

[19] 中华人民共和国国家知识产权局

[51] Int. Cl.

G06F 19/00 (2006.01)

G06T 5/00 (2006.01)

G06T 7/00 (2006.01)



[12] 发明专利说明书

专利号 ZL 200510109803.1

[45] 授权公告日 2009 年 9 月 9 日

[11] 授权公告号 CN 100538714C

[22] 申请日 2005.5.17

[21] 申请号 200510109803.1

[30] 优先权

[32] 2004.5.18 [33] EP [31] 04076454.0

[73] 专利权人 爱克发医疗保健公司

地址 比利时莫策尔

[72] 发明人 P·德瓦勒

[56] 参考文献

EP1349098A1 2002.3.27

US6714668B1 2004.3.30

EP0616290B1 1994.2.28

US6775405B1 2004.8.10

审查员 王 洵

[74] 专利代理机构 中国专利代理(香港)有限公司

代理人 王 岳 张志醒

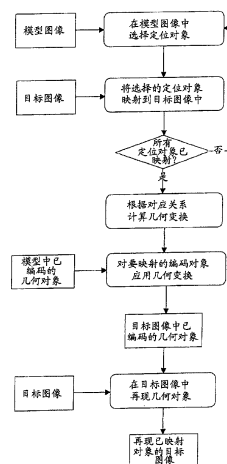
权利要求书 1 页 说明书 41 页 附图 9 页

[54] 发明名称

数字医学图像中自动映射几何对象的方法

[57] 摘要

一种将几何对象映射到数字图像的方法。至少选择模型中一个定位点并映射到数字影像。基于在定位对象与相应的映射对象之间的至少一个对应关系计算几何变换，并将计算出的几何变换应用于至少一个几何对象，从而从模型图像中将其映射到数字图像中相应的映射位置。



1. 一种在数字目标图像中映射模型图像的几何对象的方法,
其特征在于:
选择所述模型图像中的所述几何对象的至少一个定位对象部分;
将所述定位对象映射到所述目标图像, 以便获得目标定位对象;
在所述至少一个定位对象和对应的目标定位对象之间的对应关系的基础上计算线性几何变换矩阵;
将所述线性几何变换矩阵分解为选自平移、比例缩放、旋转、剪切和透射的初等几何操作序列, 所述初等几何操作的每一个由矩阵表示;
通过使与所选的分量相关的矩阵等于单位矩阵来消除与所选的分量相关的至少一个初等几何操作;
将所得到的初等几何操作矩阵序列重新组合成变换矩阵;
将与所得到的变换矩阵相应的几何变换应用到模型图像的几何对象以便将所述模型图像的几何对象映射到所述目标图像中的相应映射位置。
2. 根据权利要求1所述的方法, 其中, 所述模型图像被显示为包含定位对象的模型图像。
3. 根据权利要求1或2所述的方法, 其中, 所述定位对象是点。
4. 根据权利要求1或2所述的方法, 其中, 所述定位对象是线。
5. 根据权利要求2所述的方法, 其中, 所述几何对象呈现在所述模型图像中。
6. 根据权利要求5所述的方法, 其中, 所述几何对象是相对于所述定位对象进行编码的。
7. 根据权利要求1或2所述的方法, 其中, 所述定位对象和/或所述几何对象表示解剖学实体。
8. 根据权利要求1所述的方法, 其中, 所述目标图像是医学图像。

数字医学图像中自动映射几何对象的方法

技术领域

本发明涉及数字医学图像中映射几何对象的计算机辅助方法。

背景技术

在放射线学的实践中，放射线技师经常需要将特定的解剖学结构定位在放射照片上，以将其注意力集中在这些特定的图像区域。该图像区域的定位通常取决于放射照片的检查类型和怀疑的疾病；因此这些定位是专用于检查和诊断的。

例如，根据 Tanner-Whitehouse 方法估定骨龄时，需要在手部的放射照片中定位 20 个骨头的兴趣部位 (ROI)，以及根据图谱描述的一组参考段将其分段。在欧洲专利申请 EP A 1293925 中，公开了自动对这些骨骼部位分段和估分的方法。提取这些部位的相关 ROI，并且通过将给定的 ROI 与其参考集合在相邻位置同时显示而将该 ROI 与一组参考图片或图表做比较。必须对这些兴趣部位的每一个执行定位过程而不考虑手自身在图像中的位置。导致位置变化的典型曝光误差是手部轴线被置于同运送放射探测器（例如记录放射图像的光敏荧光屏）的暗盒的暗盒边呈旋转角的位置。此外，手指的不规则展开在这些 ROI 的定位中增加了第二级的旋转变量。因此，需要改进在医学图像中 ROI 的定位和提取过程。

在 Tanner 和 Whitehouse 的估分方法中进一步的位置确定任务是将解剖学的骨骼的特征与解剖学相应的几何对象比较。例如，在手舟骨的估分中，是通过将手舟骨的新月形边的方向与腕骨的中线比较而刻画 G 和 H 段的。因此，放射线技师必须不断地在大脑中将腕骨中线映射到图像中，以便确认这一特征和给手舟骨指定正确的分段。因此，需要将该特征线映射至实际图像中，以避免不断在头脑中重新定位的需要。

第二个诊断活动即对象在图像中该被置于在哪儿是几何测量的领域。显然，在基于胶片的测量中，在绘制图像中的几何对象或实体的过程中未提供帮助。在欧洲专利申请 EP A 1349098 中，公开了数字采集医学图像中自动测量

的方法，该方法将测量对象和实体分组到计算机化的测量方案中，该方案由双向连接的外部图形模型和内部信息化模型构成。在根据欧洲专利申请 EP A 1349098 的测量期间，测量方案被从计算机中提取出来并且被激活。之后，在激活的测量方案的指导下对显示图像进行测量。

显示放射图像的数字图像再现。在数字图像附近显示包括一组测量点或区域的测量模板。通过在显示图像上手动标出对应模板中的点或对象的点的位置，测量点或对象被映射在显示图像上，并且结果映射点的坐标被存储，用以在显示图像上进行测量。所描述的方法是手动进行的。

在这个计算机化方法中，大量几何对象必须映射到数字图像中，其它测量对象和最终的测量实体（诸如距离和角度）基于所述数字图像。基本的几何对象通常是关键用户点，这些点限定了测量所基于的其它几何对象。例如，两对关键点每一对限定一条直线，并且计算得到这对直线之间的角度，该角度表示解剖结构之间的成角。这些关键用户点必须映射在图像里与其相应的解剖标志位置。为了利于确定这些关键用户点的初始位置，可以基于少数定位点来计算它们，这些定位点也是按照解剖学确定的并且通常与易于辨别的解剖标志相一致。

当在数字图像里进行测量时进一步的定位任务涉及选择用于放置诸如测量点的几何对象的图像区域和该图像的合适分辨率。对于只显示按比例缩小的版本的大图像，放射线技师通常优选地在原始图像上定位关键用户点以便使用完全分辨率得到关键用户点更精确的定位。因此，每个顺序关键用户点周围的图像区域必须在其原始分辨率下显示，这要求用户首先选择将要放大的图像区域。现有技术完成这一步的典型的做法是通过另外用鼠标点击所需的关键用户点的邻近图像，使得该图像以完全分辨率显示，或者通过在以完全分辨率显示该图像的第二个图像窗口中扫视直到看到所需的关键用户点周围的区域。然而，这种操作方式的缺点是当关键用户点的数目很大时（对于复杂的测量方案通常情况就是这样），就需要大量的鼠标操作，因此这种方法缓慢、费神并容易出错。

也需要几何定位的放射线学操作的第三个领域是借助于人体模型分析的质量保证和质量控制。例如在乳房造影系统的质量控制中，使用了具有特殊空间排列的几何结构的体模。这些结构如盘和棒用以确定图像对比度并且将其与觉

察度门限做比较。几何精度可以通过测量所述结构在图像中的空间位置并且将其与它们的模型对应物相比较来检验。为了自动分析成像的体模,可以使用CAD模型针对坐标参考系统定位所述几何结构。这个参考系统可借助于少量已知位置的定位点建立。因为这些控制点是体模的一部分,它们同分析对象同时成像。通过在图像中定位它们的位置,可以建立模型与真实图像之间的对应性。在建立几何变换和进行模型结构的映射之后,如后面将详细介绍的,很容易在图像中找回所有参考对象的原始位置,并且随后计算质量参数。

现有技术:

迄今为止已知下列文献:

EP1349098 A1 Method of performing geometric measurements on digital radiological images using graphical templates.

EP1293925 A1 Radiographic scoring method

Chen C.C 等人 “Semi-automatic tool for aligning a parametrized cad model to stereo image pairs” IEICE Transf. Inf. and Syst. Vol.E82-D, no.12,Dec.1999.

The Mathworks:“Image Processing Toolbox-for use with MatLAB, User’s guide, version 3, June 2001.

Smyth P.P., Taylor C.J.和 Adams J.E.: “Vertebral shape: automatic measurements with active shape models”.

Johnson H J 等人 “Consistent landmark and intensity-based image registration”, IEEE transactions on medical imaging, IEEE Inc. New York, US, Vol.21, no.5, 5 May.2002.

发明内容

为了克服现有技术的缺点,本发明提供了一种如权利要求书所述的方法。

本发明公开了一种基于模型的几何映射方法。具体地,对图像中需要映射的几何对象相对于一组模型定位几何对象进行编码,其中优选实施例中模型定位几何对象是关键用户点。用户手动映射图像中的模型定位对象,其数量通常很小。接下来在模型定位对象和用户映射的模型定位对象之间建立几何映射变换。然后,所有需要被映射到图像中并且由映射模型定位对象定义的坐标系表示的几何对象被自动定位在目标图像中,这是通过将计算出的几何变化应用到所述对象的限定参数实现的。最后,所有映射的对象根据它们的限定参数被重

现在目标图像中。

模型定位对象的特性

模型定位对象的特性列举如下：

- 虽然任何对象可以用作限定几何对象的模型定位对象，但模型定位对象通常易于定位，因此它们自由度的限定数目小。自由度数目 (d.o.f.) 是为了定位一个对象的所有部分必须指定的独立位置变量的数目。符合条件的定位对象是例如定位点 (2 d.o.f. (X 和 Y 方向的位移))，定位线 (4 (2 点) - 2 (每点必须在线上) = 2 d.o.f.)，和定位环 (6 - 3 = 3 d.o.f. (中心点坐标和半径))。

- 模型定位对象的另一个特性是它们的数目通常很小，但足以精确定位几何对象。在它们被认为拓扑相关时，可以选择比导出几何变换所需的数目更多的定位对象。在那种情况下，通过最小化例如最小平方标准，得到适应几何变换的超限定解。

- 模型定位对象所代表的图像定位的类型可以是自然或人为的标志实体。自然的定位对象是典型的、放射线学清楚显示的解剖位置，或图像中的参考线。人为的标志实体包括引入射线照片的对象中的特别设计的标记或诸如假肢形状的人造对象。

定位对象实例

在全下肢的腿部检查的放射线学的图像中合适的定位点对象实例是例如大转子的前端，膝关节的中点，踝关节的中点。

在骨盆放射线学的图像中合适的定位线对象实例是例如

- 与髂嵴顶点相连的水平线。因为髂嵴具有圆形的矢状横截面的形状，其放射线学的位置受骨盆倾斜的影响很小。

- 与闭孔相切的最高，最低水平线，

- 与闭孔相切的最左，最右垂直线，

- 两耻骨下支的连接线，

- 髂坐骨线 (Kohler's 科勒线)。解剖学上髂坐骨线是由坐骨切迹的宽皮层表面形成的 (位于髌臼基底后的)，而下髂坐骨线是由坐骨前部的皮层表面形成的 (解剖学上这条线不对应于髌臼基底)。

- 左右泪点的连线。髌臼的实际基底相当于放射照片的泪点。泪点位于髌臼的下内侧部分，正好在闭孔的上部。外侧唇和内侧唇分别对应外壁和内壁。

内壁是相对稳定的放射线学定位而且不会由于小角度的旋转而明显歪曲，不象髂坐骨线（Kohler's 线）有时不能一贯地表现真实的髌臼基底（在正面的 AP 放射照片上，髌坐骨线将覆盖髌臼基底，但具有一定旋转角度的放射照片将不满足这个关系）。

这些线中的每一个实际是 3D 线，其投射在两维图像中为一条线。对三维中相交的线来说，可以使用一组（相交的）定位点的表示代替一组定位线。

在模型和目标图像中的坐标框架（图 1）

在下面的说明中，使用了许多坐标系。

将模型（对应于目标）图像的坐标系分别定义为 (u, v) （对应于 (x, y) ），其中 x 轴从顶延伸到底（以行作为延伸的坐标）而 y 轴从左延伸到右（以列作为延伸的坐标）。 u 和 v 轴（对应于 x 和 y 轴）形成右旋的坐标系，从 u 轴（对应于 x 轴）沿反时针方向到达 v 轴（对应于 y 轴）是正角。

模型（对应于目标）图像中的定位对象限定一局部的第二坐标系 (u', v') （对应于 (x', y') ），对象被分别编码到该坐标系中。例如，当一组定位点用于模型时，从该组的第一点到该组的第二点的有向线段定义为 x' 轴。垂直的 y' 轴必定指向一个方向，使得两轴共同构成右旋的坐标系。

