



(12) 发明专利

(10) 授权公告号 CN 1867920 B

(45) 授权公告日 2010.09.08

(21) 申请号 200480029820.8

(22) 申请日 2004.09.02

(30) 优先权数据

T02003A000675 2003.09.05 IT

(85) PCT申请进入国家阶段日

2006.04.11

(86) PCT申请的申请数据

PCT/IB2004/002856 2004.09.02

(87) PCT申请的公布数据

W02005/024674 EN 2005.03.17

(73) 专利权人 托里诺综合工科大学

地址 意大利托里诺

(72) 发明人 罗伯特·D·格雷戈里亚

古多·卢巴尔蒂

(74) 专利代理机构 中国国际贸易促进委员会专
利商标事务所 11038

代理人 马浩

(51) Int. Cl.

G06F 17/50 (2006.01)

(56) 对比文件

GRAGLIA R D ET AL. Higher order
interpolatory vector bases for
computational electromagnetics. IEEE
transactions on antennas and propagation
3. 1997, 45(3), 第 329-342 页第 1 部分 5 段到第 3
部分, 第 5, 7-9 部分、图 2, 7.

GRAGLIA R D ET AL. Vector functions
for singular fields on curved
triangularelements, truly defined in the
parent space. IEEE antennas and propagation
society international symposium 1. 2002, 1 第
62-65 页第 1, 2 部分, 图 1, 表 1.

PANTIC-TANNER Z ET AL. Two-dimensional
singular vector elements for finite-
element analysis. IEEE transactions on
microwave theory and techniques IEEE USA 46
2. 1997, 46(2), 第 178-184 页.

审查员 李原野

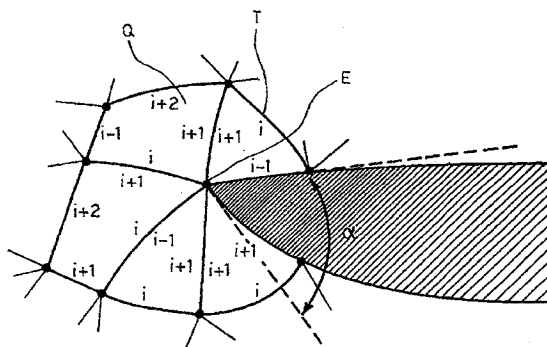
权利要求书 2 页 说明书 14 页 附图 7 页

(54) 发明名称

物体的奇异向量物理量的数值建模方法、相
关系统

(57) 摘要

一种用于模拟与至少一个物体 (E) 相关联的
奇异向量物理量的数值过程, 其中物理量可能有
在奇点区域中取不受限制的值的局部奇异行为;
该过程的特征在于以下操作: 扫描 (10) 奇点区
域的几何条件并且利用坐标系统来绘制它; 将奇
点区域细分为二维域, 该二维域通常是曲线式的;
以及参考这些域描述直接位于父域中的至少一个
物理量的属性, 从而为用 (T、TE、TV) 三角形和 (Q)
四边形网格化的域导出奇异旋度保形基函数和奇
异散度保形基函数, 所述域通常是曲线式的。此
外, 该过程允许了针对 FEM 和 MoM 应用定义特定的
奇异基函数集合 (图 1)。



1. 一种用于数值地模拟与至少一个奇点区域 (E) 相关联的奇异向量物理量的方法, 该方法包括:

- 扫描所述奇点区域的几何条件到一个父域;
- 将所述奇点区域的几何条件细分为二维域, 所述二维域包括三角形元素 T、TE、TV 和四边形元素 Q;
- 参考所述二维域描述直接位于父域中的至少一个物理量的属性, 以及为所述二维域导出奇异旋度保形基函数和奇异散度保形基函数, 其中奇异旋度保形基函数包括势能函数和边缘减少函数中的至少之一。

2. 权利要求 1 的方法, 其中至少一个所述二维域被至少一个曲线式元素网格化。

3. 权利要求 1 的方法, 其中导出奇异旋度保形基函数包括对称地利用高阶势能来确定所述奇异旋度保形基函数的静态分量。

4. 权利要求 1 的方法, 其中导出奇异旋度保形基函数的动态分量包括利用高阶边缘减少基函数。

5. 权利要求 1 的方法, 其中限定奇异散度保形基函数包括为三角形元素 TE 限定第一种类的奇异散度保形基函数以及为三角形元素 TV 限定第二种类的奇异散度保形基函数。

6. 权利要求 1 的方法, 所述方法限定最低数目的旋度保形基函数和散度保形基函数以模拟所述奇异行为, 并联系所选中的基的阶数估计自由度的数目。

7. 权利要求 1 的方法, 至少在有限元方法代码和力矩方法代码之一中实现奇异旋度保形基函数。

8. 权利要求 7 的方法, 所述有限元方法代码中的所述奇异基函数完备到最低阶并且满足以下要求:

- 所述基函数及其旋度完备到最低阶, 即零阶;
- 网格化的域与和一个或多个非奇异边缘相邻的相同正则阶的正则元素完全兼容 - 这些函数适合于模拟 ρ^{-1} 静态奇异行为;
- 这些函数适合用于模拟具有在逼近奇异区域时像 ρ^v 那样消没的旋度的非奇异行为场。

9. 权利要求 1 的方法, 其中模拟靠近奇点区域 (E) 处的横向场的静态奇异分量包括从所述多个奇势能函数的梯度导出奇异向量基。

10. 权利要求 9 的方法, 其中这些奇势能函数满足以下要求:

- 当奇点系数 v 等于 1 时它们消没
- 在所有元素边缘 i 上它们都恒等于零, 除了附接到奇点区域 (E) 的那个以外
- 所述势能被构造为保证其沿着其中势能不为零的边缘的梯度的正确的奇异切向分量。

11. 权利要求 1 的方法, 其特征在于: 必须在所述奇点区域中限定向量基函数集合以模拟靠近所述奇点处的场的旋度行为的动态分量。

12. 权利要求 7 的方法, 其特征在于: 在基函数模拟奇异电流密度的力矩方法代码中, 所述奇异基函数包含完全满足以下要求的奇异散度保形子集:

- 所述基函数及其散度完备到最低阶, 即零阶;
- 网格化的域与和一个或多个非奇异边缘相邻的相同正则阶的正则元素完全兼容;

- 这些函数适合用于模拟靠近所述奇点区域 (E) 处的电流和电荷的 ρ^{-1} 奇异行为；
- 这些函数适合用于模拟与所述奇点区域 (E) 正交并随着 ρ^{ν} 消没的电流的非奇异行为。

13. 一种用于数值地模拟与至少一个奇点区域 (E) 相关联的奇异向量物理量的系统 (16), 包括:

扫描模块, 用于产生具有奇点区域 (E) 的物体的表面地图,

模数转换模块 (12), 用于把所述地图转换为父域中的数值数据,

用于扫描所述奇点区域的几何条件到一个父域的装置;

用于将所述奇点区域的几何条件细分为二维域的装置, 所述二维域包括三角形元素 T、TE、TV 和四边形元素 Q;

用于参考所述二维域描述直接位于父域中的至少一个物理量的属性的装置, 以及

用于为所述二维域导出奇异旋度保形基函数和奇异散度保形基函数的装置, 其中奇异旋度保形基函数包括势能函数和边缘减少函数中的至少之一。

14. 权利要求 13 的系统, 其特征在于该系统设置在定位仪器上。

物体的奇异向量物理量的数值建模方法、相关系统

技术领域

[0001] 本发明涉及诸如力场、电场和电磁场、电流场之类的能够在局部表现得像奇异量的向量物理量的数值建模技术。通常在诸如尖锐边缘、断裂、翼形或楔形的边缘、顶点和类似结构之类的材料和 / 或几何尖锐不连续点附近能够发现奇异行为。物理量的奇点意味着这些量在奇异区域中是不受限制的。在最坏情况下, 这些值在奇异区域的一个或多个极点处是无穷大的。尤其在奇异区域附近能够观察到物理量的奇异行为。

[0002] 在奇异区域中, 即使物理量具有奇异行为, 即具有无限的值, 能量也是局部性的并且保持有限。这些数值建模技术是在特别注意到以下可能的软件应用的情况下开发的: 利用不同性质的奇异物理量精确分析和设计结构。在电磁学中, 对具有楔形、边缘、顶点、尖端和类似结构的结构中的场和电流的精确研究具有若干个应用: EMC (电磁兼容性)、EMI (电磁干扰) 以及不同复杂结构的雷达应用。这些技术被用于被动电磁设备 (模态滤波器、正交模式换能器 ...) 的属性 (例如损耗、反射和透射) 的分析中。

[0003] 使用此过程的候选软件利用了文献中已知的带形容词“有限”的数值方法 (有限方法)。

背景技术

[0004] 商业代码和最先进的研究代码利用在子域上定义的展开函数 (基函数) 来模拟问题的未知量 (向量物理量), 所述展开函数是向量多项式函数。物理问题是经由偏微分方程或积分方程来公式化的, 并且它被数值地离散化。为了模拟物理量的可能的奇点, 在特定场中, 最先进的商业代码利用尺寸极度减小的子域来对奇异区域进行离散化。此技术部分地改进了解的收敛属性, 同时增大了计算成本。尺寸“减小”的子域之所以被用于奇异区域中是因为增大展开函数的多项式阶数以改进解答精度是不合适的。其他技术利用分级展开函数, 然而这种分级展开函数却由于其多项式性质因而并不意味着解答的收敛。

