스케이드(cascade) 및 카오스 움직임과 같은 비선형 동적 거동과 밀접한 관계가 있음이 증명되었다. 둘째로, 이 연구는 안정성 조건들을 수반하는 분기들을 비교하면서 비선형 동적 응답들을 분석하였다. 동적 거동들의 변화를 이해하기 위하여, 고속 푸리에 변환(FFT) 결과, 위상 다이어그램 및 푸앵카레 맵 또한 비교되었다.

더군다나, 분기 다이어그램에 비선형 동적 거동들을 투영하면서 STU 및 UTS 조건들 하에서 비선형 동적 거동들을 조사하고 이해하기 위하여, 이 연구는 수치 시뮬레이션에 기반하여 경험적으로 관련된 호-길이 방향을 결정한다. 그러나, 호-길이 방향 및 안정성 조건들에 관한 동적 특성들을 다양화하기 위한 방법은 분석적으로 정의될 수 있고, 이는 이 작업의 미래가 될 수도 있다.

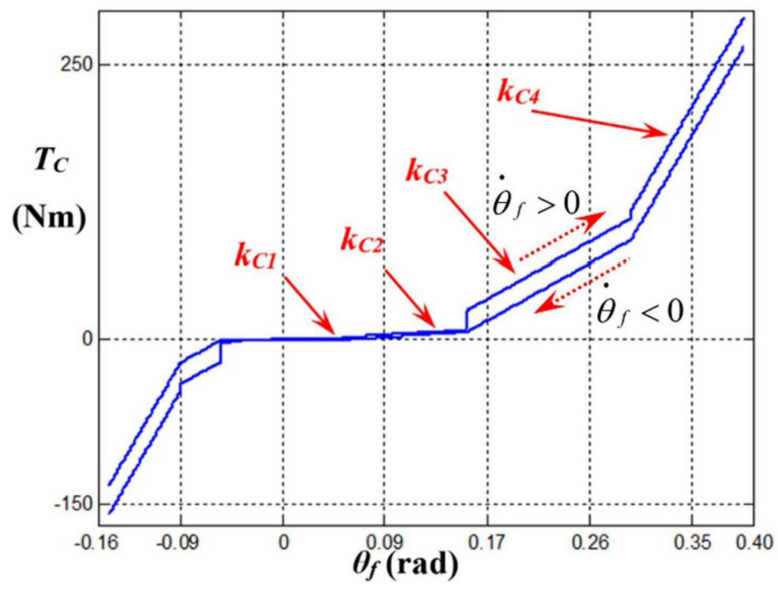
이상에서 다양한 실시예를 들어 본 발명을 설명하였으나, 이에 한정되는 것은 아니며 본 발명의 권리범위로부터 합리적으로 해석될 수 있는 것이라면 무엇이든 본 발명의 권리범위에 속하는 것은 당연하다.