可以进一步在模型对应于目标图像中给所述几何对象附加第三坐标系 (u'', v'') （对应于 (x'', y'') ），以便描述其组成部分的位置。例如，可以给一个 ROI 附加一个坐标系以便描述在 ROI 内的像素的位置，该坐标系在某种程度上类似于在原始图像上描述像素位置的图像坐标系。该 ROI 坐标系的限定参数是其原点在 (u', v') （对应于 (x', y') ）坐标系中的位置和正向的 u'' 轴（对应于 x'' 轴）相对于正向的 u' 轴（对应于 x' 轴）的角度。然后确立 v'' （对应于 y'' 轴）的方向，使得 u'' 和 v'' （对应于 x'' 和 y'' 轴）共同形成右旋的坐标系。

附图说明

图 1. 本发明上下文使用的坐标系：(a) 模型坐标和系 (b) 目标坐标系：图像坐标系 u, v （对应于 x, y ），定位点坐标系和映射的定位点坐标系 u', v' （对应于 x', y' ），和 ROI 坐标系和映射 ROI 坐标系 u'', v'' （对应于 x'', y'' ）。

图 2. 四边形 ABCD 中的点 P 对四边形 $A'B'C'D'$ 中的点 P' 的双线性映射。

图 3. 重心坐标：(a) 两点的仿射组合，(b) 三点的仿射组合。

图 4. 四边形 ABCD 中的点 P 对四边形 $A'B'C'D'$ 中的点 P' 的投影映射。

图 5. 在手部检查中根据相对编码方案编码的兴趣区域。从模型模板映射到目标图像的 ROI 将利用该图像中实际的骨骼轴线定位。成对选取的定位点(图 5 (a)), 确定指骨的和掌骨的 ROI (图 5 (b)); 在此实例中, 四元组的定位点(图 5 (a)) 确定腕骨的 ROI (图 5 (c))。

图 6. 根据绝对编码编码的全下肢检查中的兴趣区域。从模型模板映射到目标图像的 ROI 仍然与图像边界对齐。定位点是大转子的顶端, 膝关节的中心和踝关节的中心(在模板面内的黑色圆形)。在此实例中, 大转子和膝中心用于确定股骨颈和股骨柄以及膝关节的 ROI。在此实例中, 膝关节的中心和踝关节的中心用于确定胫骨干以及膝关节和踝关节的 ROI。

图 7. 利用定位点在图像中映射几何对象的一般系统概述。

具体实施方式

本发明上下文考虑的几何映射可分类为线性映射函数和非线性映射如双线性映射, 多项式映射和薄板样条映射。将通过模型定位对象和映射图像的定位对象之间的对应关系来详细描述这些映射及其计算。同时简要说明重点例子。导出线性映射的分解式用于相对映射和绝对映射, 其中相对映射使用建立的完全变换矩阵, 绝对映射使用简化的变换矩阵, 简化的变换矩阵是通过省略由分解完全变换矩阵获得的一个和多个元素得到的。下一步描述在模型定位坐标系中几何对象的编码。最后, 得到对特定的几何对象应用计算的变换或简化的变换后的结果。

1. 几何映射变换

1.1 线性映射函数

2D 空间映射的类型可以以一般的齐次线性 3×3 变换矩阵 T 表达, 这种矩阵通常被称为单应矩阵。这种变换处理 2D 中的按比例缩放, 剪切, 旋转, 反射, 平移和透射。类似地, 齐次坐标中的 4×4 的变换矩阵表达 3D 空间映射的类型。不失普遍性地, 第三维在推导中被忽略了, 并且结果只考虑了 2D 对象映射(那是在图像 xy 和模型 uv 坐标系之间的映射)。坐标系通常为右旋的, 因为 x 轴从顶延伸到底(在列里延伸), 而 y 轴从左延伸到右(在行里延伸); xy 形成右旋的坐标系。

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} U \\ V \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中齐次坐标为常数 $w=1$ 。 uv 坐标表示模型的位置； xy 坐标表示图像的位置。齐次的符号表示法的优势在于平移被模式化为矩阵乘法以取代要求的额外的向量加法，因此可以在专用硬件中与旋转和比例缩放部分同时编码和计算平移变换。

3×3 的变换矩阵可以通过将其划分成 4 个独立的部分来最好地理解。 2×2 的子矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 限定用于比例缩放，剪切和旋转的线性变换。 2×1 的子矩阵 $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$ 限定一平移且 1×2 的子矩阵 $[a_{31} \ a_{32}]$ 产生透射变换。元素 $[a_{33}]$ 负责整体缩放比例。

3D 中的线性映射函数是由 4×4 的齐次矩阵乘法表示的。

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{bmatrix}$$

以类似的方式， 3×4 的子矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ 代表仿射分量（旋转，平移，剪切）， 1×3 的子矩阵 $[a_{41} \ a_{42} \ a_{43}]$ 代表射影变换，而系数 a_{44} 负责 3D 中单应映射的整体缩放比例。

矩阵 T 指定前向映射函数 X 和 Y ，其将 (u,v) 坐标系中的模型源输入图

像转换成在 (x,y) 坐标系中的目标输出图像。类似的转换也应用在逆向映射函数 U 和 V 中以将目标图像映射为输入图像。

特定情况的线性映射

欧几里得和欧几里得相似性映射和相似性反射

在各向同性缩放的情况下，欧几里得映射提供 4 个自由度，且能够将有界的线段映射为有界的线段（具有不同的长度和方向）。

这些映射也被称为刚性体变换，因为留下的变换对象的形状类似于比例系数。刚性体变换包括以下变换的组合，围绕原点关于 u 轴沿逆时针方向角度为 θ 的旋转，关于原点的平移 (T_u, T_v) ，和施加到坐标 u 和 v 的缩放因子 S_u, S_v ：

$$T_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_u \\ 0 & 1 & T_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_u & 0 & 0 \\ 0 & S_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

按比例缩放 T 具有非单位元素项 a_{33} ，能够将这个映射中的 5 个变量缩减为 4 个。

考虑到以系数 S 进行各向同性按比例缩放，组合的欧几里得映射可以写成：

$$T_E = \begin{pmatrix} S \cos \theta & \sin \theta & T_u \\ -\sin \theta & S \cos \theta & T_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将此矩阵与镜射矩阵联结得到欧几里得相似镜射映射。例如，围绕 u 轴和围绕 v 轴的镜射可以分别用以下矩阵表示：

$$T_{F_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{F_y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在三维空间中，刚体变换以六个自由度为表征（三个平移分量和三个绕各个像轴的旋度）

$$T_E = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w & 0 & 0 \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_u & -\sin \theta_u & 0 \\ 0 & \sin \theta_u & \cos \theta_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_v & 0 & \sin \theta_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_v & 0 & \cos \theta_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_u \\ 0 & 1 & 0 & T_v \\ 0 & 0 & 1 & T_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第一个矩阵表示绕 w 轴沿逆时针方向的旋转，第二和第三个矩阵同样地分别表示绕 u 轴和 v 轴的旋转。旋转角即所谓的欧拉（Euler）角。第四个矩阵表示三维平移。

仿射映射

仿射变换的一般表示为

$$T_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过选取 $w = w' = 1$ ，避免了被齐次坐标 w' 所除。仿射映射对应从源平面 (u, v) 至目标平面 (x, y) 的正交或平行平面射影。

2D 中的仿射映射提供六个自由度，可以将一个三角形（不在同一直线上的三个点）映射成一个三角形。一个输入的矩形可被映射为一个输出端处的平行四边形。仿射映射的结果由缩放矩阵中的非对角线非零项所产生。考虑 $a_{11} = a_{22} = 1$ 和 $a_{21} = 0$ 的情况，通过令 $a_{12} \neq 0$ ，使得 x 与 u 和 v 线性相关，同时 y 与 v 保持恒等。这些操作导致边与 u 和 v 轴平行的矩形被沿 u 坐标轴剪切为 (x, y) 坐标系内的平行四边形。最初平行于 v 轴的一对边现在相对 y 轴倾斜。相似的非零系数 $a_{21} \neq 0$ 导致平行于 v 坐标轴的剪切。因此仿射映射的所述通用式可以写成分解形式，即

$$T_A = T_E \begin{pmatrix} 1 & s_u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一个仿射映射的逆自身也是仿射，而且可以从逆矩阵 $T_A^{-1} = \text{adj}(T_A) / \det(T_A)$ 运算得出。

在三维空间中，每个新坐标均是所有三个坐标的线性组合，剪切变换几何上将一个立方体或长方体变换为一个平行六面体。

射影映射

射影映射能够描述通过投射到观察、射影或检测平面上的透视射影而获得的目标变换。通常系数 $[a_{31} \ a_{32}]$ 非零，所以射影映射提供八个自由度。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{其中 } x = x'/w' , \quad y = y'/w' .$$

射影映射保持了所有方向上的直线。也就是说线映射至线（虽然不是相同的方向）。相对于仿射映射，射影映射提供了八个自由度，且可以将一个平面四边形映射为一个平面四边形。

只有平行线平行于射影平面时，透射变换保持这些平行线。否则，直线将聚合于一个消失点。

射影映射的前向映射函数通过被齐次坐标 w' 所除获得

$$X(u, v) = x = \frac{x'}{w'} = \frac{a_{11}u + a_{12}v + a_{13}}{a_{31}u + a_{32}v + a_{33}}$$

$$Y(u, v) = y = \frac{y'}{w'} = \frac{a_{21}u + a_{22}v + a_{23}}{a_{31}u + a_{32}v + a_{33}}$$

射影映射的逆运算本身也是射影，且可以从逆矩阵 $T_p^{-1} = \text{adj}(T_p) / \det(T_p)$ 运算得出。

射影映射可用于校准图像以使在映射图像中可以量化地施行测量。在病人体内某一深度的点可能在绕 x 轴和 y 轴旋转的某一平面中被标示。此映射也可以用于将在两个不同时间内获得的两个图像的两个平面实现度量上的对应，即映射平面中的距离可用欧几里得法计算得出且不进行进一步的变换就可以相互比较。

线性映射函数的计算

欧几里得示例

矩阵 T_E 只包含四个未知量，可以写为：

$$T_E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这些系数可以通过建立模型图像与目标图像中的两点之间的对应关系来确定。令 $(u_k \ v_k)$ （对应于 $(x_k \ y_k)$ ， $k=0, 1$ ）为模型图像（对应于目标图像）中的两点（例如一条线段的端点）。每一对对应点通过重写下述方程 $X(u, v)$ （对应于 $Y(u, v)$ ）生成具有未知系数的两个方程：

$$\begin{aligned} au_k + bv_k + c &= x_k \\ -bu_k + av_k + f &= y_k \end{aligned}, \quad k=0, 1$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 & 0 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 \\ v_0 & -u_0 & 0 & 1 \\ v_1 & -u_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

这个方程组可用现有技术已知的线性系统解算器解出。现在可以令这些系数与根据连结的初等几何变换所写的 T_E 中的系数构成等式，以确定平移、比例缩放和旋转的组成分量：

$$\begin{aligned} T_u &= c \\ T_v &= f \\ S &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \arccos(a/S) \end{aligned}$$

在三维空间中，一个刚性体变换有六个自由度，需要至少两个点对应关系来建立此变换。

仿射的情况

矩阵 T_A 只包含六个未知量（六个自由度），这些未知量可通过在模型图像与目标图像上不共线的至少三个点之间建立对应关系来确定。令 $(u_k \ v_k)$ （对应于 $(x_k \ y_k)$ ， $k=0, 1, 2$ ）为模型图像（对应于目标图像）中的三个点（例如一个三角形的三个顶点）。每一对对应点通过重写下述的方程 $X(u, v)$ （对应于

$Y(u, v)$ 生成关于未知系数的两个方程:

$$\begin{aligned} au_k + bv_k + c &= x_k \\ du_k + ev_k + f &= y_k \end{aligned}, \quad k = 0..2$$

写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & v_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

这个方程组可用现有技术已知的线性系统解算器解出。

在 3D 中, 仿射变换在齐次坐标中有 12 个自由度, 因此, 它要求至少四个不在同一平面上的点的对应关系 (或四个相交平面)。因此, 3D 中的这些变换可以将一个四面体映射为一个四面体。建立一个相似的方程组以确定此 12 个系数。

此仿射变换的系数可以与根据连结的初等几何变换所写的 T_A 中的系数构成等式, 以确定平移、比例缩放、旋转和剪切的组成分量。它直接遵循:

$$T_u = c$$

$$T_v = f$$

通过首先将单独矩阵连结然后令已连接矩阵的每一项分别与 a, b, d, e 相等, 可以从参数 a, b, d, e 获得缩放比例 S 、沿逆时针方向的旋度 θ 和剪切参数 S_u, S_v 的值。连结后的矩阵是:

$$\begin{aligned} S \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_v & 1 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} S \cos \theta & S(s_u \cos \theta - \sin \theta) \\ S \sin \theta & S(s_u \sin \theta + \cos \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_v & 1 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} S \cos \theta + S s_v (s_u \cos \theta - \sin \theta) & S(s_u \cos \theta - \sin \theta) \\ S \sin \theta + S s_v (s_u \sin \theta + \cos \theta) & S(s_u \sin \theta + \cos \theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当旋转在剪切之前进行,产生另一个矩阵。后者的分解形式可用于确定对应相反顺序的初等矩阵。分解形式的优越性在于可以消除选择分量,这是通过用单位矩阵代替它们实现的。例如,当 2×2 的左上矩阵的变换矩阵的行列式不是单位元,或等价的,在单值分解 $U \cdot S \cdot V$ 中的矩阵 S 含非零的非对角线元素,此变换不是刚性变换,通过消除剪切分量可以达到刚性变换的几何特性。类似的,就像在映射 ROI 的应用中显而易见的,例如使 ROI 的映射边界与被变换图像的图像边界保持平行。下面推导根据先剪切再旋转的前述顺序的分解。