[0005] 实际上, 奇点必须由具有负分数阶数的指数的函数 (无理代数函数) 来模拟; 因此不可能通过利用具有整数指数的多项式方程来正确地模拟此行为。

[0006] 为了增大数值代码的效率和提高存在奇点时的解答精度, 必须定义结合了接近几何和 / 或材料奇点的物理行为的基函数。

[0007] 在电磁学中, 已引入了非多项式种类的基函数, 但是结果并不令人满意, 因为所有提出的函数都表现出了缺陷和模拟差错。

[0008] 现今, 利用分段高阶向量基的数值方法能够计算非常复杂的电磁结构中的物理量而无需过多的计算成本, 除了对具有“奇异”几何条件的结构外。

[0009] 有限元方法 (FEM) 可用于对具有各向同性或各向异性介质的偏微分模型进行离散化。

[0010] 此外, 在 FEM 应用中, 旋度保形 (curl conforming) 型高阶向量展开函数的使用增大了解答的计算精度, 并且它消除了文献中已知的数值问题 - 例如参见以下论文: R. D. Graglia, D. R. Wilton 和 A. F. Peterson, “Higher order interpolatory vector bases

for computational electromagnetics(用于计算电磁学的高阶插值向量基)”, special issue on “Advanced Numerical Techniques in Electromagnetics” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, no. 3, pp. 329–342, Mar. 1997– 作为虚假非物理模式或虚假解答。

[0011] 以类似的方式,力矩方法(MoM)可被应用到利用散度保形型高阶向量展开函数来对积分方程进行离散化。

[0012] 实际工程感兴趣的无数结构包含由可穿透或不可穿透的介质构成的边缘、楔形、顶点、尖端或类似结构。在这些不连续点附近,物理量可能是无理代数型奇异的,例如以下出版物中所示:J. VanBladel, Singular Electromagnetic Fields and Sources Oxford: Clarendon Press, pp. 116–162, 1991 和 J. Meixner, “The behavior of electromagnetic fields at edges(边缘处的电磁场行为)”, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-20, no. 4, pp. 442–446, Jul. 1972。

[0013] 由于在这些不连续点处奇异行为占优势,因此对这些结构的数值分析利用了局部非常密集因此从计算观点来看也非常昂贵的网格。

[0014] 一般而言,不承认迭代网格细化能够对这些问题提供良好有效的解答,而迭代网格细化涉及复杂的过程和代码,增加了计算时间并且使用了额外的存储器。

[0015] 文献表明,迭代网格细化被广泛用于FEM场境中,而它几乎不会被MoM从业者所考虑,这是因为对于细化的每个步骤都必须重新计算太多的MoM矩阵系数。

[0016] 重网格细节或对使用非常密集的网格的最佳替换是引入能够精确模拟物理量的奇异边缘行为的奇异函数。

[0017] 即使通过增大正则基的多项式阶数,也不一定会获得数值解答的完全收敛。

[0018] 在本描述的过程中,我们参考电磁场环境,但是所提出的过程也可被扩展到不同性质的问题,在这些问题上,物理未知量是向量型的,并且问题由PDE(偏微分方程)或IE(积分方程)所描述,就像声学 and 机械问题中那样。

[0019] 以下论文给出了能够数值地模拟奇异电磁场的FEM应用的特定函数:J. M. Gil 和 J. P. Webb, “A new edge element for the modeling of field singularities in transmission lines and waveguides(传输线和波导中的场奇点的建模的新边缘元素)”, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. 45, n. 12, Part 1, pp. 2125–2130, Dec. 1997。

[0020] 但是,该过程使用了三角极坐标系统来限定基函数,这意味着数值代码的计算成本的增大以及处理曲线子域(曲线元素)的困难。此外,所提出的函数中六个用于横向分量,六个用于纵向分量,从而它们与相邻的一阶正则元素兼容。所提出的该元素不是最低阶(零阶)的。此外,没有描述用于构建高阶的奇异元素的过程。

[0021] 最后,该论文中提出的函数在奇点系数 ν 等于1时不会消没,并且在 $\nu \rightarrow 1$ 的极限情况下它们具有非物理性爆发行为(纵向分量)。该过程是基于三角形元素的,并不表现对问题的详细物理分析:函数没有被细分为静态分量(势能函数)和动态分量。

[0022] 即使以下论文也使用了三角极坐标系统来定义奇异基函数:Z. Pantic-Tanner, J. S. Savage, D. R. Tanner, 和 A. F. Peterson, “Two-dimensional singular vector elements for finite-element analysis(有限元分析的二维奇异向量元素)”, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 46, pp. 178–184, Feb. 1998。在该论文中,所提出的函数中有

八个是横向分量。这比起定义与相邻的零阶正则元素兼容的奇异最低阶元素所必要的是过多了。纵向分量的行为未被考虑。即使在这种情况下,也没有给出对物理性质的详细分析,并且函数未被细分到静态分量(势能分量)和动态分量中,此外所提出的元素是三角形的,并且没有给出用于定义高阶元素的过程。

[0023] 所述文献包含了定义能够处理 MoM 应用中的表面电流密度的基函数的过程。

[0024] 具体而言,W. J. Brown 和 D. R. Wilton 的以下论文提出了一种基于三角形元素的过程:“Singular basis functions and curvilinear triangles in the solution of the electric field integral equation(电场积分方程的解答中的奇异基函数和曲线三角形)”IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 47, n. 2, pp. 347-353, Feb. 1999。该过程不是加性的,并且所提出的函数是不可替换型的,即,当 v 为 1 时,获得了散度保形型正则基函数。

[0025] 此外,该发表物没有描述任何用于定义高阶元素的技术。

发明内容

[0026] 本发明实现了能够解除前述已知解决方案的解决方案,并且定义了结合了几何和/或材料奇点附近的物理行为并且包括了问题的物理属性的基函数。

[0027] 参考本发明的过程实现了该目标。

[0028] 本发明还涉及系统,以及可加载到数字机器(例如处理器)的存储器中的具有特定软件指令以便实现本发明中所描述的过程的相应软件。

[0029] 实际上,所提出的解决方案包括一种与至少一个具有可能的局部奇异行为的物体相关联的向量物理量的数值建模过程。该过程定义二维曲线子域上的旋度保形和散度保形型高阶向量奇异函数。所提出的基函数是直接在此域中定义的,而不引入任何中间的坐标系(R. D. Graglia, D. R. Wilton 和 A. F. Peterson, “Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics(用于计算电磁学的高阶插值向量基)”, special issue on “Advanced Numerical Techniques in Electromagnetics” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, no. 3, pp. 329-342, Mar. 1997)。

[0030] 在电磁问题中,所提出的基函数结合了奇异需求并且能够针对奇点系数 v 的每个值近似奇点附近的未知量。对于旋度保形函数(FEM 情况),楔形可以是可穿透的。相反对于散度保形函数(MoM 情况),楔形被假设为不可穿透的。

[0031] 旋度保形函数和散度保形函数与标准的高阶向量正则元素(多项式型)是兼容的(R. D. Graglia, D. R. Wilton 和 A. F. Peterson, “Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics(用于计算电磁学的高阶插值向量基)”, special issue on “Advanced Numerical Techniques in Electromagnetics” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, no. 3, pp. 329-342, Mar. 1997)。

[0032] 与已知解决方案相比,这种新技术消除了缺陷和模拟误差,并且完全遵循问题的物理性质。

附图说明

[0033] 在这个部分中,将通过参考附图不失一般性地描述本发明:

[0034] 图 1 示出根据本发明的具有旋度保形奇异元素的曲线楔形的离散化过程和模拟

过程的示意图；

[0035] 图 2 示出根据本发明的具有散度保形奇异元素的曲线楔形的离散化过程和模拟过程的示意图；

[0036] 图 3 至 6 示出根据本发明的带隔膜的圆形波导（带叶片的波导）上的建模过程的测试图；

[0037] 图 7 和 8 示出根据本发明的具有非零厚度的双隔膜的圆形波导上的建模过程的测试图；

[0038] 图 9 示出实现根据本发明的建模过程的系统；

[0039] 图 10 示出图 9 所描述的系统的生产性示例。

具体实施方式

[0040] 这里回忆一下与本发明相关的基本理论，作为对生产性示例的详细描述的引言。

[0041] 在电磁学中，表面积分方程的 MoM 解要求电流的离散化；相反，FEM 方法要求电 (E) 场或磁 (H) 场的离散化。

[0042] 注意到以下这点是很重要的：诸如楔形这样的几何和材料不连续点屈从于二维问题，因为边缘可以被视为是局部直线性的。

[0043] 为了处理物理量的奇点，必须将模型细分为以下两类：

[0044] -PDE (偏微分方程)，其要求旋度保形基函数（闭合和开放结构中的电磁场波方程...）；

[0045] -IE (积分方程)，其要求散度保形基函数（衍射问题、天线问题中的电流场...）。

[0046] 让我们考虑一下角频率 ω 下的通用电磁问题，其中孔径角为 α 的楔形 E 被浸没在自由空间中。

[0047] 对于旋度保形函数 (PDE 情况，FEM)，楔形可以是可穿透的，而对于散度保形函数 (IE 情况，MoM)，楔形只能是不可穿透的。

[0048] 图 1，FEM 情况，为此目的示出了具有孔径角 α 的曲线楔形区域 E 的一部分。网格，即进到子域中的离散化，是由“旋度保形”型的三角形和四边形曲线元素构成的。奇异三角形元素被标注以 T，而四边形奇异元素被标注以 Q；它们被附接到纵向延伸的楔形 E 的顶点。T 或 Q 元素的边缘在局部被逆时针编号，其中 i-1 到 i+1 用于三角形元素 T，i-1 到 i+2 用于四边形元素 Q。对于每个 T 元素，第 i 边缘与尖锐边缘顶点相对，对于每个 Q 元素，第 i 边缘和第 i+1 边缘被连接到尖锐边缘顶点。