도면

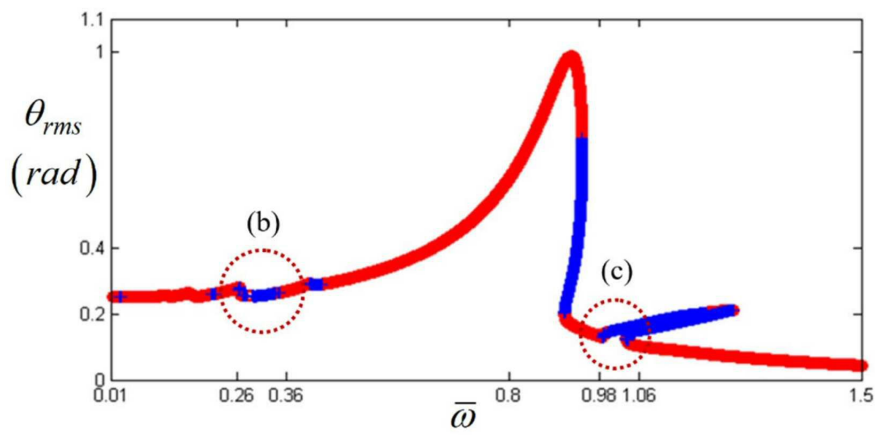
도면1



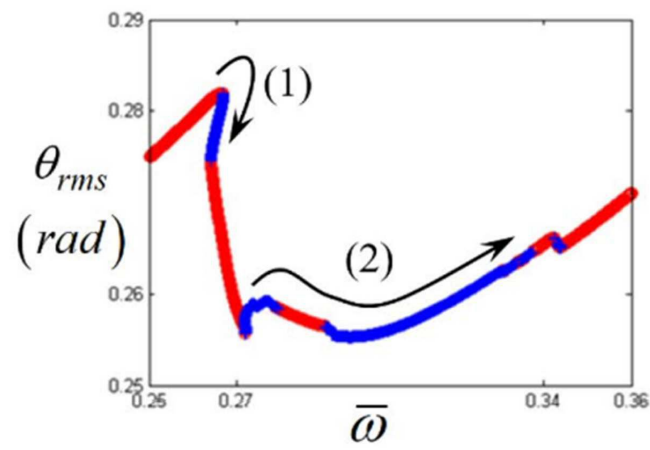
도면2