可以通过引入定义为 $S \cos \theta = A$ 且 $S \sin \theta = B$ 的变量 A 和 B 简化表示法,得出以下非线性方程组:

$$\begin{aligned} a &= A + s_u s_v A - s_v B \\ b &= s_u A - B \\ d &= B + s_u s_v B + s_v A \\ e &= s_u B + A \end{aligned}$$

通过将因子 s_u, s_v, B 重写为 A 和已知系数 a, b, d, e 的函数,解此函数的根,和直接导出对应于 A 的所有值的 s_u, s_v, B 的值,可以得到此方程组的解。

通过使用一些代数操作,因子 s_u, s_v, B 可以被重写为

$$\begin{aligned} s_u &= \frac{1}{A} \left(b + \frac{bd - ae}{b} \right) + \frac{e}{b} \\ s_v &= \frac{a}{b} - \frac{A}{b} \\ B &= \frac{bd - ae}{b} + A \frac{e}{b} \end{aligned}$$

注意 $ae - bd = \det(T_A) = D$ 。关于 A 的二次方程于是变为

$$(b^2 + e^2)A^2 - 2DeA + D(D - b^2) = 0$$

如果判别式为正,此方程只有实根,判别式为正导出条件 $D > 0$ 且 $(b^2 + e^2) > D$ 。这两个根很容易用二次方程的标准求根公式计算出。对应于 A 的每个值,可以从上面给出的因子 s_u, s_v, B 关于 A 的函数获得它们的值。

同样地可以将 s_u 作为未知数来重写这些方程,导出二次方程的解,其为一个二重根

$$s_u = \pm \sqrt{\frac{b^2 + e^2}{D} - 1}$$

为使因子 s_u 有实值，需要同样的条件 $(b^2 + e^2) > D$ 。

显然，原始矩阵可以用两种方式因式分解。为了简化计算，当以连续剪切的顺序执行变换 T_A 时，可以选择剪切系数 s_u, s_v 之一含零系数的解。两个分解形式中所选择的一个可以通过下面的方法具体化，即计算旋转和剪切的所有独立分量的和与单位矩阵有多大不同，因为这个矩阵表示同一个变换，即意味着除了平移之外模型的形状没有变化。通过下述步骤即可以达到上述目的：对分解式的每个独立分量减去单位矩阵（即例如对于旋转分量 T_R 计算 $T_R - I$ ），对此差分矩阵的所有元素的绝对值求和以生成一个独立分量的偏差度量，最后对分解式的所有分量对于单位值的偏差量求和，然后选取与单位测量值的偏差量最小的分解式。可以用如下步骤进一步完善这种新颖的方法，即在对于单位矩阵的偏差量确定的情况下，通过以单位矩阵代替小分量而消除小分量，以便获得较简单的初等变换链，而且不损失结果所得组合变换的映射准确度。

在 3D 中，仿射有 12 个自由度，因此可以从最少 4 个不共面的点导出它的解，或等价地由 4 个不共面的平面（也就是说构成四面体）通过使用平面对导出解。

射影的情况

可以标准化矩阵 T 使得 $a_{33}=1$ ，这样需要确定八个系数以表示从图像数据的射影映射。可以通过建立模型图像的四个点和目标图像的四个点之间的对应关系来确定这些系数。令 (u_k, v_k) （对应于 (x_k, y_k) ）， $k=0...3$ ）为模型图像（对应于目标图像）的四个点（例如一个四边形的四个顶点）。每一对对应点通过重写下述方程 $X(u, v)$ （对应于 $Y(u, v)$ ）生成关于未知系数 a_{ij} 的两个方程

$$\begin{aligned} a_{11}u_k + a_{12}v_k + a_{13} - a_{31}u_kx_k - a_{32}v_kx_k &= x_k \\ a_{21}u_k + a_{22}v_k + a_{23} - a_{31}u_ky_k - a_{32}v_ky_k &= y_k \end{aligned}, \quad k = 0...3$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_0x_0 & -v_0x_0 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -v_1x_1 \\ u_2 & v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2x_2 & -v_2x_2 \\ u_3 & v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3x_3 & -v_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & v_0 & 1 & -u_0y_0 & -v_0y_0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -u_1y_1 & -v_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 & -u_2y_2 & -v_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 1 & -u_3y_3 & -v_3y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

这是一个 $Ax = b$ 形式的线性组，这个方程组可用现有技术已知的线性组解算器解出。这些技术依赖于例如对矩阵 A 求逆，这样求出解为 $x = A^{-1}b$ 。这样生成对一般的平面的四边形到四边形映射问题的解。在四边形映射到（单位）正方形和（单位）正方形映射到四边形的特例中，提高计算速度是可能的。一般的四边形到四边形的映射也可以通过串联连接这些特例而提高速度。

因为点和线在射影空间中互相对应，可以选择 2D 中 4 条不共线的直线来确定单应性。类似的，3D 中的一个单应性有 15 个自由度（在不失去一般性的情况下，全比例缩放可设为一），因此，它可以通过最少 5 点，或 5 个平面来完全确定。

射影变换不可分解为仅沿 u 或 v 轴的初等剪切变换因子。做为替代，考虑用全射影分量和仿射分量的分解式。全射影分量可以变换汇聚线，这些线在模型中本来是平行的，但在图像中沿直线方向汇聚于消失点。此仿射分量解决了整体对齐并简化了沿坐标轴的变形。此分解式的完成形式如下：

定义 $T = T_A T_P$ ，其中 T_P 是一个全射影变换， T_A 是一个仿射变换。定义此射影分量为：

$$T_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g & h & 1 \end{bmatrix}$$

因此，导出仿射分量为：

$$T_A = TT_p^{-1} = \begin{bmatrix} a - cg & b - ch & c \\ d - fg & e - fh & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此仿射矩阵可以进一步分解为一个刚体变换（缩放，旋转，平移）以及如前详述的初等剪切变换。和仿射因式分解一样，可以在不损失被映射对象的位置精度的情况下忽略小的分量。

以上关于线性映射的详细描述是接下来描述完整 ROI 或图像区域的快速映射的应用所必需的。

在超限定情况下线性映射函数的计算

当模型包含比确定一个几何变换所需点数更多的定位点时，则有： $m > n$ ，也就是说在线性方程组 $Ax=b$ 中方程数比未知数个数要多。举例来说，两个以上的模型点可以被选择用来推断出一个欧几里得相似变换。这个问题被称为过限定，而且在这种情况下一般来说没有满足 $Ax=b$ 的精确解 x 。不完全限定的情况 $m < n$ 出现的频率更少，而且一般不希望出现这种情况，因为这会留下太多的自由度。现有技术中有三种标准方法解决最小平方问题，这三种方法都基于矩阵的因式分解，它们分别是：普通方程、QR 分解式，以及单值分解式（SVD）。

1.2 非线性映射函数

1.2.1 双线性映射

双线性映射是每个变量（坐标变量 u 和 v ）的两个仿射函数的张量积。在几何上（图 2），这意味着一个单位模型正方形 ABCD 内的一个任意点可以通过执行两次线性内插法获得。一次是在并列的一对边 AD 和 BC 上插值，即使用同一个坐标值 u 去除该边在 AD 和 BC 上分别产生点 P 和 Q。另一是用另一个坐标值 v 在线段 PQ 上插值产生所要的点。

将张量积写为：

$$T_B(u, v) = (X(u, v), Y(u, v)) = (T_{B_x}(u, v), T_{B_y}(u, v)), \quad T_{B_x}(u, v), T_{B_y}(u, v) \text{ 具有如下形式}$$

式

$$T_{B_x}(u, v) = (mu + n)(pv + q) = auv + bu + cv + d$$

$$T_{B_y}(u, v) = (m'u + n')(p'v + q') = euv + fu + gv + h$$

此技术被称为双线性变换，据此每个坐标变换 $T_{B_x}(u,v), T_{B_y}(u,v)$ 都是双线性函数。而把此双线性变换用于四点映射的技术被称为双线性插值。

双线性映射的计算

点映射的代数确定

这 八 个 参 数 $a...d, a'...d'$ 由 确 定

$T_B(0,0) = A(x_0, y_0)$, $T_B(0,1) = B(x_1, y_1)$, $T_B(1,1) = C(x_2, y_2)$, $T_B(1,0) = D(x_3, y_3)$ 之

间的对应关系而决定，

或等价于

$$T_{B_x}(0,0) = x_0$$

$$T_{B_x}(0,1) = x_1$$

$$T_{B_x}(1,1) = x_2$$

$$T_{B_x}(1,0) = x_3$$

$$T_{B_y}(0,0) = y_0$$

$$T_{B_y}(0,1) = y_1$$

$$T_{B_y}(1,1) = y_2$$

$$T_{B_y}(1,0) = y_3$$

该对应关系导出关于未知数 $a...h$ 的 8 个方程构成的方程组，或者，等效地，分别关于未知数 $a...d$ 和 $e...h$ 的由四个方程构成的两个方程组。

坐标值 (u, v) 也可以描述非正方形的模型四边形中点对象的位置。依照后面描述的方法这个点被映射到一非正方形的目标四边形中相应的位置上。这种在中间单位正方形中进行的变换产生源四边形中该点的中间双线性坐标。用 U, V 表示输入四边形的角的笛卡尔坐标，用 I, J 和 X, Y 表示从原点开始按顺时针方向排列的中间单位正方形的坐标和输出四边形的笛卡儿角坐标。

$$U = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3]'$$

$$V = [v_0 \ v_1 \ v_2 \ v_3]'$$

$$I = [i_0 \ i_1 \ i_2 \ i_3]' = [0 \ 0 \ 1 \ 1]'$$

$$J = [j_0 \ j_1 \ j_2 \ j_3]' = [0 \ 1 \ 1 \ 0]'$$

$$X = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3]'$$

$$Y = [y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3]'$$

用 (u, v) 表示输入（模型）点的笛卡尔图像坐标，用 (i, j) 表示输入点相对于输入四边形的双线性坐标，双线性坐标同时也是中间单位正方形坐标系中的笛卡尔坐标。用 (x, y) 表示映射的输入点的输出笛卡尔坐标，该坐标现在相对于输出四边形。把单位正方形的顶点映射为目标四边形的顶点的前向变换矩阵表示如下：

$$A = \begin{bmatrix} i_0 j_0 & i_0 & j_0 & 1 \\ i_1 j_1 & i_1 & j_1 & 1 \\ i_2 j_2 & i_2 & j_2 & 1 \\ i_3 j_3 & i_3 & j_3 & 1 \end{bmatrix}$$

映射过程依四步确定（图2）

1. 计算从单位正方形到输入四边形的前向双线性变换。系数 $a \dots d$ 和 $e \dots h$ 由下式求得：

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} = A^{-1}U$$

$$\begin{bmatrix} e & f & g & h \end{bmatrix} = A^{-1}V$$

2. 确定从输入四边形到中间单位正方形的逆变换，使得能够计算输入点参照输入四边形的双线性坐标。这通过解一个关于 j 的二次方程进行：

$$c_2 j^2 + c_1 j + c_0 = 0$$

其中

$$c_2 = -ec + ga$$

$$c_1 = a(h - v) + e(u - d) - fc + gb$$

$$c_0 = b(h - v) + f(u - d)$$

当 $c_2 = 0$ 时这个方程可能只有一个根。别的情况下可获得如下两个根：

$$j = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_2}$$

每个根确定一个 i 值如下:

$$i = \frac{(u - cj - d)}{aj + b}$$

其中一个根被保留用来产生一个解点 (i, j) 。例如当输入(模型)点 (u, v) 位于输入(模型)四边形内时位于单位正方形内的点。当判别式 $c_1^2 - 4c_0c_2 < 0$ 时方程无解。这一区域在 u, v 平面内由抛物线 $c_1^2 - 4c_0c_2 = 0$ 限定。这条抛物线是所有变换线 $u = u_0, u_0$ 为常数(垂直线)的包络线。这些线相交表征了两个解的存在。

逆解的相似推导也可以与上面不同, 以 i 作为二次方程的根。无解区域(判别式小于零)的边界由同一条抛物线非显性地确定。两个解再一次作为切线存在, 表征变换线 $v = v_0, v_0$ 为常数(水平线)。

3. 计算从单位正方形到输出四边形的前向双线性变换。这个映射的系数 $a...d$ 和 $e...h$ 由下式求得:

$$\begin{aligned} [a' \ b' \ c' \ d'] &= A^{-1}X \\ [e' \ f' \ g' \ h'] &= A^{-1}Y \end{aligned}$$

4. 输入点 (u, v) 的双线性坐标 (i, j) 现在已经通过应用前向变换被映射到它们的关于输出四边形的笛卡尔位置 (x, y) :

$$\begin{aligned} x &= [ij \ i \ j \ 1] \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} \\ y &= [ij \ i \ j \ 1] \begin{bmatrix} e' \\ f' \\ g' \\ h' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

作为可选择的方案, 可以通过仿效依照图 2 的几何结构获得映射点在目标

图像中位置, 由此双线性坐标 i 除以四边形中与 x 轴相关联的一对并列的边产生点 X_1 和 X_2 , 并且双线性坐标 j 除以四边形中与 y 轴相关联的一对边产生点 Y_1 和 Y_2 。随后得到映射点, 就是直线 X_1X_2 和直线 Y_1Y_2 的交点。

通过对点集中的每个点应用前述的变换过程, 可以把参照输入四边形的点集映射到它们在输出四边形中的相关点集。其他依赖点定义的对象也可以用类似方法映射。(u, v) 平面中的水平线和竖直线变换为直线, 然而, (u, v) 平面中的其它直线被变换为二次曲线 (抛物线)。输入单位正方形或输入四边形的边上的相同部分将被映射到输出四边形边上的相同部分。