[0049] 通过引入原点位于楔形 E 的边缘处的极坐标系统，电磁量呈现以下形式（不可穿透的传导型边缘）：

$$[0050] \quad \mathbf{J}_s = \frac{\nu A}{\rho^{1-\nu}} \hat{\mathbf{z}} + j\omega\epsilon_0 B \rho^\nu \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$[0051] \quad \begin{cases} E_r = j\omega\mu_0 A \rho^\nu \sin \nu\phi \\ H_t = \frac{\nu A}{\rho^{1-\nu}} (\sin \nu\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} - \cos \nu\phi \hat{\boldsymbol{\rho}}) \end{cases} \quad (1)$$

$$[0052] \quad \begin{cases} H_r = j\omega\epsilon_0 B \rho^\nu \cos \nu\phi + \text{constant} \\ E_t = -\frac{\nu B}{\rho^{1-\nu}} (\cos \nu\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + \sin \nu\phi \hat{\boldsymbol{\rho}}) \end{cases}$$

[0053] 对于可穿透的楔形, 奇异系数 ν 依赖于材料和几何条件, 即楔形 E 的孔径角 (J. Van Bladel, Singular Electromagnetic Fields and Sources Oxford: Clarendon Press, pp. 116-162, 1991)。奇异系数 ν 通常是针对静态情况被估计的, 这是因为奇异系数是独立于频率的。

[0054] 所提出的与物体相关联的物理量的数值建模过程涉及对在父域上直接定义的 T 或 Q 元素的属性的描述, 以及对通过 T 和 Q 元素离散化的域的奇异旋度和散度保形基函数的定义。

[0055] 所述过程对称地定义高阶势能, 以模拟旋度保形基的静态分量。

[0056] 此外, 所述过程定义边缘减少 (edge-less) 型高阶函数, 以模拟旋度保形基的动态分量。

[0057] 此外, 所述过程涉及对 T 和 Q 元素的散度保形基的定义。T 元素根据它是否是填充元素而被细分为两类。

[0058] 此外, 所述过程涉及对能够模拟奇异行为的旋度保形基函数的最小数目和散度保形基函数的最小数目的限定, 因此它根据所选择的基的多项式阶数来确定正确的自由度数目。

[0059] 此外, 所述过程定义基函数必须遵循的属性集合, 以便正确地模拟 PDE 或 IE 所描述的问题。

[0060] 此外, 过程描述用于在 FEM 和 MoM 代码内实现奇异基的过程。

[0061] 现有我们区分不同的情况:

[0062] - 模拟奇异电磁场的 FEM 应用的函数;

[0063] - 模拟奇异表面电流密度的 MoM 应用的函数。

[0064] 对于其中基函数模拟电磁场的 FEM 应用, 所提出的建模过程涉及最低阶奇异旋度保形完备基必须满足以下要求:

[0065] - 基集合及其旋度必须正好完备到最低阶 (零阶);

[0066] - T 和 Q 元素必须与附接到其非奇异边缘的相同正则阶的相邻正则元素完全兼容;

[0067] - 基函数必须模拟静态 $\rho^{\nu-1}$ 奇异行为;

[0068] - 基函数必须模拟在逼近楔形 E 的边缘时其旋度的行为像 ρ^{ν} 的非奇异场;

[0069] 引入第一要求不是为了限制靠近楔形 E 处 T 和 Q 元素的网格尺寸, 此外这个要求迫使最低阶函数集合必须包含所有的零阶正则基函数。

[0070] 第二个要求是去除虚假数值解答所必要的。

[0071] 第三个要求和前面的要求一起迫使奇异基函数必须被添加到正则子集中, 以构建完备基; 此外奇异函数不能是插值形式的, 这是因为它们必须模拟依赖于场的能量属性的局部奇异行为 (具有负分数指数)。

[0072] 第三和第四个要求允许了根据先前在所引用的 Van Bladel 和 Meixner 的出版物中描述的行为来对问题进行正确的物理建模。

[0073] 具体而言, 第三要求表明, 场的奇异行为被静态分量 (零旋度) 良好地模拟, 因此被标量势能函数的梯度良好模拟。此外, 该势能正确地模拟了场的纵向分量。

[0074] 第四个要求描述了场的动态行为 (具有 ρ^{ν} 行为的旋度), 这种动态行为能够被根据本过程的属于边缘减少型的函数所模拟, 这是因为这些函数必须模拟场旋度而不是场本

身;此外这些函数不会对与相邻正则元素的兼容性和一致性造成任何问题。

[0075] 根据该过程,为了模拟尖锐边缘 E 附近的横向场,我们根据旋度的行为导出奇异基函数作为标量势能的梯度。

[0076] 这些函数必须满足以下要求;

[0077] - 对于 $v = 1$ 它们消没

[0078] - 在所有元素边缘 i 上它们都恒等于零,除了附接到尖锐边缘 E 的那个以外;这个要求保证了每个势能的梯度与势能在其中为零的元素边缘恰好正交

[0079] - 势能被构造为保证其沿着势能在其中不为零的边缘的梯度的正确的奇异正切分量。

[0080] 我们提出最低阶势能函数的定义如下:

[0081] T 三角形元素

$$[0082] \quad \phi_{i\pm 1}(\mathbf{r}) = \xi_{i\mp 1} \left[1 - (1 - \xi_i)^{\nu-1} \right] \quad (2)$$

[0083] Q 四边形元素:

$$[0084] \quad \phi_i(\mathbf{r}) = \xi_{i+2} (\xi_i - \xi_j^*) \quad (3)$$

$$[0085] \quad \phi_j(\mathbf{r}) = \xi_{j+2} (\xi_i - \xi_i^*)$$

[0086] 通过利用 Silvester 的 s 阶插值多项式 $a_{abc}^i(s, \xi)$ (R. D. Graglia, D. R. Wilton 和 A. F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics", special issue on "Advanced Numerical Techniques in Electromagnetics" IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, no. 3, pp. 329-342, Mar. 1997), 或者通过利用其他完备多项式集合, 可以定义更高阶 s 的势能函数如下:

[0087] T 三角形元素:

$$[0088] \quad \phi_{abc}^{i\pm 1}(\mathbf{r}) = \alpha_{abc}^{i\pm 1}(s, \xi) \phi_{i\pm 1}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

[0089] Q 四边形元素:

$$[0090] \quad \phi_{ac;bd}^i(\mathbf{r}) = \alpha_{ac;bd}^i(s, \xi) \phi_i(\mathbf{r}),$$

$$[0091] \quad \phi_{ac;bd}^{i+1}(\mathbf{r}) = \alpha_{ac;bd}^{i+1}(s, \xi) \phi_{i+1}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

[0092] 为了模拟三角形元素 T 的横向分量,最低阶奇异旋度保形基包含表 1 中所报告的正则零阶函数、势能的梯度以及边缘减少函数,如下:

[0093] 最低阶旋度保形基

三角基，下标以 3 为模计数，并且 $i=1, 2$ 或 3	
基函数	表面旋度
正则函数 对于 $\beta=i, i\pm 1$ [0094] $\Omega_\beta(r) = \xi_{\beta+1} \nabla \xi_{\beta-1} - \xi_{\beta-1} \nabla \xi_{\beta+1}$	对于 $\beta=i, i\pm 1$ $\nabla \times \Omega_\beta(r) = 2\hat{n}/J$
楔形函数 ${}^0\Omega_{i\pm 1}(r) = \nabla [\xi_{i\mp 1} (1 - \chi^{\nu-1})]$ ${}^\nu U_i(r) = (1 - \nu)(\chi^\nu - 1)\Omega_i(r)$ 其中 $\chi = 1 - \xi_i$	$\nabla \times {}^0\Omega_{i\pm 1}(r) = 0$ $\nabla \times {}^\nu U_i(r) = (1 - \nu) \frac{[(2 + \nu)\chi^\nu - 2]}{J} \hat{n}$ 其中 $\chi = 1 - \xi_i$

[0095] 表 1

[0096] 表 1 中的三角形元素 T 的函数的属性为：

[0097] - 完备到最低阶（函数及其旋度），如以下线性组合描述

[0098] ${}^0\Omega_{i+1}(r) + \Omega_{i+1}(r) + {}^0\Omega_{i-1}(r) + \Omega_{i-1}(r) = \nu(1 - \xi_i)^{\nu-1} \nabla \xi_i \quad (6)$

[0099]

$$\nabla \times [{}^\nu U_i(r) + (1 - \nu)\Omega_i(r)] = (1 - \nu) \frac{(2 + \nu)(1 - \xi_i)^\nu}{J} \hat{n}$$

[0100] - 旋度保形

[0101] - 根据下式的高阶集合依存关系：

[0102] $\nabla [\xi_{i+1}\phi_{i+1}(r) - \xi_{i-1}\phi_{i-1}(r)] = 0 \quad (7)$

[0103] - 高阶：以上方案被定义为阶数 $[p, s] = [0, 0]$ （最低）。

[0104] 具有一般阶数 $[p, s]$ 的高阶函数集合如下：

[0105]

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^\nu U_{abc}^i(r) = \alpha_{abc}^i(s, \xi) {}^\nu U_i(r) \\ {}^0\Omega_{abc}^{i+1}(r) = \alpha_{abc}^{i+1}(s, \xi) {}^0\Omega_{i+1}(r) \\ \quad + \phi_{i+1}(r) \nabla \alpha_{abc}^{i+1}(s, \xi) \\ {}^0\Omega_{abc}^{i-1}(r) = \alpha_{abc}^{i-1}(s, \xi) {}^0\Omega_{i-1}(r) \\ \quad + \phi_{i-1}(r) \nabla \alpha_{abc}^{i-1}(s, \xi) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{abc}^i(r) = \alpha_{abc}^i(p, \xi) \Omega_i(r) \\ \Omega_{abc}^{i+1}(r) = \alpha_{abc}^{i+1}(p, \xi) \Omega_{i+1}(r) \\ \Omega_{abc}^{i-1}(r) = \alpha_{abc}^{i-1}(p, \xi) \Omega_{i-1}(r) \end{array} \right. \quad (8)$$