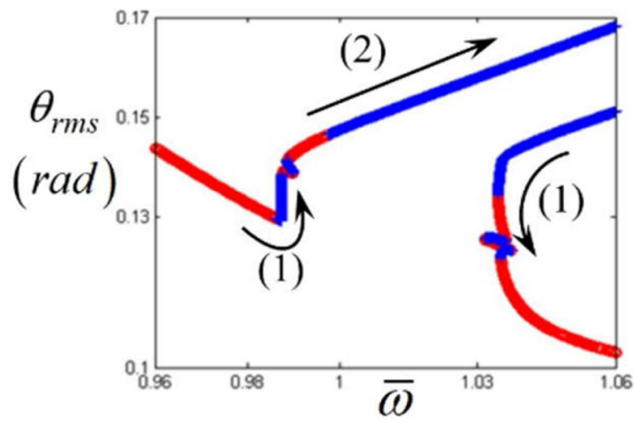
도면3



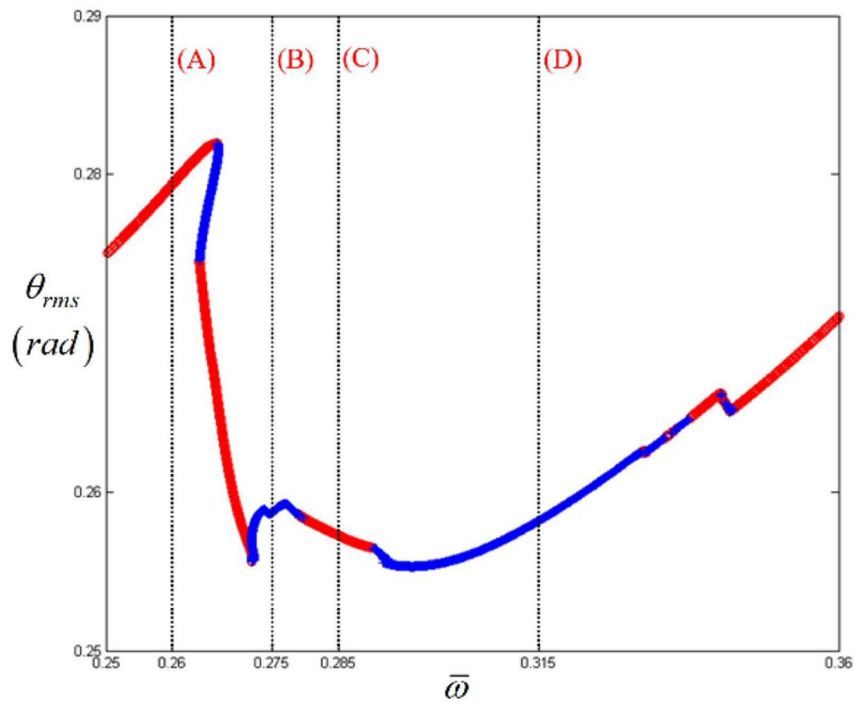
도면4