点映射的几何确定

第一个分量在于把输入四边形的一个点的位置转换成中间单位正方形的点 (在中间单位正方形中该点的笛卡尔坐标与双线性坐标相等)。可由恒定的双线性坐标 i 和 j 的两条线的交点找出这个点。这两条线都与描绘 u, v 平面中无逆变换区域边界的那条抛物线相切。该抛物线由 $c_1^2 - 4c_0c_2 < 0$ 给定, 这是输入模型坐标系中关于 u, v 变量的一个方程, 各系数只依赖于模型四边形的顶点坐标。因为每个双线性坐标具有两个解 (对 (i, j) 坐标来说则一共有四个解), 所以当输入点在模型四边形内时, 必须对解加以选择以使 i, j 坐标在 0 与 1 之间。

第二个分量在于确定单位正方形的具有双线性坐标 (i, j) 的任意点在目标四边形中的位置。这一变换可由两次线性插值找到。如图 2 所示, 首先, 坐标 i 内插于边 $A'D'$ 和 $B'C'$ 分别得到点 X_1 , X_2 。然后坐标 j 内插于线 X_1X_2 , 得到点 P' 。作为可供选择的方案, 也可把坐标 j 内插于线 $A'B'$ 和 $D'C'$, 分别得到点 Y_1 , Y_2 。直线 X_1X_2 和 Y_1Y_2 的交点同样产生 P' 点。

双线性映射的优点是四个顶点不需要在同一平面内; 因此它们可以表示在病人体内不同深度的不共面的解剖学标志。相反的, 四边形到四边形射影映射假定了四边形的顶点都在一个身体平面内。

1.2.2. 多项式映射

多项式映射可以用如下形式的多项式函数来定义

$$X(u, v) = x = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{i,j} u^i v^j$$

$$Y(u, v) = y = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N b_{i,j} u^i v^j$$

u, v 变量是未变形模型的坐标, x, y 是目标图像的坐标。 N 是多项式的阶数, a_{ij}, b_{ij} 是表征变换的映射参数。当 $N=1$ 时, 映射约化到前述的双线性变换, 该变换需要建立四个定位点的对应关系:

$$\begin{aligned} x &= a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{11}uv \\ y &= b_{00} + b_{10}u + b_{01}v + b_{11}uv \end{aligned}$$

一般, N 阶多项式映射所需定位点的最小数是 $(N+1)^2$ 。当更多定位点可用时, 例如伪逆解返回到最近似真实映射函数的参数。

对 N 次多项式映射的可替换表示如下, 这里次是坐标 u 和 v 的幂的最大和:

$$\begin{aligned} X(u, v) = x &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} a_{i,j} u^i v^j \\ Y(u, v) = y &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} b_{i,j} u^i v^j \end{aligned}$$

当 $N=1$ 时, 映射约化到前述的仿射变换, 其需要建立三个定位点的对应关系:

$$\begin{aligned} x &= a_{00} + a_{10}u + a_{01}v \\ y &= b_{00} + b_{10}u + b_{01}v \end{aligned}$$

当定位对象覆盖整个图像区域时, 上面给的多项式变换是在整个图像上执行的低阶整体映射函数。由于这种类型的非线性映射比线性映射使用了更多的定位点, 其被映射对象相对于图像结构的空对应性优于前述的线性映射。

给定计算出的映射参数, 点对象将映射到点, 然而通常在目标图像的浮点位置。通常, 线对象被映射到多项式形状。因此为了在目标图像中维持线对象的直线形状, 可在点的基础上定义线, 根据映射函数 $X(u, v), Y(u, v)$ 映射所述点, 接下来在目标图像中必须基于映射的点重画线对象。

1.2.3. 薄板样条映射

当定位点的数目大于计算变换所需数目时, 得到超限定方程组。解参数不能使得被映射的定位点和它们在目标图像中的对应定位点精确相符, 但是例如在最小平方意义上与它们相符。

但是通过在线性映射仿射函数中加入校正的非线性项能够得到目标定位点

的准确插值:

$$x = a_0 + a_1 u + a_2 v + \sum_{j=1}^N c_j U(r_j)$$

$$y = b_0 + b_1 u + b_2 v + \sum_{j=1}^N c_j U(r_j)$$

前几项代表映射的必要仿射部分,如前面介绍并从N个定位点的对应关系计算得出的内容,最后一项代表径向基函数 $U(r) = r^2 \log r^2$ 其中 $r_j^2 = (u - u_j)^2 + (v - v_j)^2$ 。N个定位点 (u_j, v_j) 称为控制点而且可以任意(非矩形的)方式置于图像中。

2. 在定位对象模型中几何对象的表示和定位

模型定位对象用于限定几何对象参考的坐标系。原则上,任何模型对象均可用于这个目的,但是一般使用容易映射的对象。在本发明的环境中,定位点的集合或定位线的集合是合适的对象。

基于线段的欧几里得坐标和欧几里得对象映射

可以选择包含至少两个点的点集中的两点 a 和 b 指定一个局部模型坐标系。 X 轴可以选择与两点连线重合。轴正向可以选为从第一点至第二点的方向,而线段 ab 的长度可以被标准化为单位长度。 Y 轴方向可以选为与 X 轴正交的方向,而 Y 轴的正向使得其与 X 轴构成右旋的坐标系(从正 X 轴反时针方向旋转到达正 Y 轴)。用这种方法形成标准正交的坐标系,其适用于欧几里得对象的映射。

基于三角形的重心坐标和仿射对象的映射

两点 P_1 和 P_2 的仿射组合定义为 $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$,其中 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 。若 $0 \leq t \leq 1$,该点 P 位于连接 P_1 和 P_2 的线段上。等效形式 $P = (1-t)P_1 + tP_2 = P_1 + t(P_2 - P_1)$ 是仿射变换,其中 $\alpha_2 = t$ 。如果任一个 α_i 是小于零或大于一,则该点将位于线段外。如果 α_1 或 α_2 为零,则该点将分别与 P_2 或 P_1 重合(图3(a))。类似地,平面上的新点 P 可以由三点 P_1, P_2, P_3 的组合定义为 $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$,其中 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 。这种仿射组合将三角形 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 中的一个点定义为

$P = P_1 + \alpha_2(P_2 - P_1) + \alpha_3(P_3 - P_1)$ 。如果任意 α_i 是小于零或大于一，则该点将在三角形外。如果任一个 α_i 为零，则该点在三角形的边上（图3 (b)）。

用于仿射的 n -空间的坐标框架或描述仿射平面 ($n=2$) 中点的位置的简单框架可以通过选择原点 O 和两个线性独立的矢量构成。在两维中该框架表示为 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, O)$ 。任意点 P 可以唯一地写成 $P = p_1\vec{v}_1 + p_2\vec{v}_2 + O$ 。如果我们定义点 P_0, P_1, P_2 为 $P_0 = O, P_1 = O + \vec{v}_1, P_2 = O + \vec{v}_2$ 并且定义 p_0 为 $p_0 = 1 - (p_1 + p_2)$ ，则 P 可以等效地写成 $P = p_0P_0 + p_1P_1 + p_2P_2$ ，借此 $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ 。在这种形式中，数值 (p_0, p_1, p_2) 叫做相对于 (P_0, P_1, P_2) 的 P 的重心坐标，并且被用于描述基于形成三角形 $\Delta P_0P_1P_2$ 的三点组合的仿射坐标框架中的对象。矢量 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ 显然分别表示三角形 $\Delta P_0P_1P_2$ 的边 $P_1 - P_0 = \vec{v}_1$ 和 $P_2 - P_0 = \vec{v}_2$ 。由两个三点组合形成的两个框架 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, O)$ 和 $(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, O')$ 可以彼此相关，也就是说一个框架中点对象的坐标可以被转换成在另一框架中的映射点的坐标，这是通过将第一个框架中的矢量和原点表示为第二个框架中的基础矢量和原点实现的，因为后者构成了矢量空间的基础。因此坐标变换通过矩阵乘法实现。矩阵的行包括相对新（第二）框架 F 的旧（第一）框架 F 的矢量的坐标，表示如下：

$$p_1\vec{v}_1 + p_2\vec{v}_2 + O = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}'_1 \\ \vec{v}'_2 \\ O' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \vec{v}'_1 \\ \vec{v}'_2 \\ O' \end{bmatrix}$$

上述积的前两项

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

表示在框架 $(\vec{v}_1', \vec{v}_2', O')$ 中的新坐标。

对于第一框架的任意矢量，它们在第二框架的坐标，以及它们在矩阵 E 中的关联行是通过将第一框架的矢量影射到第二框架的每个基础矢量上计算的。令 $\vec{t}$ 表示在目标框架 $(\vec{v}_1', \vec{v}_2', O')$ 中的一般矢量。如果我们定义

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{v}_1'}(\vec{v}_1') &= \frac{(\vec{t} \cdot \vec{v}_1')}{|\vec{v}_1'|^2} \vec{v}_1' = p_1' \vec{v}_1' \\ \text{proj}_{\vec{v}_2'}(\vec{v}_2') &= \frac{(\vec{t} \cdot \vec{v}_2')}{|\vec{v}_2'|^2} \vec{v}_2' = p_2' \vec{v}_2' \end{aligned}$$

则 p_1', p_2' 表示 $\vec{t}$ 在 $(\vec{v}_1', \vec{v}_2', O')$ 中的坐标。通过令 $\vec{t} = \vec{v}_1$ ，量 p_1', p_2' 代表 e_{11} 和 e_{12} ，类似地，通过令 $\vec{t} = \vec{v}_2$ ，量 p_1', p_2' 代表 e_{21} 和 e_{22} ，通过令 $\vec{t} = O' - O$ ，可计算出 e_{31} 和 e_{32} 。

在三维空间中，矩阵 E 是令框架 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, O)$ 和 $(\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', O')$ 相关的 4×4 矩阵，通过定义以下行列式用 Cramer 定律计算 E ，

$$\begin{aligned} D &= \vec{v}_1' \cdot (\vec{v}_2' \times \vec{v}_3') = \begin{vmatrix} v_{11}' & v_{12}' & v_{13}' \\ v_{21}' & v_{22}' & v_{23}' \\ v_{31}' & v_{32}' & v_{33}' \end{vmatrix} \\ D_1 &= \vec{t} \cdot (\vec{v}_2' \times \vec{v}_3') = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ v_{21}' & v_{22}' & v_{23}' \\ v_{31}' & v_{32}' & v_{33}' \end{vmatrix} \\ D_2 &= \vec{v}_1' \cdot (\vec{t} \times \vec{v}_3') = \begin{vmatrix} v_{11}' & v_{12}' & v_{13}' \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ v_{31}' & v_{32}' & v_{33}' \end{vmatrix} \\ D_3 &= \vec{v}_1' \cdot (\vec{v}_2' \times \vec{t}) = \begin{vmatrix} v_{11}' & v_{12}' & v_{13}' \\ v_{21}' & v_{22}' & v_{23}' \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

并且计算 $p_1' = \frac{D_1}{D}, p_2' = \frac{D_2}{D}, p_3' = \frac{D_3}{D}$ ，其代表 $\vec{t}$ 在 $(\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', O')$ 中的坐标。通过

令 $\vec{t} = \vec{v}_1, \vec{t} = \vec{v}_2, \vec{t} = \vec{v}_3, \vec{t} = O' - O$, 计算矩阵 E 的四行。

显然, 第一框架代表由模型图像中的定位点构成的坐标系, 第二框架代表由实际图像中被映射的定位点构成的坐标系, 而转换描述了将模型坐标框架中定义的对象映射到实际图像中它们的对应对象的方法。

这种仿射映射的方法同样可以延伸包括矢量。令 $\vec{v}$ 为第一仿射框架中的矢量, 而令 P 和 Q 为任意两点使得 $\vec{v} = P - Q$ 。我们将由仿射变换 F 映射到第二框架的映射向量定义为由下式给出的向量

$$F(\vec{v}) = F(P - Q) = F(P) - F(Q)。$$

可以将直线定义为点和矢量的组合, $L = P + \alpha\vec{v}$, 而线对象的映射由下式确定

$$F(L) = F(P) + \alpha F(\vec{v})。$$

基于四边形的射影坐标和对象的映射

类似于一个点可由基于三角形的仿射框架的重心坐标唯一表示, 一个点也可以由基于四边形的射影框架定义的坐标唯一表示。将在后面描述把参照模型图像中的射影框架的点映射到其在目标图像中的射影框架中的对应点的几何和代数的步骤。

几何步骤

类似于在仿射映射或双线性映射中保持距离的比例和第三条规则, 射影映射保持共线的四点之间的距离的交比。该步骤进一步依据的事实是, 在射影变换下平行线的交点映射到该直线方向的消失点。

射影平面中在同一直线上的四点 p_1, p_2, p_3, p_4 (在仿射平面中具有对应点 P_1, P_2, P_3, P_4) 的交比 $Cr(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 由如下公式给出:

$$Cr(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{23}}}{\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{24}}} = \frac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{23}\Delta_{14}}$$

其中 Δ_{ij} 是在点 P_i 和 P_j 之间的欧几里得距离, 其中两点分别具有仿射坐标 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) 。欧几里得距离 Δ_{ij} 是从射影点 p_i 和 p_j 的齐次坐标 (X_i, Y_i, W_i) 和

(X_j, Y_j, W_j) 计算出的, 计算式如下:

$$\Delta_{ij} = \sqrt{\left(\frac{X_i}{W_i} - \frac{X_j}{W_j}\right)^2 + \left(\frac{Y_i}{W_i} - \frac{Y_j}{W_j}\right)^2}$$