[0106] - $[p, s]$ 阶的自由度数：正则子集的自由度总数为 $(p+1)(p+3)$ ，该总数与如下奇异子集的自由度数相加：

[0107] - 对于 2 个边缘，一个奇异分量乘以 $(s+1) = 2(s+1)$

[0108] - 对于每一面，一个奇异分量乘以 $s(s+1)/2 = s(s+1)/2$

[0109] - 对于每一面，一个边缘减少分量乘以 $(s+1)(s+2)/2 = (s+1)(s+2)/2$ ，

[0110] 总共 $(p+1)(p+3) + (s+1)(s+3)$ 个自由度。

[0111] 为了模拟四边形元素 Q 的横向分量，最低阶奇异旋度保形基包含表 2 中所报告的正则零阶函数 $\Omega_\beta(r)$ ，四边形势能的梯度 ${}^0\Omega_i(r)$ ， ${}^0\Omega_i(r)$ ，以及 ${}^\nu U_\beta(r)$ 边缘减少函数。

- [0112] 四边形元素 Q 的函数的属性为：
- [0113] - 完备到最低阶（函数及其旋度），如以下关系描述
- [0114] $\nabla \times [\nu \mathbf{U}_\beta(\mathbf{r}) + (1-\nu)\Omega_\beta(\mathbf{r})] = (1-\nu)(1+\nu)\xi_{\beta+2}^{\frac{n}{2}} \frac{\hat{n}}{j}, \beta = i, j(9)$
- [0115] - 旋度保形
- [0116] - 依存关系：高阶函数是独立的。
- [0117] - 高阶：以上方案被定义为阶数 $[p, s] = [0, 0]$ （最低）。
- [0118] 具有一般阶数 $[p, s]$ 的高阶函数集合如下：
- [0119]

$$\begin{cases} \nu \mathbf{U}_{ac;bd}^\beta(\mathbf{r}) = \alpha_{ac;bd}^\beta(s, \xi) \nu \mathbf{U}_\beta(\mathbf{r}) \\ {}^0\Omega_{ac;bd}^\beta(\mathbf{r}) = \nabla [\alpha_{ac;bd}^\beta(s, \xi) \phi_\beta(\mathbf{r})] = \\ \quad = \alpha_{ac;bd}^\beta(s, \xi) {}^0\Omega_\beta(\mathbf{r}) + \phi_\beta(\mathbf{r}) \nabla \alpha_{ac;bd}^\beta(s, \xi) \\ \beta = i, i+1 \end{cases} \quad (10)$$

- [0120] - $[p, s]$ 阶的自由度数目：正则子集的自由度总数为 $2(p+1)(p+2)$ ，该总数与如下奇异子集的自由度数目相加：
- [0121] - 对于 2 个边缘，一个奇异分量乘以 $(s+1) = 2(s+1)$
- [0122] - 对于每一面，一个奇异分量乘以 $s(s+1) = 2s(s+1)$
- [0123] - 对于每一面，一个边缘减少分量乘以 $(s+1)^2 = 2(s+1)^2$ ，
- [0124] 总共 $2(p+1)(p+2) + 4(s+1)^2$ 个自由度。
- [0125] 最低阶旋度保形基

四边形基，下标以 4 为模计数，并且 $i=1, 2, 3$ 或 4

基函数	表面旋度
正则函数 对于 $\beta=i, i+2, i\pm 1$ [0126] $\Omega_\beta(\mathbf{r}) = \xi_{\beta+2} \nabla \xi_{\beta-1}$	对于 $\beta=i, i+2, i\pm 1$ $\nabla \times \Omega_\beta(\mathbf{r}) = \frac{\hat{n}}{j}$
楔形函数 ${}^0\Omega_i(\mathbf{r}) = (\xi_j^2 - \xi_i) \nabla \xi_i + (\nu \xi_j^{2-1} - 1) \Omega_i(\mathbf{r})$ ${}^0\Omega_j(\mathbf{r}) = (\xi_i^2 - \xi_j) \nabla \xi_j - (\nu \xi_i^{2-1} - 1) \Omega_j(\mathbf{r})$ $\nu \mathbf{U}_\beta(\mathbf{r}) = (1-\nu)(\xi_{\beta+2}^2 - 1) \Omega_\beta(\mathbf{r}), \beta = i, j$ 其中 $j = i+1$	对于 $\beta = i, j$ 并且 $j = i+1$ $\nabla \times {}^0\Omega_\beta(\mathbf{r}) = 0$ $\nabla \times \nu \mathbf{U}_\beta(\mathbf{r}) = (1-\nu) \frac{[(1+\nu)\xi_{\beta+2}^2 - 1]}{j} \hat{n}$

[0127] 表 2

[0128] FEM 应用中的三角形元素 T 和四边形元素 Q 的纵向分量是由特定的标量基函数来模拟的。奇异结构（楔形）的标量基函数是通过两个基子集的并集来获得的。第一集合是例如由 Lagrange-Silvester 多项式形成的正则子集，而第二子集是由先前给出的 s 阶尖锐边缘势能基形成的奇异子集。这些函数具有正确的物理行为，即在逼近楔形边缘处它们像

ρ^v 那样消没。

[0129] 对于 $[p, x]$ 阶, 自由度总数为:

[0130] T 三角形元素 = $[(p+2)(p+3) + (s+1)(s+3)]/2$;

[0131] Q 四边形元素 = $(p+2)^2 + 2(s+1)^2$ 。

[0132] 现在我们描述所提出的建模过程, 以为模拟奇异表面电流密度的 MoM 应用定义函数。

[0133] 根据所提出的过程, 最低阶奇异散度保形完备其必须完全满足以下要求:

[0134] - 基集合及其散度必须正好完备到最低阶 (零阶);

[0135] - T 和 Q 元素必须与附接到其非奇异边缘的相同正则阶的相邻正则元素完全兼容;

[0136] - 基函数必须模拟尖锐边缘附近的电流和电荷的 ρ^{v-1} 奇异行为;

[0137] - 基函数必须模拟与边缘 E 正交的非奇异电流, 其行为类似 ρ^v 。

[0138] 边缘轮廓附近的楔形面应当用三种不同种类的元素来网格化:

[0139] - TE 边缘奇点三角形元素

[0140] - TV 顶点奇点三角形元素, 以及

[0141] - Q 奇点四边形元素

[0142] TV 奇异顶点三角形可被用作元素填充器。

[0143] 图 2a 和 2b 示出了用于边缘奇点四边形 Q 和边缘三角形 TE 以及顶点奇点三角形 TV 的局部边缘编号方案, 所述边缘三角形 TE 也就是具有一个离开楔形 E 的边缘轮廓 B 的边缘的三角形。

[0144] 虽然两个边缘奇点三角形 TE 可具有公共的边缘, 见图 2b, 但是基函数无法模拟角落 3D 顶点奇点“尖端”。

[0145] 顶点奇点三角形 TV 是通过前两个要求限定的, 因为它们是元素填充器。

[0146] 引入前两个要求不是为了限制靠近边缘 E 处的网格尺寸, 此外这个要求迫使最低阶函数集合必须包含所有的零阶正则基函数。

[0147] 第三和第四个要求允许了 Van Bladel 和 Meixner 所描述的对问题的正确物理建模。

[0148] 第四个要求能够模拟在逼近边缘 E 时具有类似 ρ^v 的行为的电流密度的法向分量。

[0149] 根据该过程, 通过对电荷密度积分导出了包含靠近楔形的边缘 E 处的电流密度的奇异行为的最低阶基, 这已在所引用的 W. J. Brown 和 D. R. Wilton 的论文“Singular basis functions and curvilinear triangles in the solution of the electric field integral equation (电场积分方程的解答中的奇异基函数和曲线三角形)” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 47, n. 2, pp. 347-353, Feb. 1999 中有所描述, 但是本发明中提出的函数更为完备, 并且不同于 Wilton 和共同作者的论文中所出的函数。所提出的过程是加性的, 即新的基函数集合必须被添加到正则基中, 这与 Brown 和 Wilton 所提出的不同, 在 Brown 和 Wilton 所提出的过程中, 基函数是非取代性的, 即, 当奇点系数 v 被设置为 1 时, 基函数变为正则散度保形基。

[0150] 根据以上属性, 对于该过程我们提出表 3 的基函数。

[0151] - 对于 $v = 1$, 每个奇异基函数消没

[0152] ${}^e v_i(r)$; ${}^e v_i(r)$ 基函数的散度模拟奇异三角形元素上总电荷为零的条件下的电荷密度奇异分布。因此这些函数是基于元素的。

[0153] 此外,无散度电流分量由以下最低阶边缘奇点基函数的线性组合所模拟:

$$[0154] \quad {}^e \Lambda_{i+1}(r) - {}^e \Lambda_{i-1}(r) + \Lambda_{i+1}(r) - \Lambda_{i-1}(r) = \frac{\ell_i}{J} \xi_i^{\nu-1} \quad (11)$$

[0155] 正确的电荷密度由以下组合的散度所模拟:

$$[0156] \quad {}^e \Lambda_\beta + \Lambda_\beta, \text{ for } \beta = i \pm 1 \quad (12)$$

[0157] ρ^v 消没行为被包含到了基于元素的函数中。这些函数具有以下属性:

[0158] - 完备到最低阶(函数及其散度);

[0159] - 散度保形;

[0160] - 高阶:以上方案被定义为 $[p, s] = [0, 0]$ 阶(最低阶)。

[0161] 最低阶散度保形基

[0162]