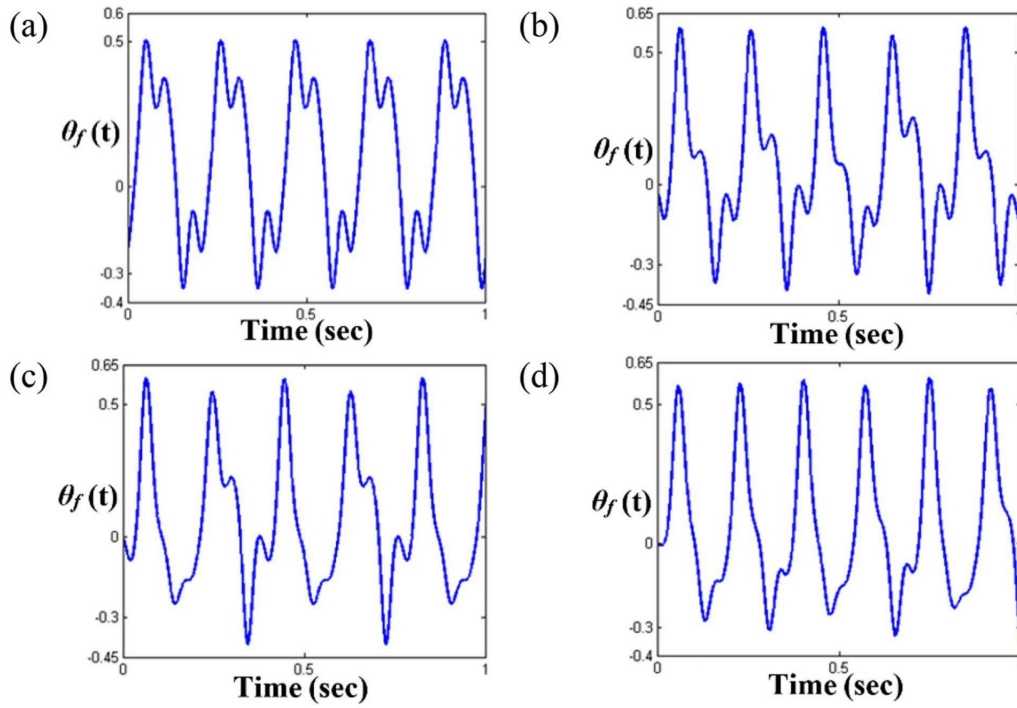
도면5



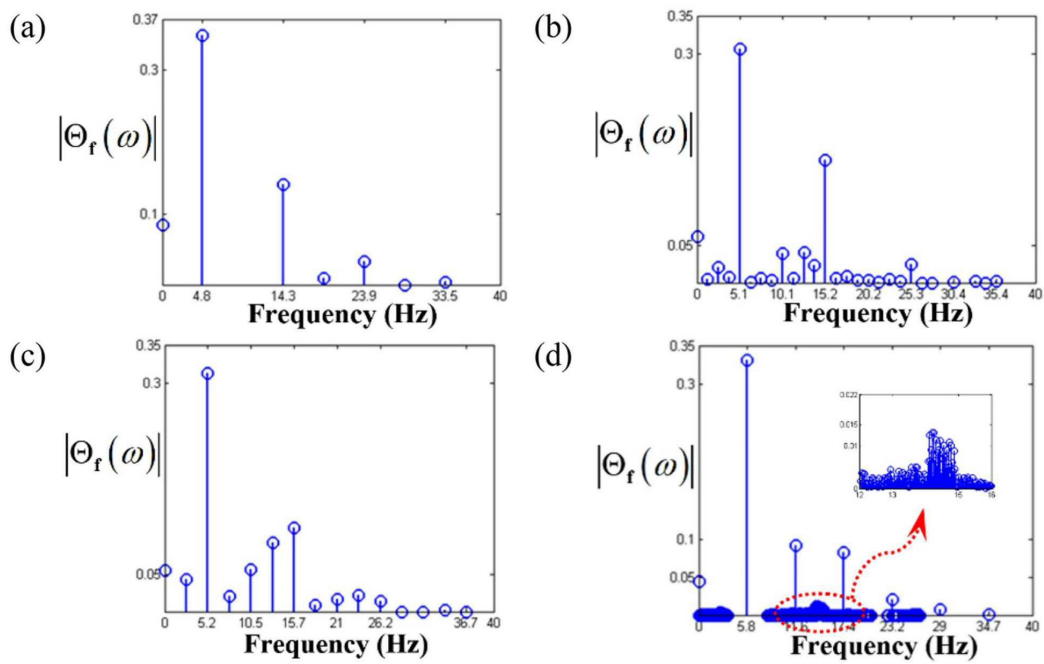
도면6