如果其中的一点延到无穷大, 在 $Cr(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 中该项去除, 并且交比简化为余下三点的比。

参考图 4, 单位正方形参考框架中射影 j 的坐标是从模型四边形中的仿射共线点 U_1, P, U_2, VP_1 计算的, 即

$$j = 1 - \frac{1}{Cr(U_1, P; U_2, VP_1)}$$

在单位正方形参考框架中射影 i 的坐标是用类似的方法从仿射共线点 V_2, V_1, P, VP_2 计算的。

现在得到映射点 P' , 即线 X_1VP_1' (或等同于 X_1X_2) 和线 Y_2VP_2' (或等同于 Y_1Y_2) 的交点。

点 Y_2 (类似地点 Y_1), 即 V_2 点的映射, 是通过在线 $D'C'$ 上在从点 D' 到 C' 一定距离的位置描出该点而构建的, 使得在目标图像内结果结构的交比 $Cr(D', Y_2; C', VP_1')$ 等于模型中的交比 $Cr(U_1, P; U_2, VP_1)$, 此交比等于基于射影坐标 j 的交比 $1/(1-j)$ 。类似地, 利用基于射影坐标 i 的交比构建点 X_1 和 X_2 。

代数步骤

确定参照模型四边形的模型点的射影映射的代数过程是基于所述射影变换 T 的, 如上所述该变换是根据四边形的四个顶点的对应关系建立的。目标图像中映射输入点的位置的齐次坐标是由 P 与 T 的射影坐标相乘直接得到的。接下来由分解奇次坐标获得 P' 的图像坐标, 即

$$x = \frac{a_{11}u + a_{12}v + a_{13}}{a_{31}u + a_{32}v + a_{33}}$$

$$y = \frac{a_{21}u + a_{22}v + a_{23}}{a_{31}u + a_{32}v + a_{33}}$$

3. 几何对象的映射

3.1. 对几何对象的限定参数应用映射函数

使用计算好的变换，局部坐标系限定的对象被映射到输出图像。在下文中，描述一些初等的、常用的几何对象的映射结果。线性射影映射是特别值得注意的，因为它相对于映射对象的形状有不变的特性。

点的映射

点是基本的几何对象，因为它们可以直接地用于描述解剖位置，或间接地指定高维对象如线和圆。给定一个如前所述通过在模型和目标图像的定位对象之间建立对应关系而确定的变换 T ，通过应用该变换即 $x = Tu$ ，将模型点 $u = (u, v)$ 映射到目标图像的点 $x = (x, y)$ 。

线的映射

在欧几里得（相似性）变换、仿射和射影变换下，直线仍然保持是直线。然而，在双线性变换下，只有在直线与图像坐标轴平行的情况下直线才保持是直线，否则它们将变换成两阶曲线（抛物线）。

矩形，多边形和兴趣区域（ROI）的映射以及 ROI 的选取

多边形是由一组分段的直线边构成，因此，在欧几里得（相似性）变换、仿射和射影变换下多边形仍然保持是多边形。特别有意义的是矩形，因为它可以表示图像中的兴趣区域。矩形只有在欧几里得（相似性）变换下保持是矩形。仿射变换使矩形变形成平行四边形，因为平行的特性是可以保持的。射影变换通常使矩形变形成四边形。在下文中设计了一种令矩形在欧几里得、仿射或射影映射下保持矩形的目标形状的映射方法。

可以在坐标系 (u', v') （对应于 (x', y') ）内编码一个矩形 ROI，该坐标系由如图 1 所示的前两个模型定位点定义。识别两种类型的编码，在本发明上下文中称为相对的或绝对的。

相对编码是一种术语，引入该术语用以表示指定定义矩形 ROI 的底边的两个点和 ROI 的高一起确定该 ROI。模型坐标系 (u, v) 中与图像的边缘平行的 ROI，通常映射到目标坐标系 (x, y) 中其与图像的边缘就不平行了。由此，由于旋转分量，得到的映射 ROI 的边缘将不再保持平行于原始模型 ROI 的边缘。

这种相对映射对于例如骨龄评估是有利的，其中当选取矩形 ROI 时必须考虑到手指的旋转度，使得在最终选取的 ROI 中骨骼的轴线平行于 ROI 的图像边缘。

术语绝对编码用以表示只有一个定义矩形的 ROI 的原点的基本点, 与 ROI 的宽度和高度一起被指定用以确定 ROI。旋转分量在这种 ROI 映射中可以忽略不计。模型坐标系 (u,v) 中 ROI 与图像的边缘平行, 则映射到目标坐标系 (x,y) 中 ROI 与图像的边缘也平行。因此, 由于忽略旋转分量, 得到的映射 ROI 的边缘将总是保持平行于原始模型 ROI 的边缘。

这种绝对映射对于在完全分辨率的情况下例如在全下肢检查中选取 ROI 是有利的, 有利于在放置测量点期间允许更好地定位准确度。这些 ROI 通常包括沿股骨和胫骨骨体的区域, 以及在股骨颈、膝关节、和踝关节的区域。不考虑骨骼轴线的实际角度, 用户通常希望选取与目标图像的边缘平行的 ROI。因此, 必须忽略变换矩阵中隐含的旋转。这可以通过应用变换矩阵只将 ROI 的原点映射到模型中 ROI 的原点实现, 另外也避开了模型 ROI 固定的角度。于是矩阵的映射就通过两个方法之一完成了。由分解的变换矩阵的比例因子确定映射矩阵的宽度和高度, 并且矩形被绘制为保持与模型矩形的平行。一种替换方案是通过对其应用变换映射 ROI 的并列的对角顶点, 然后保持模型和目标 ROI 的对应边之间的等角 (也就是平行) 完成 ROI 的绘制。用类似的合适方法, 即相对或绝对方法, 可映射多边形对象。实现相对映射是通过映射基线和构造其余的边, 并且进一步对这些边的长度应用缩放因子, 以及保持多边形的内部角不变。实现绝对映射是通过映射多边形原点, 并且通过对边的长度应用缩放因子以及保持边与模型多边形的对应边平行而重绘多边形。

模型图像中矩形或多边形 ROI 的编码过程如下 (图 1)。矩形或多边形 ROI 的基点的坐标 (u',v') 的分量 u' 是通过计算相对于由定位点 a_1 和 a_2 形成的定位线的速度来确定的。一个点相对于线 $a_1 a_2$ 的速度等于从坐标系 (u',v') 的原点沿 u' 轴的相对投影距离。坐标系 (u',v') 的原点与定位点 a_1 重合。与 a_1 重合的投影点速度为 0 (这种点在 v' 轴上)。与 a_2 重合的投影点速度为 1。任何投影在 a_1 和 a_2 之间的点的速度在 0 和 1 之间, 任何投影在 a_1 之前的点速度小于 0, 任何投影在 a_2 的点之后速度大于 1。这样 a_1 和 a_2 之间的长度被标准化为单位长度。该长度也标准化 v' 坐标。 v' 轴被构成为与 u' 轴垂直并且其正向使得其和 u' 轴构成右旋的坐标系。通过将一点投影到 v' 轴上并且以 a_1 和 a_2 之间的长度划分其到原点的投影距离来确定该点的 v' 坐标。

在相对编码中, 矩形区域的两个基点连同矩形高度以这种方式一起编码。

在绝对编码中，只有一个基点连同矩形的宽度和高度一起编码。

根据很少的定位点的对应关系计算出所述几何变化，并且将之应用到模型矩形的基点。

在相对编码的情况下，可以根据被映射的矩形的基点之间的距离和模型矩形的基点之间的距离的比率确定施加到宽度和高度的缩放因子。

在绝对编码的情况下，确定应用到宽度和高度的缩放因子是通过首先如前所述将仿射或射影映射矩阵分解为比例缩放，平移，旋转，剪切和透射分量的初等几何操作，然后从缩放矩阵中提取缩放因子实现的。通过只连结按比例缩放，平移，剪切（用于仿射映射）和透射（用于射影映射）分量，这种绝对映射忽略了几何变换中的旋转分量。

绝对角 ROI 映射和 ROI 的选取有显而易见的优势，即 ROI 与目标图像坐标轴 x 和 y 保持对齐，这样选取 ROI 的空间内插可以以单独沿行和列的方式进行。

圆和椭圆的映射

在欧几里得（相似性）变换下圆仍然保持圆。圆心象如前所述的点一样映射，半径按照如前确定的缩放因子 S 按比例缩放。

在仿射和射影变换下，圆被投影成二次曲线或分离的二次曲线，椭圆，双曲线和抛物线对象，其参数可以从下面描述的变换系数中确定。

下面给出在模型中圆的通常等式

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2$$

将模型点 (u, v) 映射到目标点 (x, y) 的射影变换 T 被写为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中参数 i 可标准化为 1，这是由于该变换只取决于比例因子。然后通过

应用逆变换 T^{-1} 给出 (u,v) 与 (x,y) 的关联等式,得到下式

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' & C' \\ D' & E' & F' \\ G' & H' & I' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于全仿射的情况, $g = h = 0$, (u,v) 与 (x,y) 的相互关系简化为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & -b & bf - ce \\ -d & a & cd - af \\ 0 & 0 & ae - bd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' & C'' \\ D'' & E'' & F'' \\ G'' & H'' & I'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

将这个相对于仿射的射影等式引入圆的等式,生成目标图像中映射对象的二次等式,在两维下其是二次曲线的通用等式

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

或写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{with } Q = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix},$$

其中参数 $A...F$ 是由对应关系建立的变换矩阵 T 的原始参数 $a...h$ 的函数。

当 $\det(Q) < 0$ 且 $AC - B^2 > 0$ 时上述二次曲线是真正的椭圆对象。椭圆的主轴与 x 轴形成角度 α , α 由下式给定

$$\tan(2\alpha) = \frac{2B}{A - C}$$

以与圆对象类似的方法，椭圆对象在欧几里得、仿射和射影映射下映射为二次曲线对象。

贝塞尔曲线 (Bezier) 和样条对象的映射

将这些对象映射在图像中是通过首先变换它们的控制点，接着根据该对象的新控制点再生曲线（或 3D 中的曲面）。贝塞尔曲线和样条曲线在仿射映射下保持不变，而有理数贝塞尔曲线和有理数样条曲线在射影映射下也保持不变，也就是说，通过仅仅基于变换后的控制点再生曲线就可得到变换后的曲线。下文中给出每种曲线的限定以及它的映射形式。

贝塞尔曲线

更具体地， n 阶贝塞尔曲线定义为

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

基础合成函数是下式给出的 n 阶伯恩斯坦 (Bernstein) 多项式

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}.$$

这个公式中的几何参数 $\{P_i\}$ 被称为控制点，对于平面曲线 $P_i = (x_i, y_i)$ ，对于空间曲线 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ 。由集合 $\{P'_i\}$ 表示映射后的控制点，其通过对原始集合 $\{P_i\}$ 应用几何映射获得，映射后的 n 阶贝塞尔曲线 $C'(u)$ 基于映射后的控制点产生，即

$$C'(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P'_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

有理数贝塞尔曲线

n 阶有理数贝塞尔曲线定义为

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

其中

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u)w_j}$$

为该曲线形式表示有理数的基本函数。

类似于多项式贝塞尔曲线的映射，映射后的有理数贝塞尔曲线可以通过控制点的几何变换获得，即

$$C'(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u)P_i' \quad 0 \leq u \leq 1$$

使用有理数曲线的潜在思想是，通过引入齐次坐标， n -维空间的有理数曲线可以被表示为 $(n+1)$ -维空间中的多项式无理数贝塞尔曲线，其它坐标 $X(u), Y(u)$ （用于 2D 曲线）或 $X(u), Y(u), Z(u)$ （用于 3D 曲线）被齐次坐标 $W(u)$ 除， $W(u)$ 为

$$W(u) = \sum_{j=0}^n B_{j,n}(u)w_j$$

这个除以齐次坐标的操作几何上对应于在以原点为中心的超平面 $W=1$ 上的透视映射。在 X 射线成像中原点物理上表示 X 射线的点源， $W=1$ 的超平面表示检测器平面。这个操作的优点在于一些不能用多项式表示的重要曲线如圆，椭圆，双曲线，柱面，圆锥面，球面，可以用有理数函数即多项式的比率表示。

在放射线学和医学成像的领域中，这种算法可以用于获得患者内的 3D 空间曲线在检测器或成像平面上的投影的解析表示。另一个例子是在利用 CT 图像的数字化放射图像重建（DRR）领域，其中 CT 图像中曲线对象的形状（可能适合 3D 数据点）可以表示为有理数贝塞尔曲线，通过均化 3D 曲线可获得它在 DRR 的投影。为了直接实施投影，曲线对象必须以其 Z 轴正向的取向为从 X 射线源到检测器平面的方向并垂直于监测器平面的坐标系表示。表示在 3D 空间中沿曲面相对原点的深度或高度的函数 $z(u)$ 现在作为齐次坐标 $W(u)$ ，将被

用作度量单位以获得空间曲线在监测器平面的投影。在 3D 空间中对象的函数 $x(u), y(u)$ 表示为齐次坐标 $X(u), Y(u)$ 。然后依下式得到被投射在监测器平面上的 3D 曲线在 2D 图像中的位置 $(x'(u), y'(u))$

$$x'(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, \quad y'(u) = \frac{Y(u)}{W(u)}$$

这样在图像处理中通过有理数贝塞尔曲线使用和表示 3D 对象形状就有了物理背景。当对象不是由 z 轴与中心投影方向重合的坐标系表示时，必须首先对控制点 $x(u), y(u), z(u)$ 应用前述的欧几里得变换表示的刚性对象变换（等效地可以将 4×4 矩阵应用到齐次坐标表示的 4-维控制点）。