三角基, 下标以 3 为模计数, 并且 $i=1, 2$ 或 3	
基函数	表面散度
正则函数 对于 $\beta=i, i \pm 1$ $\Lambda_\beta(r) = \frac{1}{J} (\xi_{\beta+1} \ell_{\beta-1} - \xi_{\beta-1} \ell_{\beta+1})$	对于 $\beta=i, i \pm 1$ $\nabla \cdot \Lambda_\beta(r) = \frac{2}{J}$
边缘奇异函数 奇点在边缘 i 上 ($\xi_i=0$) ${}^e \Lambda_{i \pm 1}(r) = (\xi_i^{\nu-1} - 1) \Lambda_{i \pm 1}(r)$ ${}^e \nabla_i(r) = \frac{1}{J} (\chi_{i+1} \ell_{i-1} - \chi_{i-1} \ell_{i+1})$ 其中 $\chi_{i \pm 1} = \xi_i (1 - \xi_{i \mp 1})^{\nu-1} - \xi_i^\nu$ 以及对于 $\beta = i \pm 1$, 在 $\xi_\beta=0$ 处, $\chi_\beta=0$	$\nabla \cdot {}^e \Lambda_{i \pm 1}(r) = \frac{(1+\nu)\xi_i^{\nu-1} - 2}{J}$ $\nabla \cdot {}^e \nabla_i(r) = -\frac{\chi'_{i+1} + \chi'_{i-1}}{J}$ 其中 $\chi'_{i \pm 1} = \frac{d\chi_{i \pm 1}}{d\xi_i}$ $= (1 - \xi_{i \mp 1})^{\nu-1} - \nu \xi_i^{\nu-1}$

[0163]

顶点奇异函数 奇点在顶点 i 上 ($\xi_i=1$) ${}^v\Lambda_{i\pm 1}(r) = \chi_0 \Lambda_{i\pm 1}(r) - \chi_b \Lambda_i(r)$ ${}^vV_i(r) = \chi_0 \Lambda_i(r)$ 其中 $\chi_0 = (1-\xi_i)^{\nu-1} - 1$ $\chi_b = \frac{(1-\nu)}{\nu} \xi_i (1-\xi_i)^{\nu-2}$	$\nabla \cdot {}^v\Lambda_{i\pm 1}(r) = \frac{\chi_0 - 2}{f}$ $\nabla \cdot {}^vV_i(r) = \frac{\nu \chi_0 - 2}{f}$ 其中 $\chi_0 = \frac{(1+\nu)}{\nu} (1-\xi_i)^{\nu-1}$
--	--

[0164]

四边形基, 下标以 4 为模计数, 并且 $i=1, 2, 3$ 或 4	
基函数	表面散度
正则函数 对于 $\beta=i, i+2, i\pm 1$ $\Lambda_\beta(r) = \frac{\xi_{\beta+2} \xi_{\beta-1}}{f}$	对于 $\beta=i, i+2, i\pm 1$ $\nabla \cdot \Lambda_\beta(r) = \frac{1}{f}$
边缘奇异函数 奇点在边缘 i 上 ($\xi_i=0$) ${}^e\Lambda_{i\pm 1}(r) = (\xi_i^{\nu-1} - 1) \Lambda_{i\pm 1}(r)$ ${}^eV_{i+2}(r) = (\xi_i^{\nu-1} - 1) \Lambda_{i+2}(r)$	$\nabla \cdot {}^e\Lambda_{i\pm 1}(r) = \frac{\xi_i^{\nu-1} - 1}{f}$ $\nabla \cdot {}^eV_{i+2}(r) = \frac{\nu \xi_i^{\nu-1} - 1}{f}$

[0165] 表 3

[0166] 具有一般阶数 $[p, s]$ 的高阶函数集合是以下的集合, 其中对于 TE 和 TV 奇点三角形, 下标 α 分别等于 e 或 v:

[0167]

$$\begin{cases} {}^{\alpha}\Lambda_{abc}^{i\pm 1}(r) = \alpha_{abc}^{i\pm 1}(s, \xi) {}^{\alpha}\Lambda_{i\pm 1}(r) \\ {}^{\alpha}V_{abc}^i(r) = \alpha_{abc}^i(s, \xi) {}^{\alpha}V_i(r) \end{cases} \quad (13)$$

[0168] $-[p, s]$ 阶的自由度数目的正则子集的自由度的总数是 $(p+1)(p+3)$, 该总数与先前定义的奇异子集的自由度的数目相加, 所述子集的函数是独立的。因此自由度的总数是 $(p+1)(p+3)+3(s+1)(s+2)/2$ 。

[0169] 四边形元素 Q 的基于元素的函数 ${}^eV_{i+2}(r)$ 具有沿着四个元素边的每一边的消灭性正交分量, 并且其散度模拟奇异元素上的总电荷为零的条件下的电荷密度奇异分布。

[0170] 此外, 此函数模拟边缘 B 上的边缘电流密度的法向分量。

[0171] 此外, 具有正则基的最低阶边缘奇点基函数的线性组合模拟与边缘 E 平行的无散度电流分量和正确的电荷密度:

$$[0172] \quad {}^e\Lambda_{i+1}(r) - {}^e\Lambda_{i-1}(r) + \Lambda_{i+1}(r) - \Lambda_{i-1}(r) = \frac{\xi_i}{f} \xi_i^{\nu-1} \quad (14)$$

$$[0173] \quad {}^e\Lambda_\beta + \Lambda_\beta, \text{ for } \beta = i \pm 1 \quad (15)$$

[0174] 这些基具有以下属性：

[0175] - 完备到最低阶（函数及其散度）；

[0176] - 散度保形；

[0177] - 高阶：以上方案被定义为 $[p, s] = [0, 0]$ 阶（最低阶）。

[0178] 具有一般阶数 $[p, s]$ 的高阶函数集合是以下的集合：

[0179]

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{acbd}^{i\pm 1}(\mathbf{r}) = \alpha_{acbd}^{i\pm 1}(s, \xi) \mathbf{A}_{i\pm 1}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{V}_{acbd}^{i+2}(\mathbf{r}) = \alpha_{acbd}^{i+2}(s, \xi) \mathbf{V}_{i+2}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (16)$$

[0180] $-[p, s]$ 阶的自由度数目的正则子集的自由度的总数是 $2(p+1)(p+2)$ ，该总数与先前定义的奇异子集的自由度的数目相加，所述子集的函数通过丢弃而是独立的，例如以下所有函数

$$\mathbf{A}_{acbd}^{i-1}(\mathbf{r}) \quad d = \{1, s\}; a, b, c = \{1, s+1\} \quad (17)$$

[0182] 于是自由度的总数是 $(p+1)(p+3)+3(s+1)(s+2)/2$ 。

[0183] 通过示出圆柱状均匀波导的有限元结果，说明了使用高阶奇异向量基的益处。在 P. Savi, I. L. Gheorma 和 R. D. Graglia, “Full-wave high-order FEM model for lossy anisotropic waveguides (有损各向异性波导的全波高阶 FEM 模型)”, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 50, No. 2, pp. 495–500, Feb. 2002 中就电场而言阐述了该问题。Galerkin 形式的有限元方法被用于将横向向量 Helmholtz 问题简化到通过用迭代方法来解决的广义特征值问题。C++ 面向对象代码计算给定频率 f 下的模态纵向波数 k_z 以及模态场。奇异 FEM 积分的符号表示被实现为通过将解析积分结果加起来而对奇异函数积分。该技术十分有效，而且不需要复杂编程来提供达到机器精度的积分结果。

[0184] 第一测试例是圆形理想导电波导 GC，其半径为 a ，被填充以均匀材料，如图 3 中所示，并且具有由延伸到其中心的零厚度径向叶片构成的奇异区域 E 。归一化波导尺寸为 $(k_0 \cdot a)$ ，其中 k_0 是自由空间波数。半整数阶贝塞尔函数 $J_{m/2}$ 的零点以及这些贝塞尔函数的导数的零点分别产生 TM 和 TE 特征值。标注这些模式的第一下标是 m ；第二下标 n 照常指示零点的阶数。甚至 m 的值也对应于圆形波导也支持的模式，虽然叶片抑制了所有的 TM_{0n} 圆形波导模式。在叶片的边缘处展现 $v = 1/2$ 奇点的模态场是 TE_{1n} 和 TM_1 模式的，并且奇异 TE_{11} 模式占优势。以数值方式获得的前两个奇异模式的横向电场剖析图在图 3 中报告。图 4 报告计算出的纵向波数的平方值 k_z^2 的百分比误差和未知量数目的相互关系。在图 4a 中，误差是在前二十个模式上取平均的，这些模式涉及四个奇异模式。图 4b 示出在前四个奇异模式上取平均的误差。

[0185] 已通过用五个不同网格获得了这些结果。从 A 到 D 的网格在图 4a 中示出（24、56、96、150 个元素）。网格 E（未示出）仅由六个曲线形三角形元素构成，这些元素以尖锐边缘顶点作为公共顶点。注意所有被使用的网格都具有六个附接到尖锐边缘顶点的三角形元素。图 4 示出通过仅在这六个尖锐边缘元素上尝试不同奇异 s 阶数的基所获得的效果。自由度 DOF 的增大与奇点阶数 s 相关，并且相对于数值结果精度的提高是较小的。实际上，虽然图 4 的结果是通过用五阶正则元素获得的，但是却始终比通过用奇异元素提供的结果恶劣。

[0186] 图 5 示出 FEM 矩阵的规一化矩阵填充时间与额外 DOF 数目的相互关系,这是利用奇异元素并且在 $p = 3$ 的情况下研究图 4 的问题所需的。这些结果表明,用于对奇异函数积分的技术通常对填充 FEM 矩阵所需的 CPU 时间没有影响,除非奇异元素是占有所有元素中的相当大一部分。

[0187] 奇异元素在正则模式结果中也提供了显著改进,这是因为刚度矩阵的系数的任何精度缺乏都产生于所有模式上的误差。例如,图 6 报告了圆形带叶片波导 GC 的前二十个模式中的每一个的纵向波数的计算平方值 kz^2 的 A 网格百分比误差。