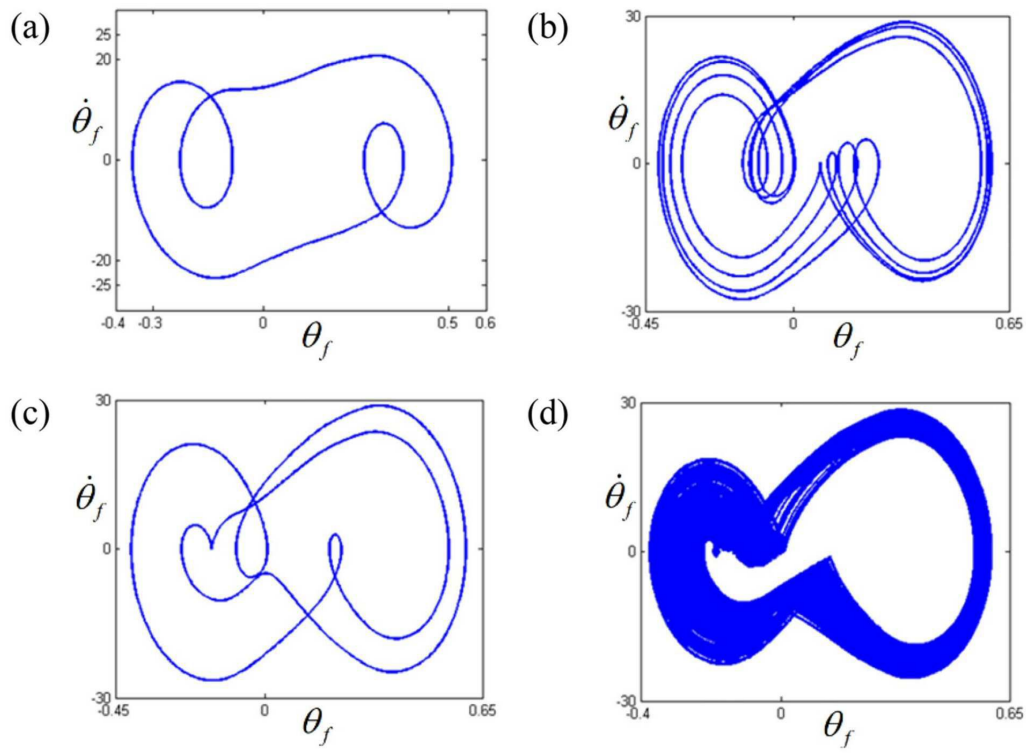
도면7



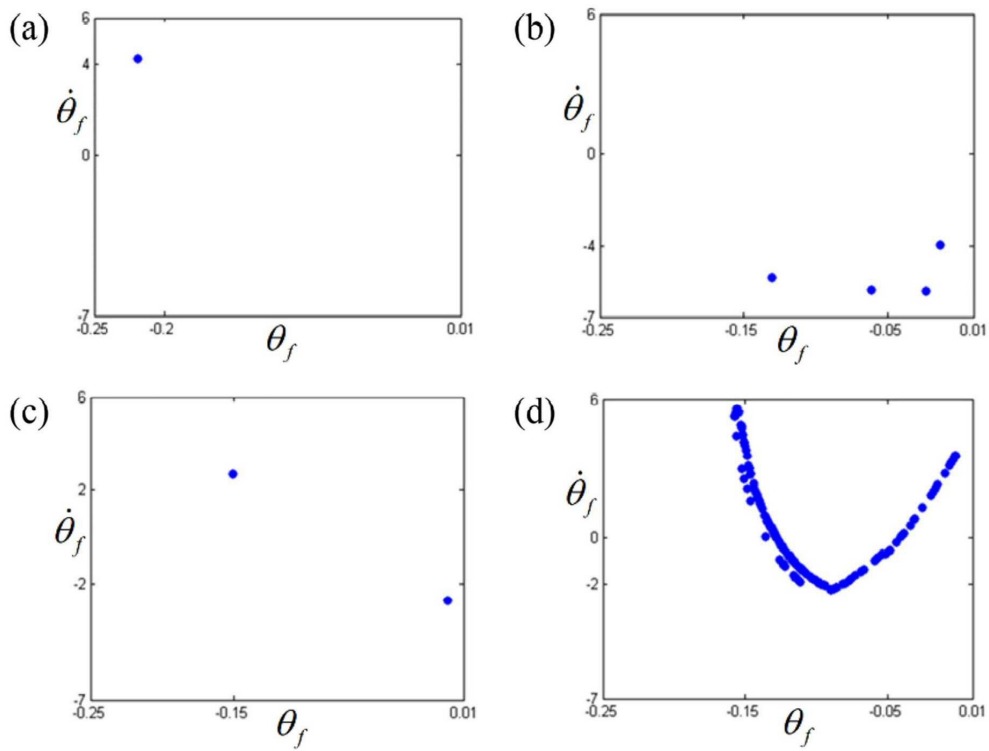
도면8