样条曲线

因为只由一个多项式段表示的贝塞尔曲线不足以表示具有高度几何细节的对象形状（要求高阶），又因为形状的变化影响所有控制点，所以引入允许局部控制对象形状以取得有效表示的样条曲线。

p 阶 B-样条曲线定义为

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b$$

其中 $\{P_i\}$ 表示共同形成控制多边形的控制点，而 $\{N_{i,p}(u)\}$ 是 p 阶基本样条（B-样条）基本函数，该函数定义在非周期且非均匀的节点向量（ $m+1$ 个节点）上，该向量是非递减实数的向量并且包含 $p+1$ 个 a 和 b 。

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\}$$

无内部节点的样条曲线是贝塞尔曲线。这种样条曲线具有形式为 $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ 的一个节点向量， U 包含 $p+1$ 个 0 和 1，得到 p 阶的伯恩斯坦（Bernstein）多项式。

类似于贝塞尔曲线的映射，通过映射控制点 $\{P_i\}$ 并且在目标图像中基于映射后的控制点 $\{P'_i\}$ 再生样条曲线，可以获得映射后的样条曲线

$$C'(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i' \quad a \leq u \leq b$$

有理数样条曲线

p 阶有理数样条曲线定义为

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b$$

其中

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j}$$

另外，其中 $\{P_i\}$ 表示共同形成控制多边形的控制点，而 $\{w_i\}$ 是权重。当节点矢量是非周期和非均匀的时，即包含 $p+1$ 个 a 和 b 的

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\}$$

在当前技术中这些曲线被称为 NURBS 曲线（非均匀有理数基本样条曲线）。无内部节点的 NURBS 曲线是有理数贝塞尔曲线。通常，NURBS 曲线包括无理数 B-样条曲线和作为特例的无理数及有理数贝塞尔曲线。

对于有理数贝塞尔曲线， $C(u)$ 的所有变换和正交射影可以通过对三维控制点 $\{P_i\}$ 施加该操作获得。这个性质叫做仿射不变性。当在曲线上施加透视变换时，在 NURBS 表示形式中必须计算新的权重 $\{w_i\}$ ，这个性质叫做透视变换下的不变性。

贝塞尔和样条对象对于表示医学图像中诊断区域的轮廓是特别有用的，该区域的例示模型需要在应用变形算法之前映射到实际图像以得到实际分割段。在诸如以下应用中需要这种映射操作

- 在基于可变形的轮廓模型的肌肉（与）骨骼图像上分割骨骼，
- 在胸部图像上确定肺野的轮廓，或
- 在乳房 X 射线图像上确定乳房皮肤线。

复合几何对象的映射

复合几何对象是诸如线段，圆弧和多项式形状等的初等对象组合的对象。

复合对象的映射通过依次映射每个组合对象而获得。在医学图像领域中，复合几何对象的例子有在整形外科的连接替换手术的计划过程中使用的修补物和移植物的轮廓或在计划创伤学手术中使用的螺丝模和骨架构架的轮廓。

3.2 引擎和用户界面 (图5 和图 6(a))

实现几何映射方法的系统包括两个部分。

- 该引擎涉及负责以下操作的内部部分，操作包括链接定位点的映射，几何变换的内部计算，参照模型和目标坐标系对几何对象的表示和编码，对对象的限定参数应用几何变换以及在目标图像中再生对象的图像轮廓。链接定位点的映射可以基于在欧洲专利申请 EP A 1 349 098 中公开的用于映射测量点的类型的依赖图。定位对象和依赖几何对象被表示为由类实例化的内部对象，其设计和实现遵从面向对象系统的原则。

取决于应用（将在下文公开），引擎还进一步响应其它的任务。例如，在 ROI 映射和选取的例子中，这些任务包括图像的重采样和插值，图像的存储管理和数据库操作。

- 用户界面构成该系统的外部，并且其通常包括两个窗口。第一个窗口显示模型对象，显示其与定位对象的几何关系。第二个窗口通常表示必须把模型对象映射到其中的窗口；该窗口通常包括一个图像。用户界面包括在目标图像内操作定位对象位置的方法，例如鼠标，用其根据被映射对象的新姿势重绘被映射的几何对象。

在具体的实施例中，显示模型对象的第一个窗口可以被省略，并且可以用模型定位对象的列表表示。在将这些模型对象映射到目标图像之前，它们被接连地从列表中选择出来。

系统基本上在两个模式下操作

- 在交互模式中，用户顺序地选择模型对象，例如通过点击它们。现在该模型对象的副本可附加在光标上，提示用于将该模型对象映射到实际图像中。

为了标出定位点，用户将依照模型图像拖曳各点，将其放在期望的解剖位置上。当达到足够计算几何变换的点数时，系统将提醒用户。当输入的点比需要的少很多，系统可发布变换不确定的警告。

定位线对象可以由两点限定，而选择模型线后，以同独立定位点相似的方式放置定位线的每个限定点。当需要调整线的位置和方位时，这些点在图像中

用作控点。

当定位点或定位线的数目达到计算几何变换的需要时，系统计算在模型对象坐标系和图像对象坐标系之间的映射。最后，通过对模型对象的限定参数应用所述几何变换，将模型对象从模型图像映射到实际图像中。

重现调整实际图像中任何一个定位点将会调用几何变换的重新计算，并且因此通过对该对象的限定参数应用新的变换而更新该几何对象的位置。

● 在自动模式下，系统依照在关系图中加在模型定位对象上的链依次高亮显示每一个模型定位对象，以便示意用户将其映射到图像中，并且接下来映射由所述模型定位对象定义的坐标系中限定的每个对象。在这种模式下定位被进一步增强，因为后续点的初始位置可以在前面各点的基础上确定，例如在超限定欧几里得映射中的第三点的最初位置可以基于前两点计算（这两点以确定的方式限定一个欧几里得映射），第四点的位置可基于先前三点的映射位置确定，以此类推。

交互和自动模式都具有不会建立错误的对应关系的优点。当例如一模型四边形 $ABCD$ 必须被映射为目标四边形 $A'B'C'D'$ ，映射每一个组成对象的顺序是由用户或由系统加入的。在任何时候，根据对象的标示，可知道正在映射哪一个模型对象。因此，该操作方法关于将被映射的对象的排列是不变的。

3.3 对象映射方法的应用

放射线学评估 (图5)

本发明在计算机辅助的放射线学评估上特别有用。在优选的实施例中，选取一组图像 ROI 并将每个 ROI 与一组参考图像并置，同时在其间滚屏显示以寻找最匹配的参考段。在欧洲专利申请 EP A 1 293 925 中公开的这个原则，可应用到例如骨龄评估中，其中固定数目的预定的骨骼部位需要参照一组参考图像分段。锚点对象，在 Tanner-Whitehouse 方法中对参考和定位所有骨骼的 RUS 和腕骨的 ROI 有用的定位点对象是例如手指 III 和 V 的远节指骨的外端和近端的指骨-掌骨关节的中点（四个点），拇指的远节指骨的外端和拇指的掌骨的近侧端中点（2 点），掌骨 II 和 V 的近侧端的中点（2 点），尺骨和桡骨的远侧端的中点（2 点），总共八个定位点。图 5 (a) 中所示的这些点成对用于将 ROI 从模型模板映射到图像中，这是通过使用前述的欧几里得近似映射方法实现的。每对建立用于将模型图像的 ROI 映射到目标图像中的变换矩阵。接下来，

通过重采样和插值过程诸如双线性或双一立方样条插值，从图像中选取各 ROI，之后其最终被置于评估参考图像和参考项目的临近位置。图 5 (b) 中示出了 RUS 骨的 ROI 示意图，图 5 (c) 中所示为腕骨的 ROI。

使用基于定位点的空间映射运算的第二个实施例，不再包括从将被评估的图像中选取 ROI 和将它们与参考图片并置显示，而是包括将参考图片映射到图像中靠近骨骼的区域（例如同特殊区域的 ROI 呈接触方式）。用鼠标的滚动轮或键盘的上下键滚屏显示参考图片，然后用户选择在参考图片和骨骼区域之间对应最大相似度的参考段。该操作方法的优点是用户可见到全部的输入图像。

ROI 和参考图片映射在基于对准的第三种实施例中更有优势，其中通过基于相关性的逐个像素的比较来测量相似性。在该实施例中，参考图片以空间一致的方式被映射到图像中，使得其覆盖相应的骨骼部位。使用该骨骼区域参照的定位点将参考图片添加到该将被评估的骨骼区域之上。对 ROI 使用线性或非线性图像对准操作，以便找到其关于所述骨骼部位最对应的位置，并且记录对准的相似度。对每一个参考图片重复该对准操作，并且选择相似度最高的段。

放射学影像质量控制

借助于分析体模，本发明在质量控制和质量保证方面特别有用。体模通常包括具有固定拓扑布局的分析对象的空间布局，以便测量系统和图像质量参数诸如 SNR、MTF、DQE、对比度和几何分辨率。用以计算这些参数的图像数据分析基于特定的成像体模的位置执行。例如为了确定圆盘相对背景的对比度，必须对圆盘区域（即完全包含在圆盘边界以内的区域）和圆盘的周围背景取样。可以在被映射到目标图像（体模的图像）的分析对象模型（基于体模的 CAD 图像）中限定这些样本的空间位置。体模包括少量易辨别且易定位的标记点作为定位点，这些定位点被所有分析对象参照。用户设置这些定位点的图像，并且建立与它们其模型定位点的对应关系。计算映射变换，接下来计算所有分析点在体模的图像中的位置。最终使用分析点的位置的强度计算质量测量。例如，为了估计图像的局部对比度，计算映射的圆盘内的圆形区域中的强度和映射的围绕该圆盘的同心环区域中的强度的差值。

放射学图像测量（图6）

本发明也有助于在放射学测量应用中减轻预置的关键测量点的负担，例如欧洲专利申请 EP A 1 349 098 中公开的测量应用。在这个申请中，必须将多个测量点映射到影像中它们对应的解剖位置。这个专利中公开了三种放置模式：手动放置、ROI 放大放置和基于可变形的轮廓分段的自动放置。

以如下方式改善第一个放置模式的过程，即通过将一个测量点附在光标上，并且将它预先映射到目标图像中，映射在通过对测量模板的各模型测量点应用已建立的几何变换而获得的位置上。定位点被用来建立几何变换，在执行测量模板的过程中测量点的位置变得可用，而在空闲时可使用测量点的位置来改善、实现或计算所述变换。

本发明以如下方式提高了第二种放置模式的速度，首先将包含一个测量点的 ROI 自动放大到更大的或完全的分辨率，然后将测量点预映射到其真实解剖位置的临近域内的初始位置。自动放大步骤在独立的弹出窗口中放大图像的特定区域，或者以完全充满当前图像窗口的方式放大特定区域。预映射步骤将特定测量点映射到其相关 ROI 中的初始位置；用户通过在该放大的 ROI 中将该点拖到其最终位置完成映射任务。最后通过应用连接已放大的 ROI 的坐标系和原始图像的坐标系的逆几何变换，计算该点在原始图像中的坐标。ROI 的选取和测量点的映射都是基于前述的定位点对象对应和计算几何变换以及应用几何变换的方法。

关于放置测量点，第三种放置模式不需要用户的任何干预。相反，使用它们的相关位置和例示的且随后变形的模型轮廓上的局部的几何和光度特征，间接指定测量点和对象。例示模型轮廓的初始姿态（旋度、平移和尺寸）基于一小组定位点，这些定位点和目标定位对象之间的对应关系确立映射变换。

特别是当执行根据欧洲专利申请 EP A 1 349 098 的 3D 测试模板时，该模板定义为多个独立的关于 3D 图像的特别切片的测试模板，并且在模板窗口中以堆栈显示，测试点必须被置于它们在实际 3D 图像中对应切片的对应位置。诸如 MR 或 CT 的当前医疗器械的高分辨率 3D 影像通常包括 1000 个切片。显然，在执行测试的时间内，在切片的栈中滚屏显示直到找到必须把测试点放在其上的正确的切片是一件费力的任

务。通过使用由模型中和实际 3D 图像中的数个标记定位点的对应关系建立的几何变换，滚屏显示的切片数目可以被减小到针对该测试点的一个特定范围，因此缩减了搜索时间。因为变换是三维的，当映射一个点时，不止是预先选择了一个初始切片，而且也把这个点预置在了切片中。在选择了目标切片之后，通过将该点拖到其相应的解剖位置，再次把该点放置在切片中。然后使用所有测量点的 3D 坐标计算 3D 度量实体，诸如距离和角度。

整形外科和创伤学植入模板

不止可以映射诸如点、线、圆和样条等基本的几何对象，仅仅基于少量的定位点，通过对各成员初等对象应用映射变换，由这样的初等对象组成的对象也可以整个地从模型图像窗口映射到目标图像中。这样的组合对象通常是直接从弥补物制造商处获得的植入物或弥补物的轮廓，形式是 2D 或 3D 的 CAD 模型，或者是传统的 2D 醋酸纤维模板的扫描的向量化的轮廓。这个映射相当程度上提高了弥补物的选择和置换的速度，该过程通常称为模板化。当在胶片上执行或在等价于手动胶片模板化的非自动计算机的计算机显示器上执行时，它要求对对象的诸多操作，诸如非系统方式的平移和旋转，以便弥补物轮廓符合解剖图像数据。本发明特别适合在定位过程中起辅助作用，辅助是通过提供特别吻合病人的特定成像组织的初始位置实现的，其准确性依赖于在定位对象的坐标系中定位点或对象的定位精确性以及定义模板的精确性。也可以使用模板对象的位置依赖性自动化其它对象的放置过程。在整个髋部的置换中，计划包括植入物的通常三个部分的选择和放置：股骨柄，股骨头和髋臼窝。当股骨柄被首先置入放射学图像时，机械上包容股骨柄的股骨头的放置可以被自动化，通过使用股骨柄作为定位对象，使得股骨头的轴线与股骨模板对象的股骨柄的轴线重合。同样，通过使用股骨头作为定位对象的映射，髋臼窝被自动放置：平移部分是从股骨头中心的位置开始的，并且它保持和关节窝的合适旋度。当髋臼窝被首先放置时，它的中心和方向用于确定股骨头的前面位置和一方向，其接下来确定股骨柄的前面位置和一方向。