[0188] 在图 5 中,相对于稀疏解算器通过只用 $p = 3$ 阶的正则元素来填充 D 网格 FEM 矩阵时所花费的 cpu 时间 t_D 而规一化了时间。我们的面向对象的代码在 Pentium IV Xeon@2.4GHz 机器上产生了 65.6 秒。对于正则 $p = 3$ 情况,额外 DOF 的数目为零,所述情况对于网格 D、C、B 和 A 分别对应于 3741、2369、1309、561 个 DOF。对于所有被使用的网格,对于 $s = 0、1$ 和 2 ,额外 DOF 的数目分别是 16、50 和 102。

[0189] 图 6 示出 $ko \cdot a = 11$ 时圆形带叶片波导的前二十个模式中的每一个的纵向波数的计算平方值 (kz^2) 的百分比误差,并且图中明确标出的模式在叶片边缘处展现了奇异场。模式 7 和 8 具有相同的截止频率,因为它们对应于圆形波导的 TM₁₁ 和 TE₀₁ 模式。

[0190] 我们考虑的第二个问题是圆形波导 GC2,其半径为 a ,具有两个厚度等于 $a/50$ 沿直径彼此相对的径向叶片,这些叶片被标注为 ER。叶片分隔间隙居中,其宽度也是 $a/50$ 。此情况的奇点系数是 $\nu = 2/3$ 。虽然此波导的解析结果不可用,但是我们研究了它以证明我们的奇异基处理给定楔形的尖锐边缘元素与不同楔形的尖锐边缘元素接近的情况的能力,并且还为了证明奇异元素处理厚度层的有效性。

[0191] 图 7 示出了邻近间隙区域中的所使用的网格、以及半径为 a 的具有双隔膜的 GC2 波导所支持的前两个模式的以数值方式获得的横向电场剖析图。占优势的模式在场剖析图在左侧报告。网格由 374 个三角形构成,并且在存在 16 个尖锐边缘元素的间隙区域中相当密集。其他设置是 $ko \cdot a = 11$ 并且 $p = 2, s = 0$ (5459 个未知量)。

[0192] 图 8 示出在 $ko \cdot a = 11$ 时具有双隔膜的圆形双叶片波导 GC2 的前十个模式中每一个的纵向波数的计算平方值 (kz^2) 的百分比误差。在顶部以自然刻度报告了误差,在底部以对数刻度报告了误差。在该情况下,要将正则 ($p = 2$) 元素切换到 ($s = 0$) 奇异阶元素只需要 40 个额外的 DOF。($p = 2$) 正则情况对应于 5419 个 DOF。

[0193] 此波导的第二模式非常类似于圆形波导的占优势的 TE₁₁ 模式,其中失真的场剖析图只存在于间隙区域中。相反,双叶片型波导的占优势的模式的所有能量都集中在间隙区域中,因此占优势的模式是准 TEM。

[0194] 图 8 中以自然刻度以及对数刻度报告了圆形双叶片型波导的前十个模式中每一个的纵向波数的计算平方值 kz^2 的百分比误差。误差是通过选择通过以 $p = 3, s = 2$ 运行代码所获得的值作为参考来计算的 (9733 个未知量)。再次注意到正则基比起奇异基产生的误差要高。

[0195] 图 9 示出实现根据本发明的建模过程的系统的控制单元。

[0196] 在该系统中,一般物体的边缘 E 的几何条件被扫描模块 10 获得,该模块产生表面地图,该表面地图被发送到模数转换器 12。

[0197] 根据特定应用需求,扫描模块 10 例如可以是 TV 摄像头、照相机或表面扫描机器。

[0198] 模数转换器 12 将表面地图转换成数值数据,该数值数据被发送到处理器 14,该处理器 14 实现先前所述的建模过程,以便分析和设计结构。

[0199] 具体而言,边缘 E 可能属于由不同材料构成的可用 FEM 和 MoM 技术来分析的任何开放或封装结构。处理器 14 处理场 / 电流分量,这些分量被提供给系统 16。

[0200] 作为图 9 所报告的系统的示例,图 10 示出用于测试来自地平面上的标注为 UTD 的设备的辐射发射。UTD 设备被放置在介电质台 TDS 上,该介电质台位于与地平面 PM 相距 h 处。天线 A 接收直接链路电磁波 ED 和反射波 ER,该反射波 ER 以角度 ψ 在点 O 处入射在地平面 PM 上。UTD 设备与接收天线 A 的距离为 D ,该天线 A 在相对于地平面 PM 高度为 h_t 处。国际规范,例如 FCC(联邦通信委员会),要求具有距离 D 和高度 h_t 和 h_r 的前缀值的测量,并且要求使用校正因子以便考虑与可能的不同波极化(水平或垂直)相关的反射波 ER,但是这些过程没有提供 UTD 设备在介电台 TDS 上的任何最优位置。

[0201] 不幸的是,台的边缘 E 的衍射性贡献是相当大的。参考实现所提出的建模过程的系统的控制单元,边缘 E 对应于图 9 的边缘 E。在该系统中,台的边缘 E 的几何条件被几何条件扫描模块 10 所扫描,该模块产生被发送到模数转换器 12 的表面地图。根据特定应用要求,扫描模块 10 例如可以是 TV 摄像头、照相机或触摸机器。模数转换器 12 将表面地图转换为数值数据,该数值数据被发送到处理器 14,该处理器 14 实现先前所述的建模过程以便分析和设计结构。处理器 14 处理场 / 电流分量,并将其提供给系统 16,该系统 16 控制台 TDS 的位置,以便使边缘 E 的效应达到最低限度,或者以便确定边缘 E 效应的校正因子。

[0202] 扫描系统的使用对于雷达应用、原形和最终产品的分析是有用的:雷达分析、损耗分析、材料属性...。另一方面,CAD 软件可取代扫描模块被用于结构的分析和设计。

[0203] 上述解决方案允许了相对于已知解决方案的巨大改进。

[0204] 所提出的过程限定了多项式型分段向量基函数以及任意阶的奇异型分段向量基函数,允许了即使在奇点未被激励的情况下也能有利地获得正确解答,并且不限制元素的尺寸(少量的大尺寸元素)。

[0205] 此外,有利地,分段奇异(非多项式)基子集的属性与问题的物理性质吻合。我们已提出了一个过程来限定对获得了由偏微分方程和积分方程所描述的问题的数值解答有用的基函数。