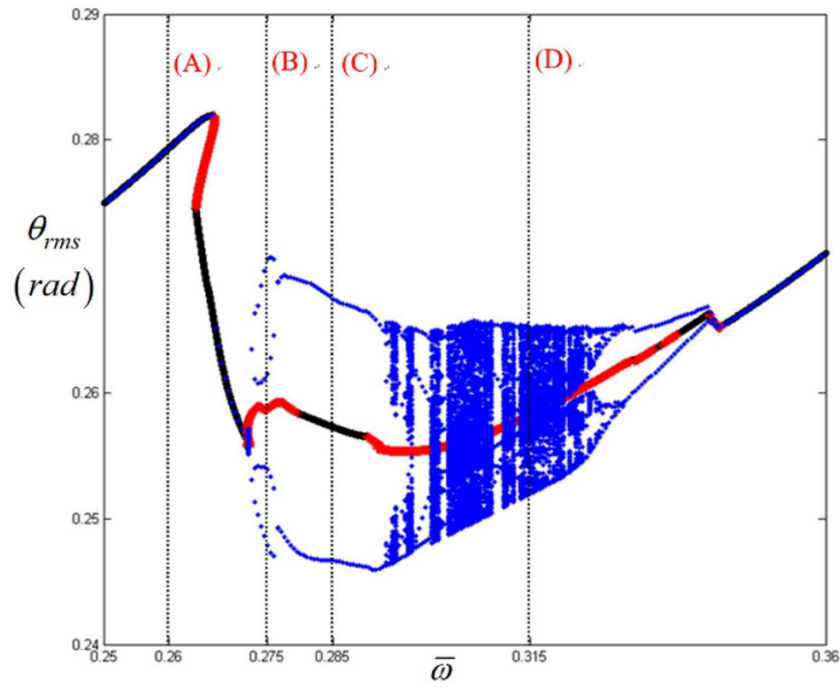
도면9



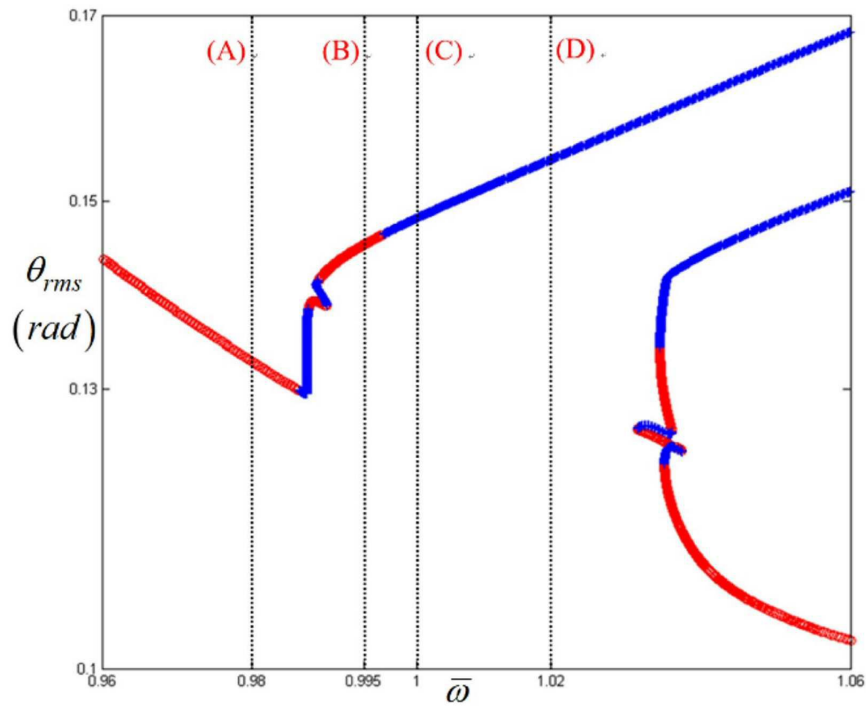
도면10