与弥补物模板化相关的另一个应用属于创伤学的领域，其中外科手

术的计划需要将螺丝构架的图形模型放置于图像上。这里，当把图形模型和之前定位点或对象的放置相联系并且依赖前面定位点的放置时，也可以提高放置过程的速度和准确性。一旦知道前面对象的位置，就可以将它们用作依赖对象参考的定位点，并且使用前述的映射方法预放置依赖对象。

放射学影像分段

本发明在影像分段的领域中也很有用。对于医学图像，这个基本图像处理操作的目的是描绘解剖结构和器官，以便执行例如平面、周长、面积或体积测量。为此目的，使用图形模型初始化将被分段的对象的轮廓。接下来，通过应用图像—内部（例如梯度）和轮廓—内部（例如局部曲率）力量，即当前技术中所谓的蛇形分段法，改变上述轮廓的形状。但是，重要的问题包括预定位模型的轮廓。通过限定坐标系中具有少量定位对象（例如解剖标志点）的轮廓线，经由对该轮廓线的限定参数应用已建立的几何变换，可以计算出在目标图像中该轮廓的初始位置。例如，通过对多边形的顶点应用变换面可以映射多边形的轮廓；通过对样条的控制点应用变换，可以映射样条的轮廓。在另一个例子中，目标图像中的初始轮廓线基于限定参数产生。下文给出分段应用的例子。

在乳房造影术领域中，计算机辅助诊断算法必须仅仅在乳房隆起区域的图像上运算；因此需要皮肤线的分段。初始模型轮廓的映射可以基于描述乳房轮廓的特征点。具体地，可以使用下列定位点来仿射弯曲模型轮廓令其接近初始的乳房皮肤轮廓：（a）在 CC（头—尾）乳房视图中：乳头，乳房图像中接近胸壁的左点和右点；在 MLO（内外斜侧）图中：胸壁处胸肌地下部，乳房图像顶部胸肌最外侧的位置，乳头和乳房图像中靠近胸壁的底部。映射的初始轮廓根据例如蛇行接近法进一步变形，直到它符合在乳房 X 光照片中实际的“乳房隆起（肿块）”到“直接暴露区域”的界限。

在计算机辅助的胸部图像诊断中需要类似的区域描绘，其中需要确定肺野的范围。这里肺野轮廓的映射可以基于胸部图像的特征点。具体地，在仿射或影射地将模型轮廓映射为原始的肺野轮廓的过程中，可以使用下列定位点：左和右肋骨横膈膜沟（也叫肋骨横膈膜角，每个角在肋骨

的内表面和横膈膜的圆顶之间形成), 心脏阴影与横膈膜的圆顶的左和右交叉点, 左和右低锁骨 “第三肋骨” 的交叉点。

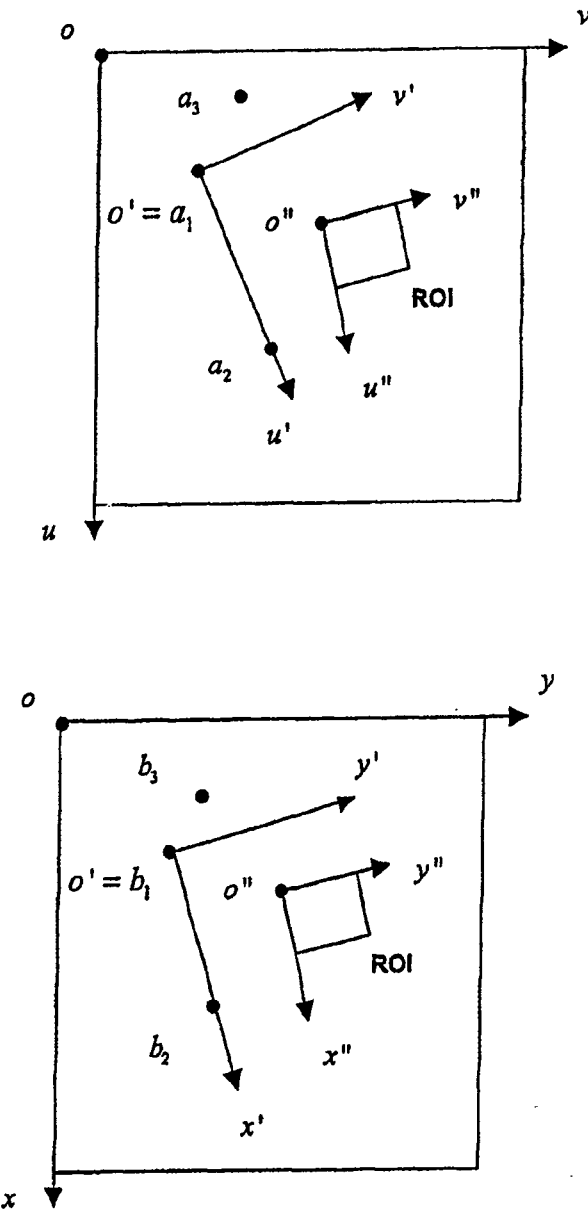


图 1

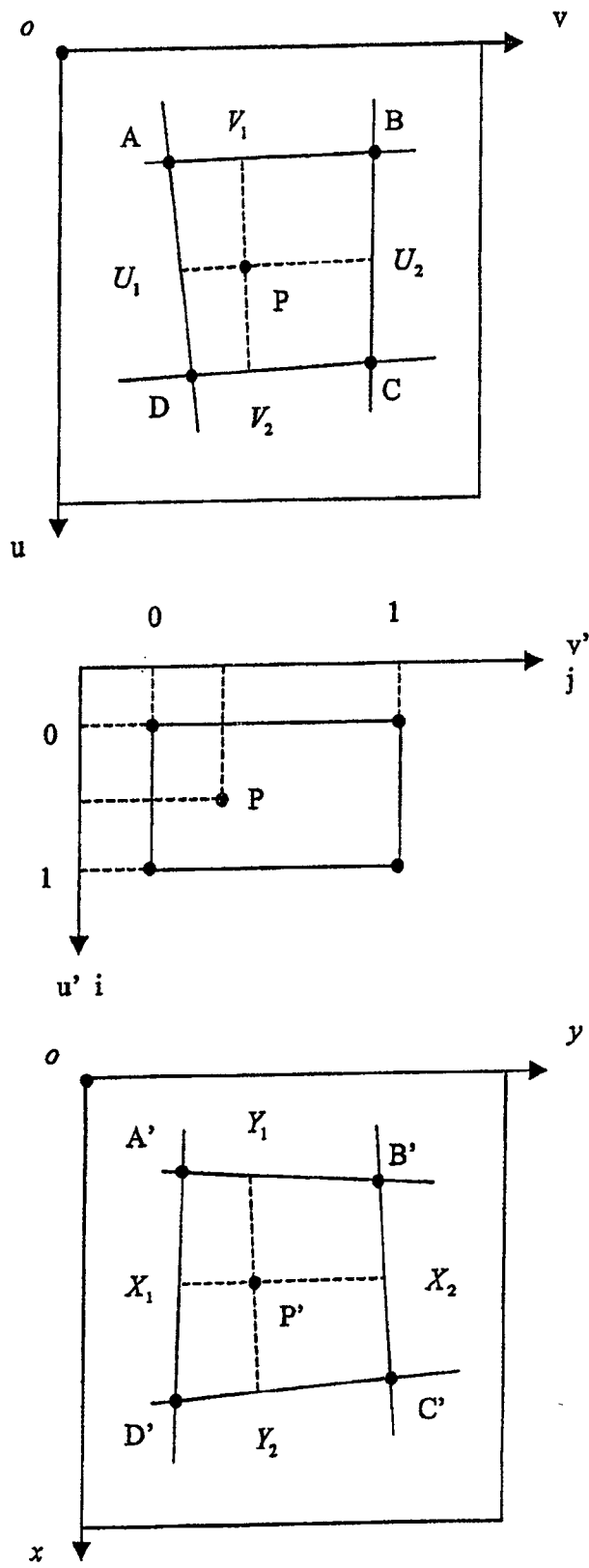


图 2

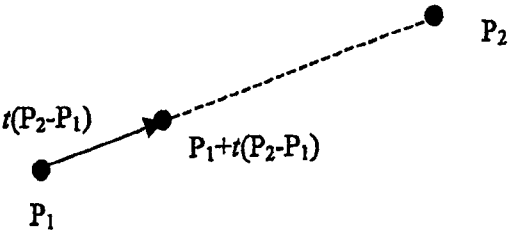


图 3(a)

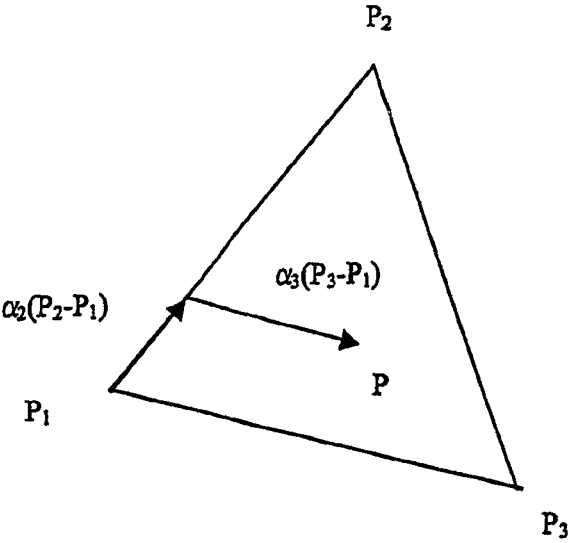


图 3(b)