[0206] 此外,有利地,联系所提出的过程,可以很容易地为有限方法限定基函数,所述有限方法例如是用于应用电磁学的有限元方法(FEM)和力矩方法(MOM)。

[0207] 当然,要理解,相对于这里所描述和呈现的,本发明的原理、生产细节以及生产选项可以有多种改变,而不会偏离所附权利要求所描述的本发明。

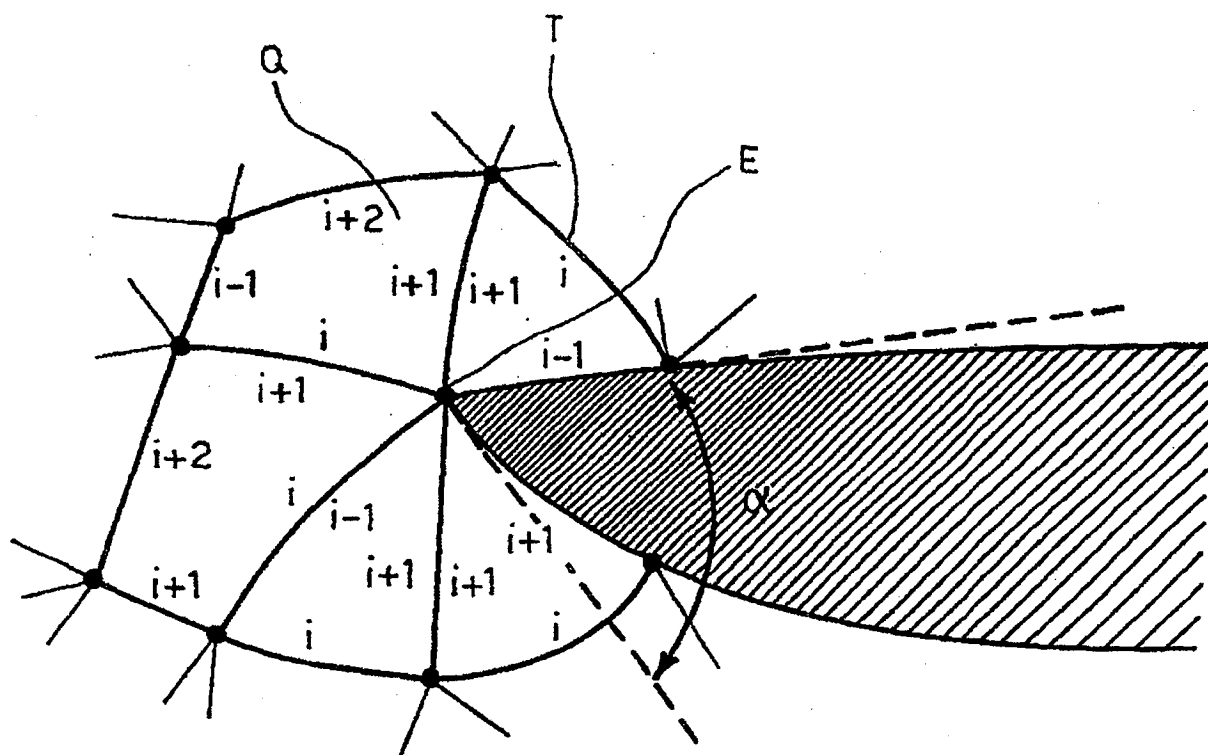


图 1

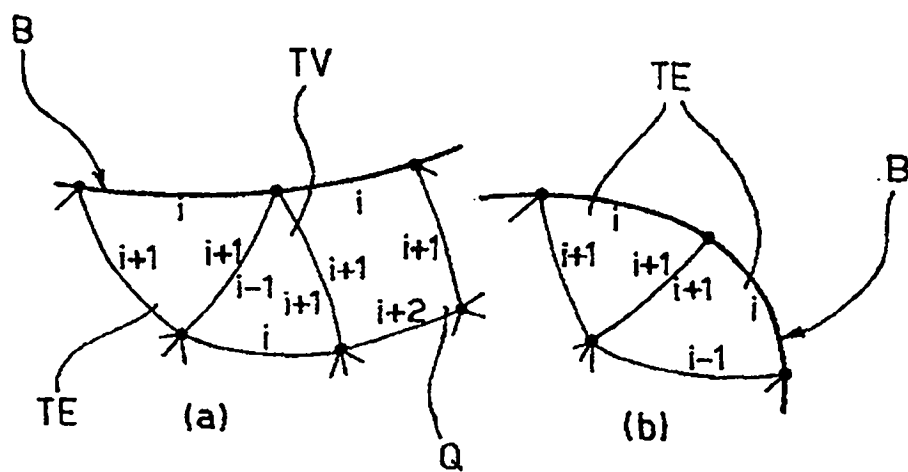


图 2

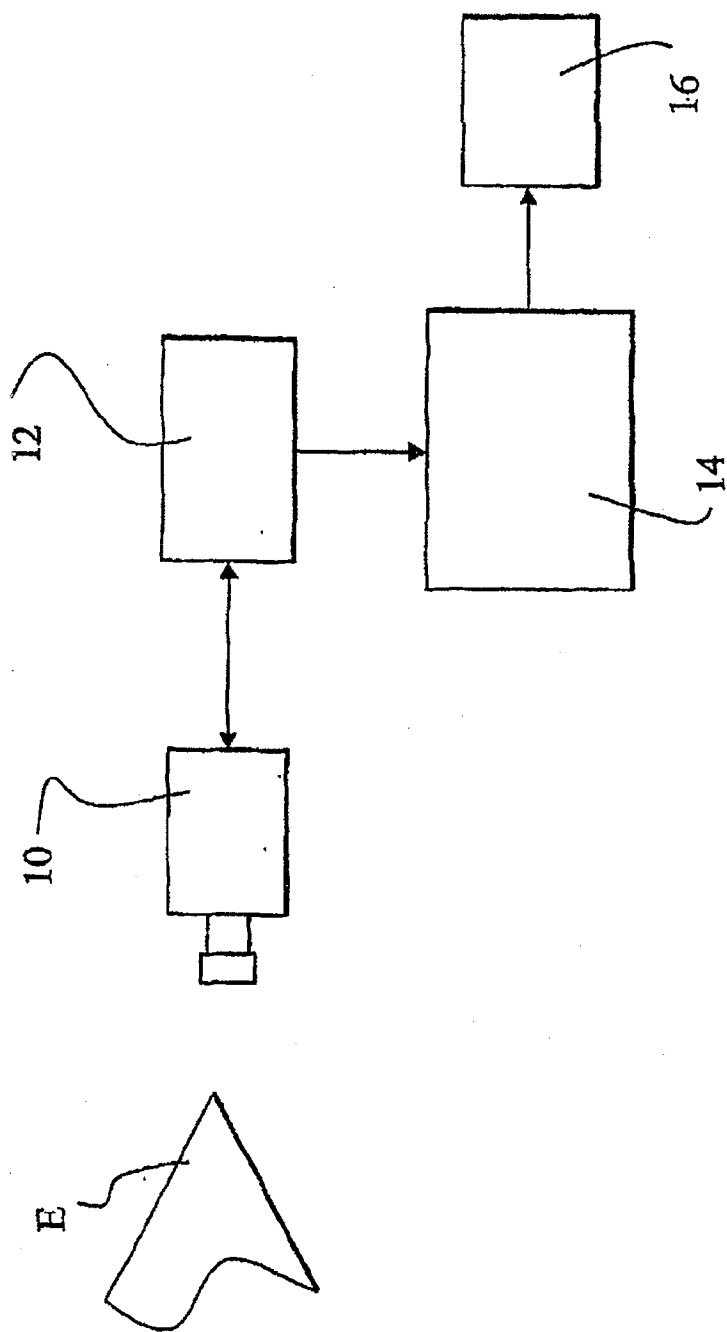


图 9

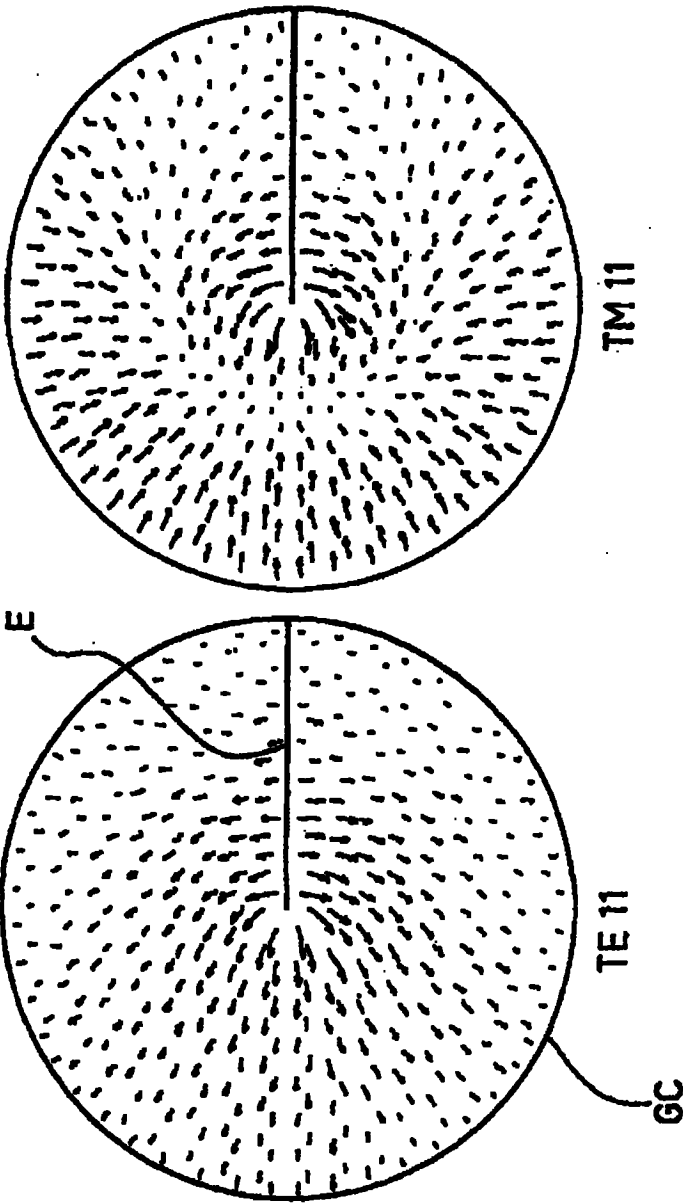