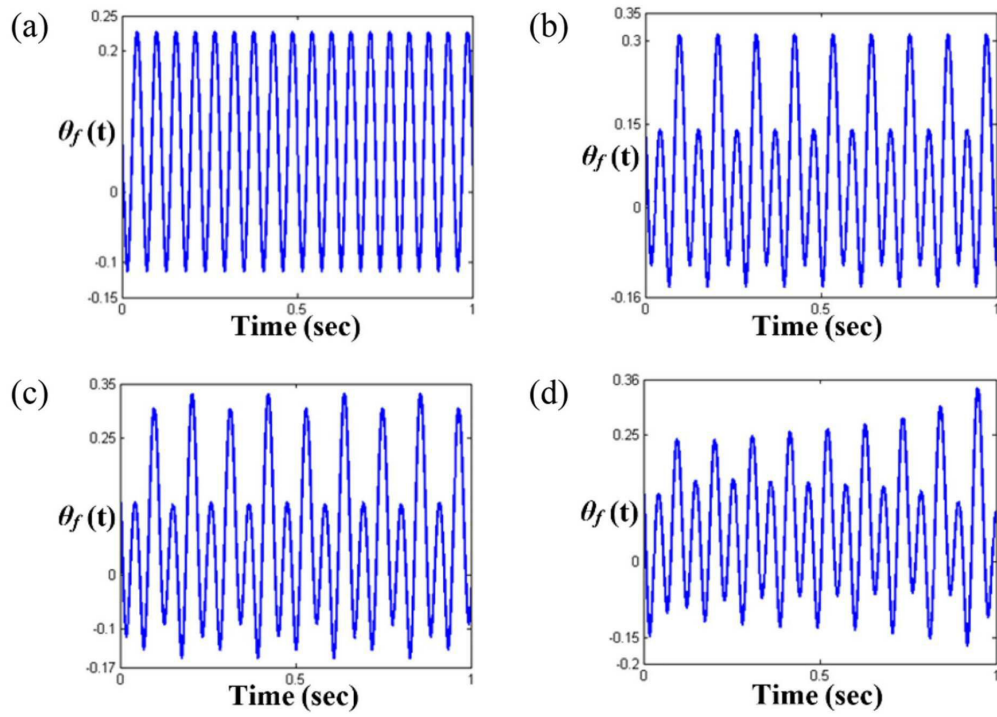
도면11



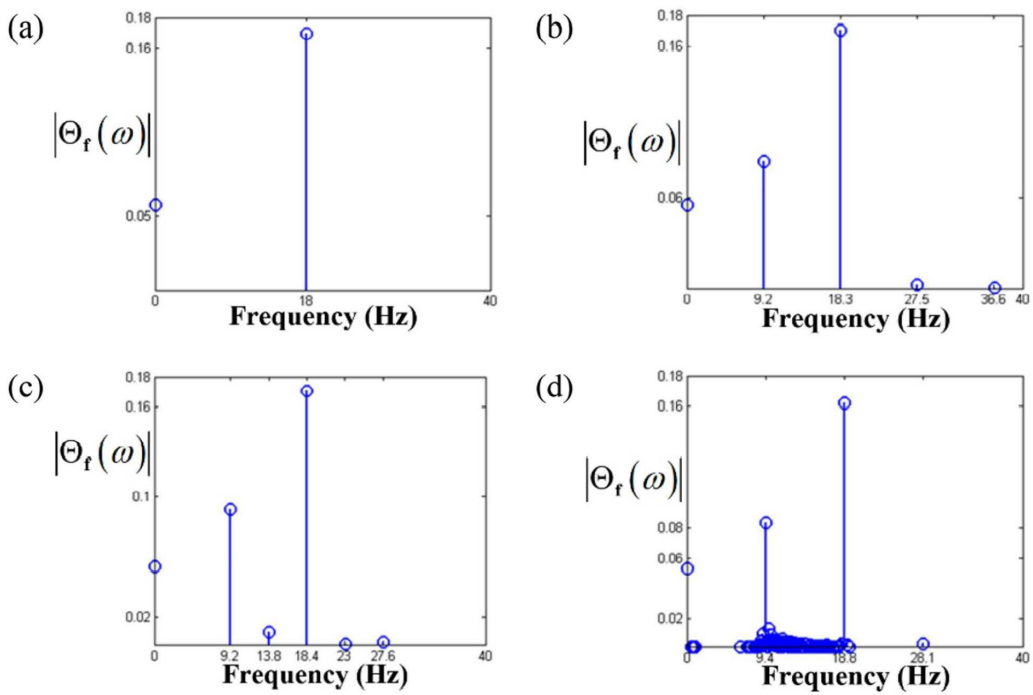
도면12