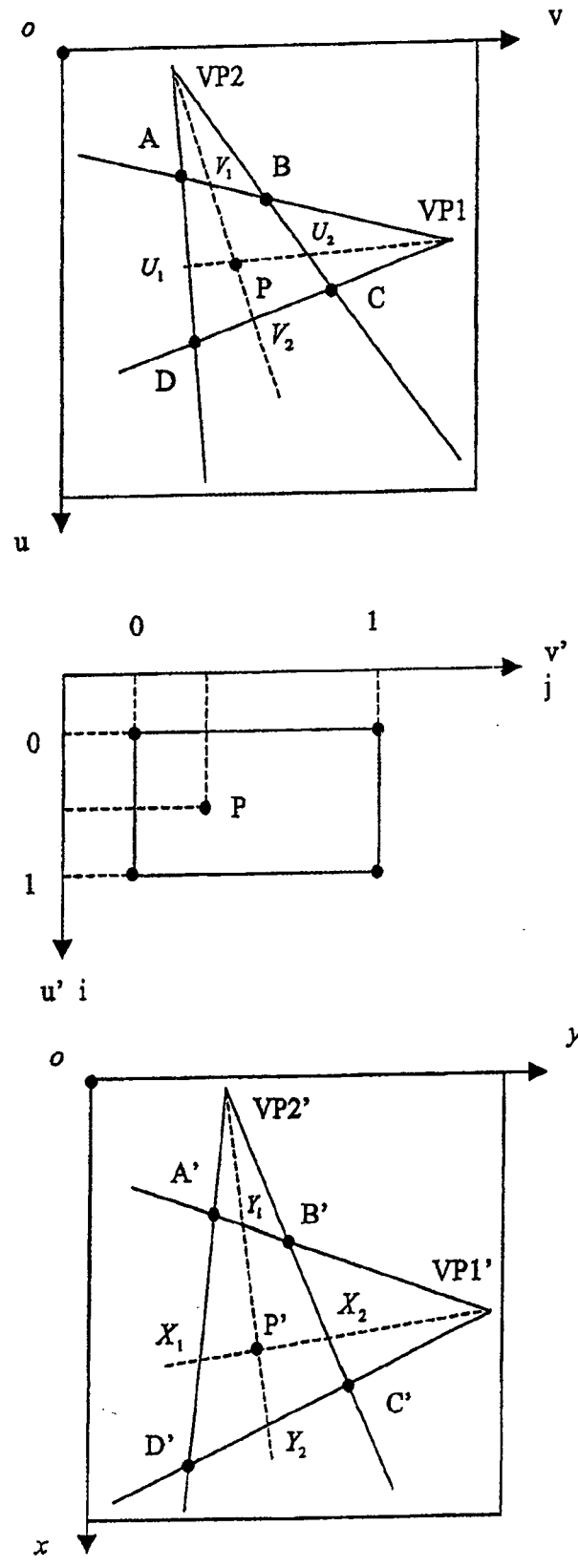


图 4

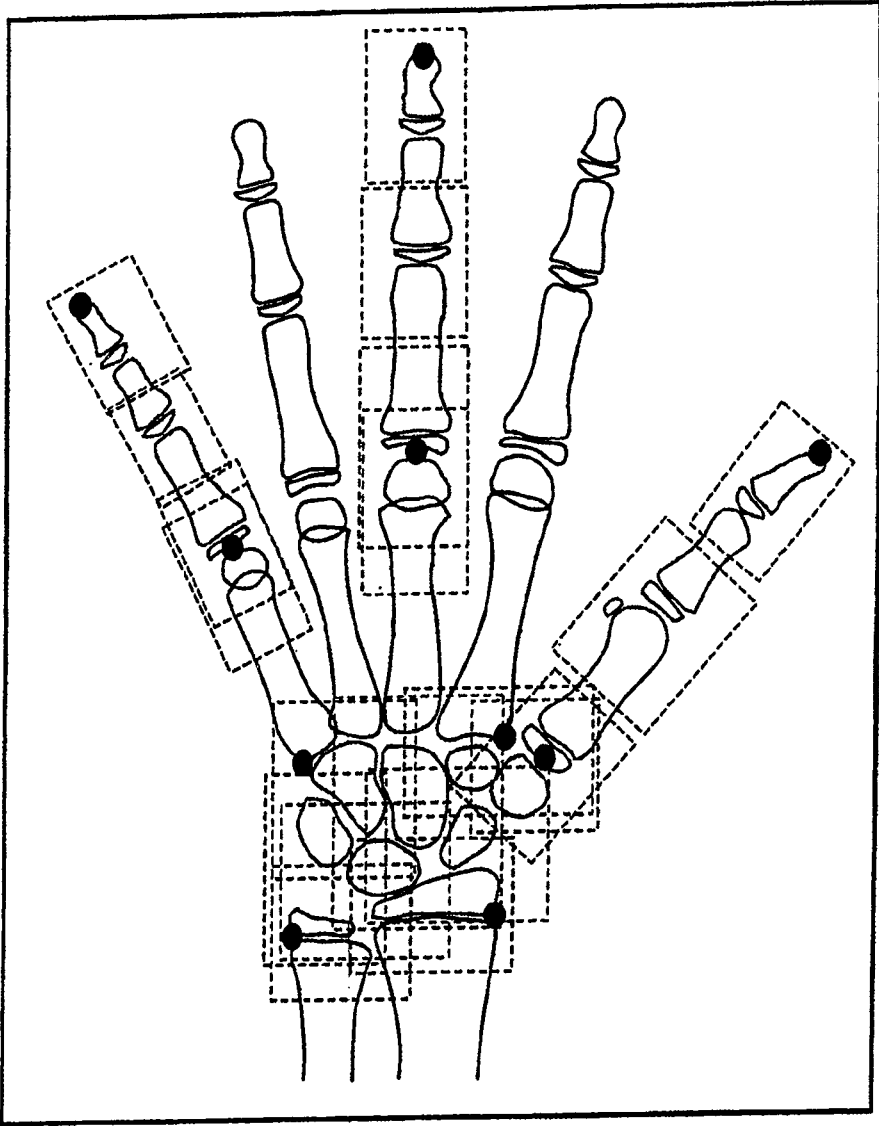
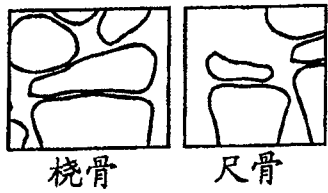
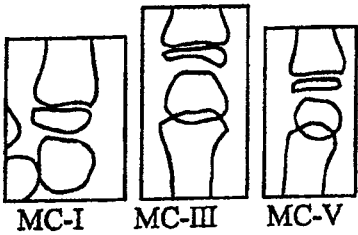


图 5(a)

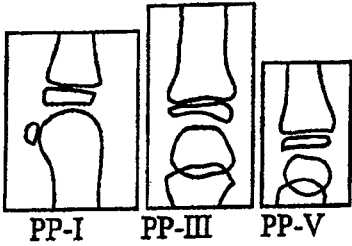
远端桡骨和尺骨兴趣区域



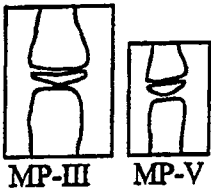
掌骨兴趣区域



近节指骨兴趣区域



中节指骨兴趣区域



远节指骨兴趣区域

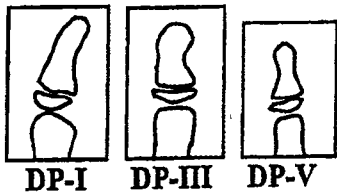


图 5(b) RUS (桡骨, 尺骨, 短骨) 兴趣区域

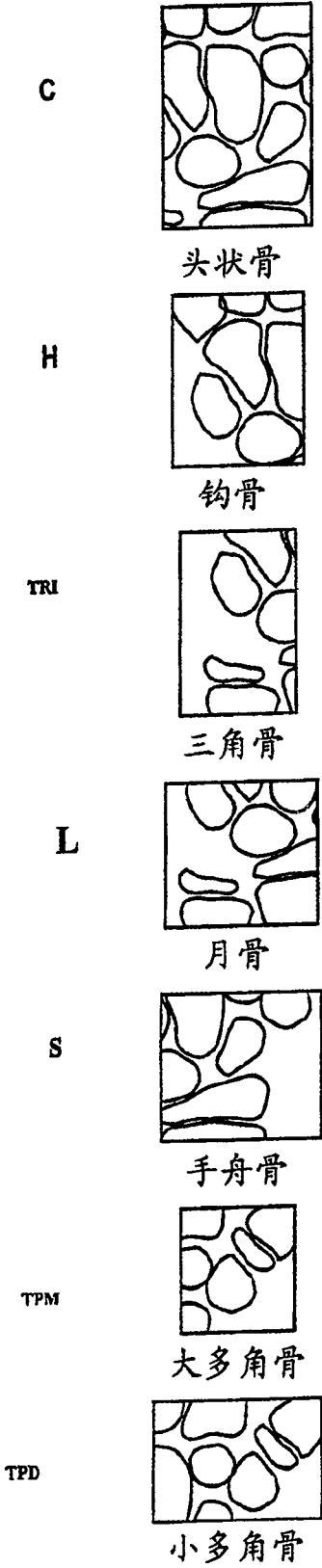


图 5(c) 腕骨兴趣区域

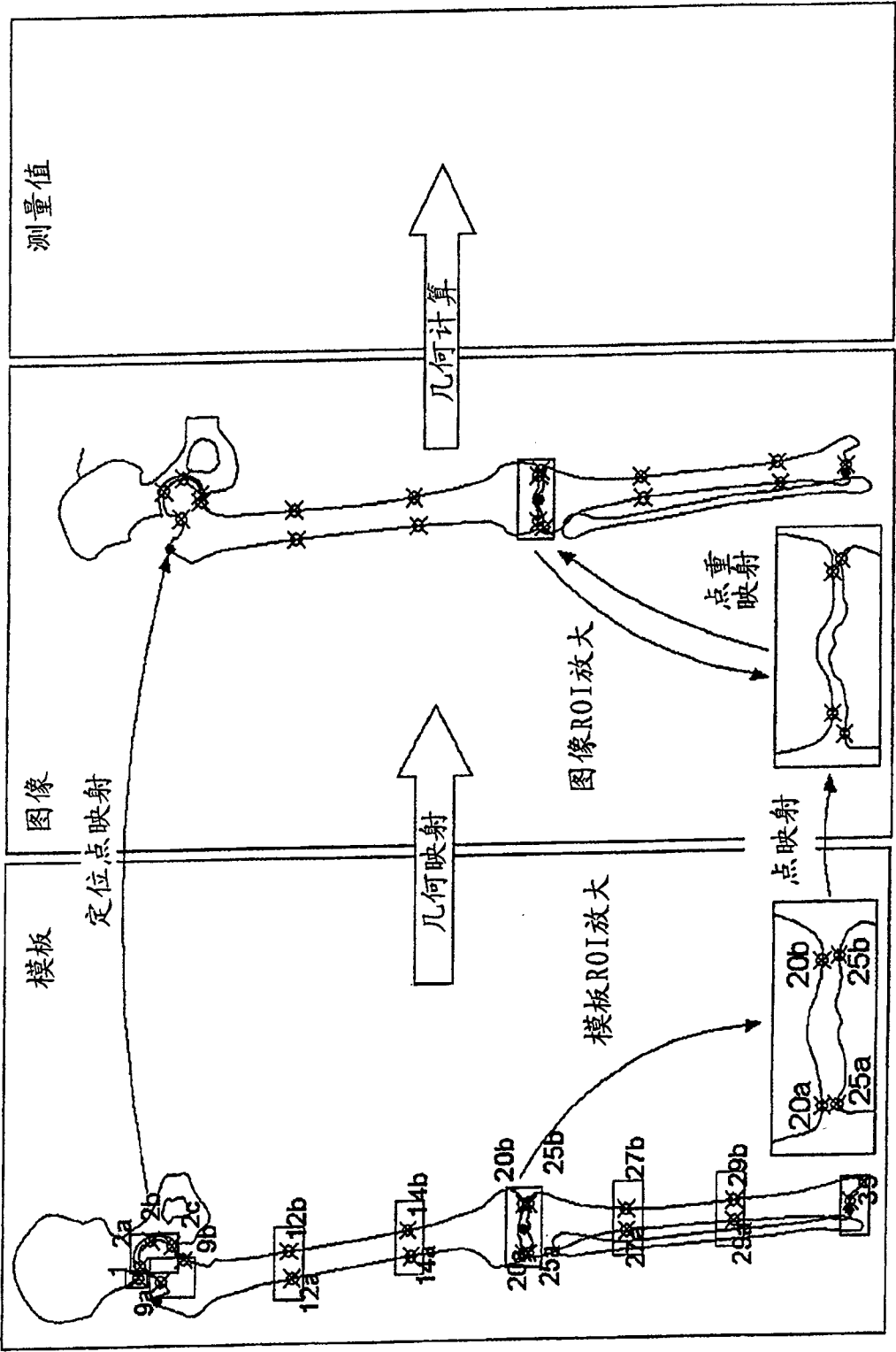


图 6

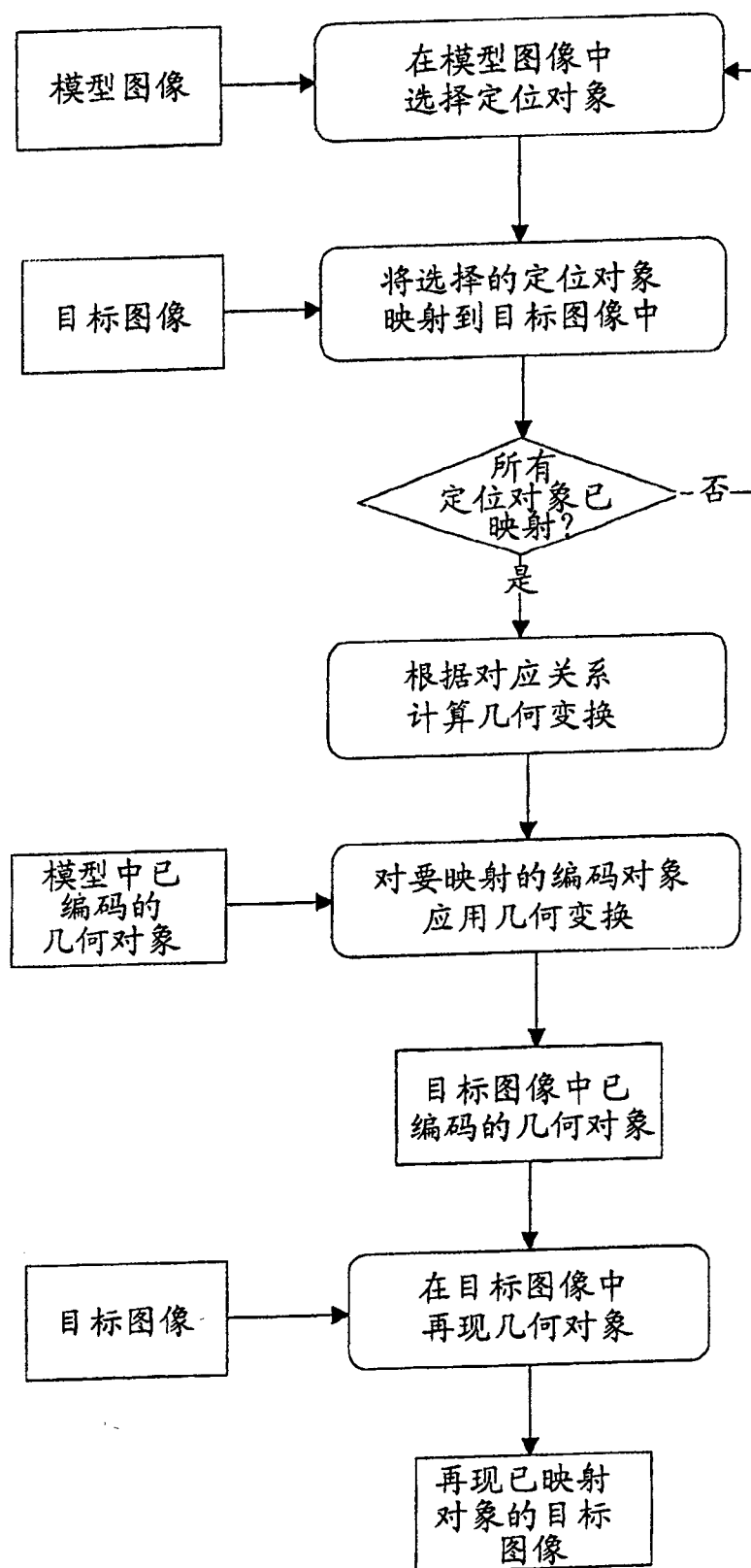


图 7