图 3

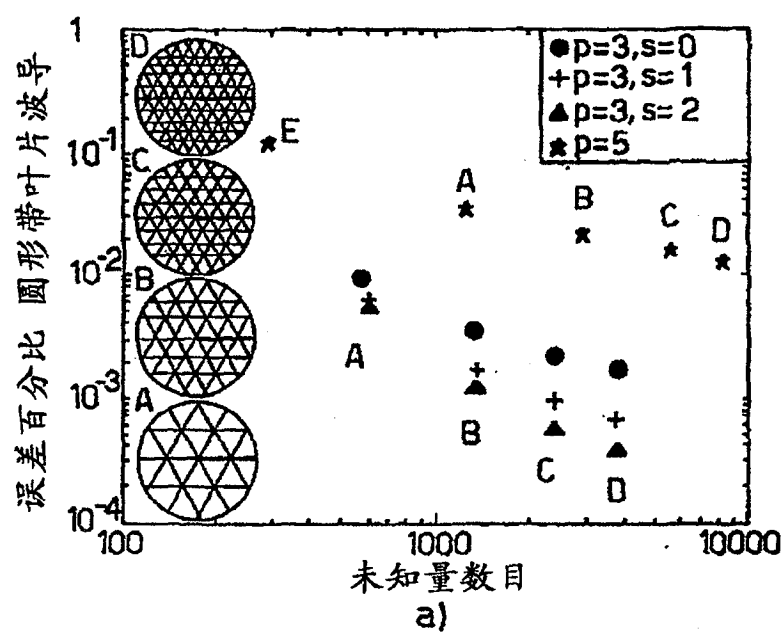


图 4a

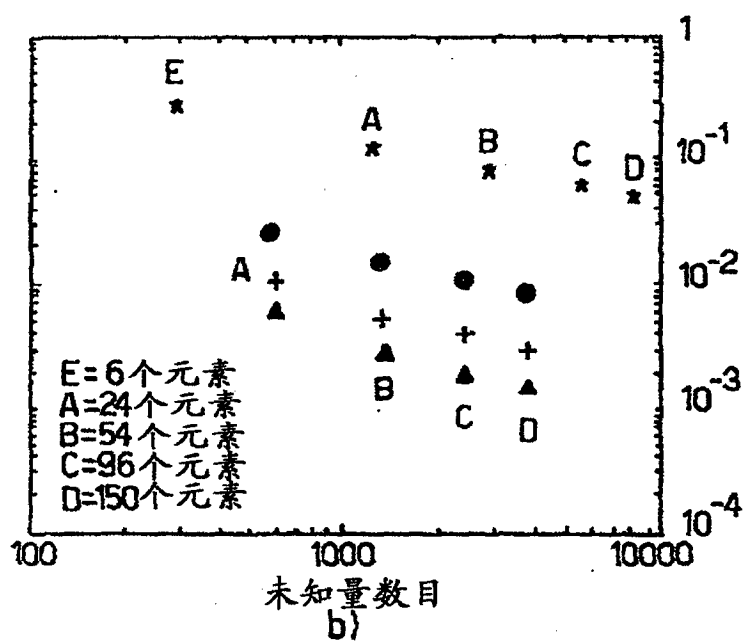


图 4b

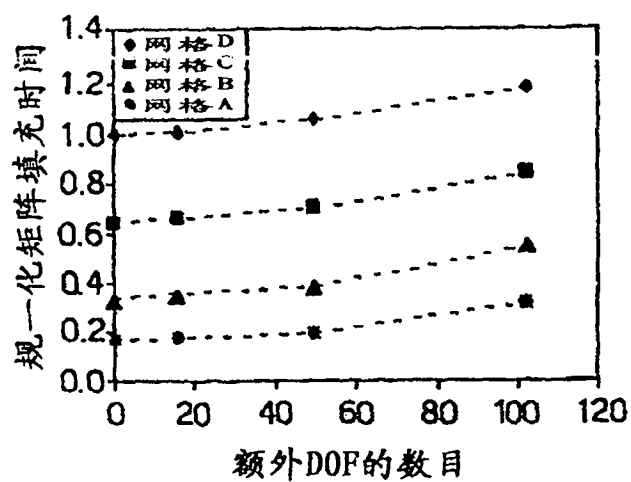


图 5

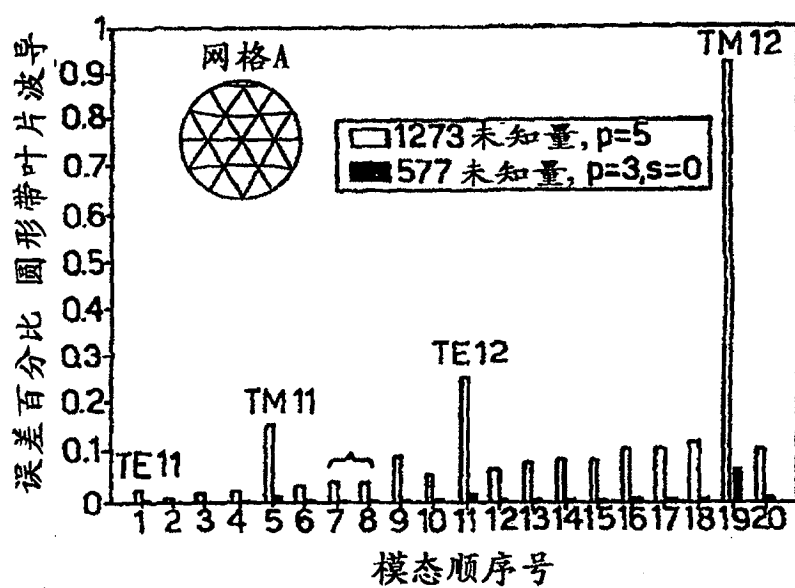


图 6

图7

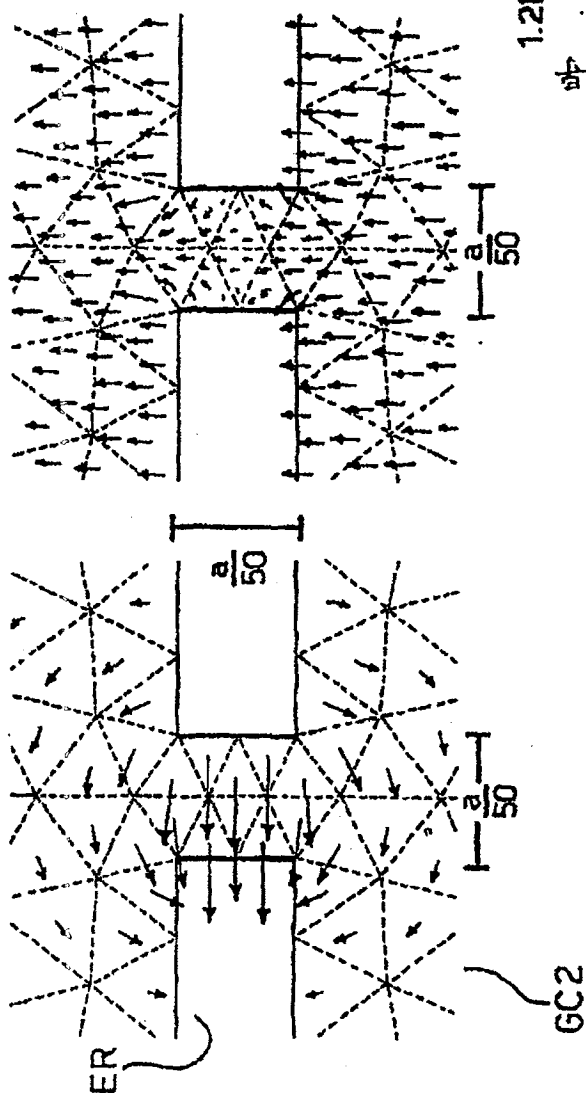
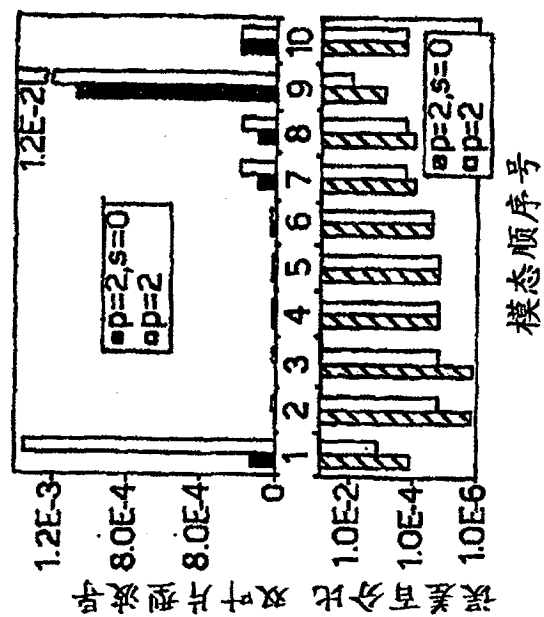


图8



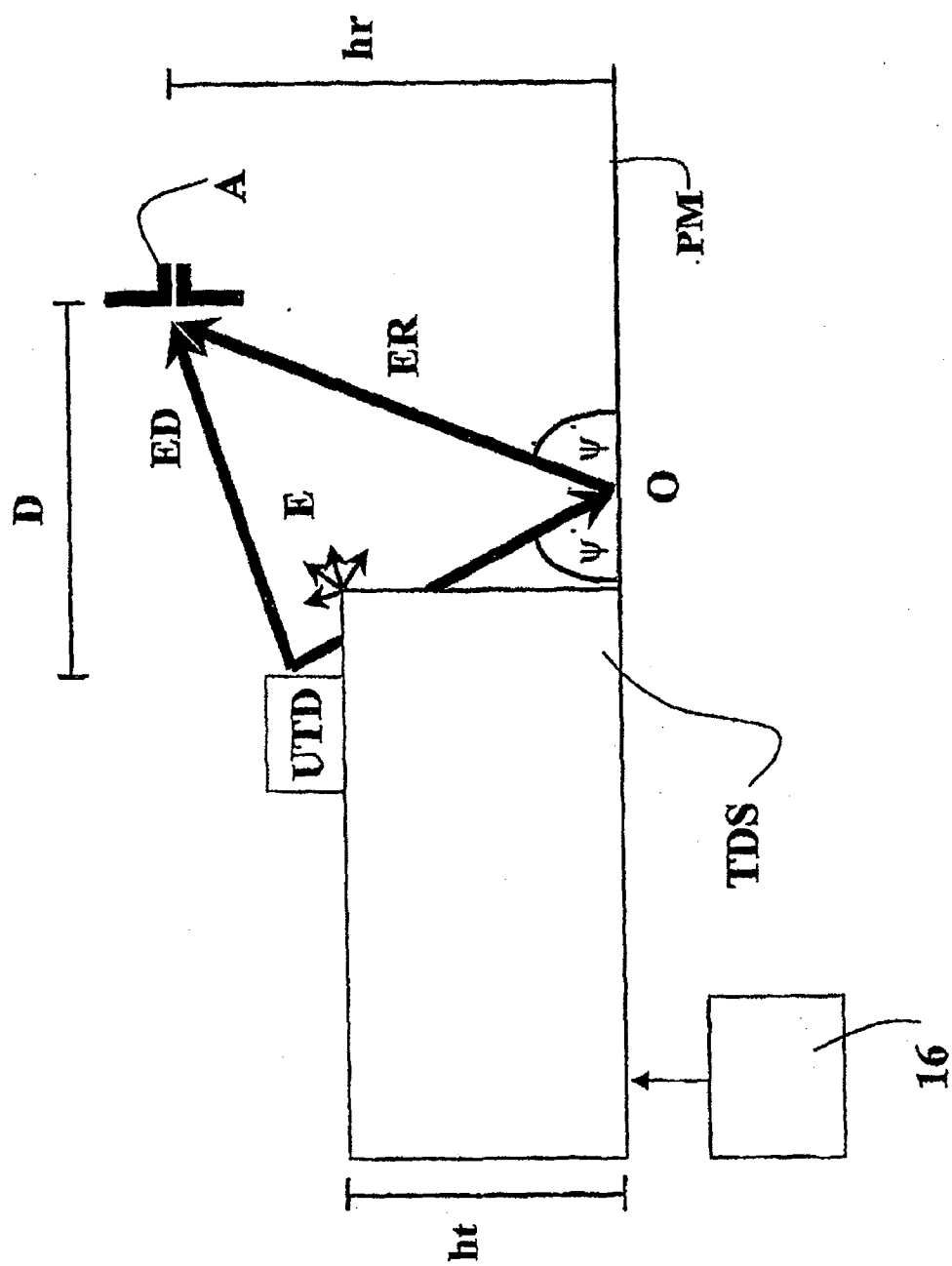


图 10