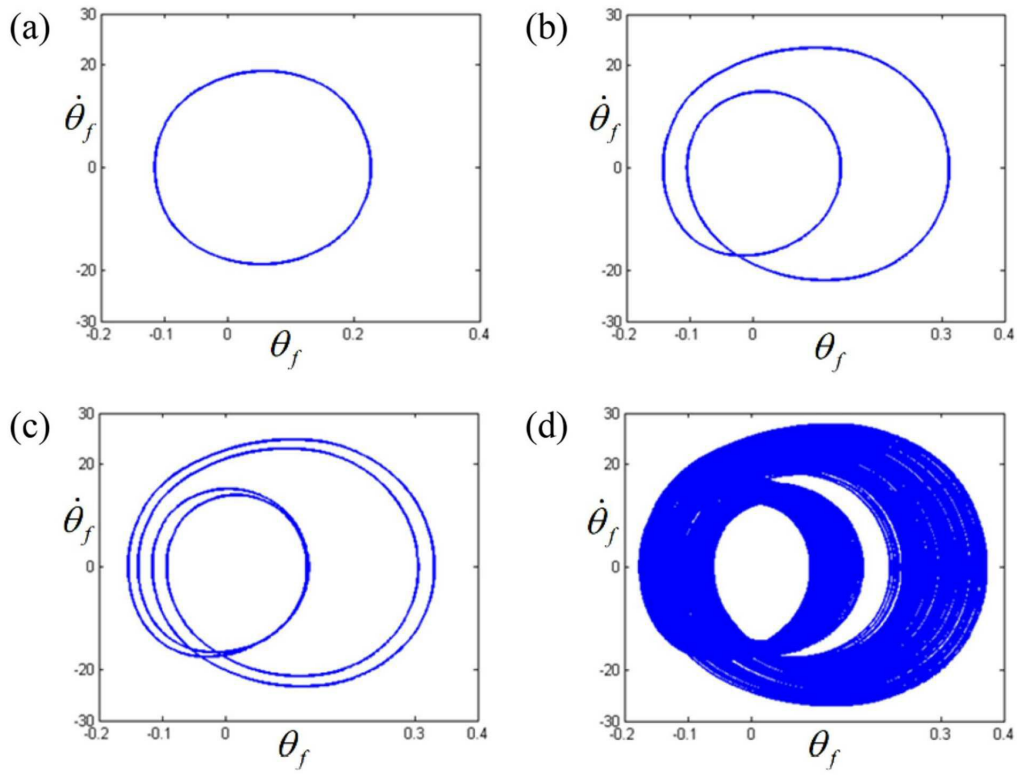
도면13



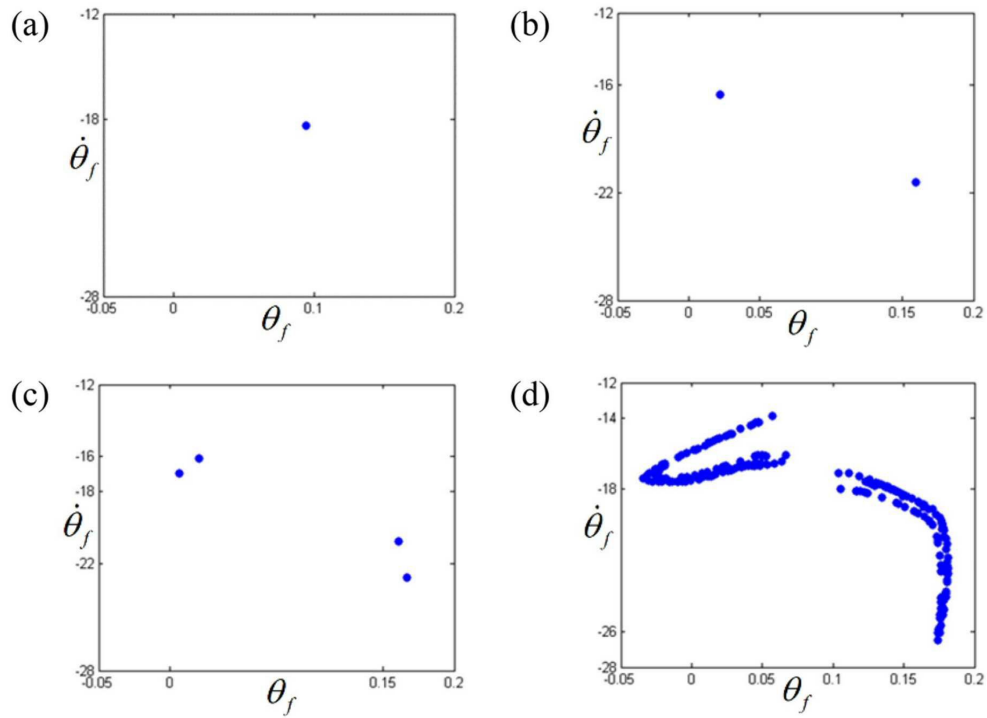
도면14



도면15



도면16



도면17

