

(12) 按照专利合作条约所公布的国际申请

(19) 世界知识产权组织
国际局

(43) 国际公布日
2022 年 1 月 20 日 (20.01.2022)



(10) 国际公布号
WO 2022/011497 A1

- (51) 国际专利分类号:
G06F 30/20 (2020.01) **G06F 113/14** (2020.01)
- (21) 国际申请号: PCT/CN2020/101592
- (22) 国际申请日: 2020 年 7 月 13 日 (13.07.2020)
- (25) 申请语言: 中文
- (26) 公布语言: 中文
- (71) 申请人: 大连理工大学 (**DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY**) [CN/CN]; 中国辽宁省大连市凌工路 2 号大连理工大学, Liaoning 116024 (CN)。
- (72) 发明人: 孙希明 (**SUN, Ximing**); 中国辽宁省大连市凌工路 2 号大连理工大学, Liaoning 116024 (CN)。
段楠 (**DUAN, Nan**); 中国辽宁省大连市凌工路 2 号大连理工大学, Liaoning 116024 (CN)。 吴玉

虎 (**WU, Yuhu**); 中国辽宁省大连市凌工路 2 号大连理工大学, Liaoning 116024 (CN)。 仲崇权 (**ZHONG, Chongquan**); 中国辽宁省大连市凌工路 2 号大连理工大学, Liaoning 116024 (CN)。

- (81) 指定国 (除另有指明, 要求每一种可提供的国家保护): AE, AG, AL, AM, AO, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BH, BN, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CL, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DJ, DK, DM, DO, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, GT, HN, HR, HU, ID, IL, IN, IR, IS, IT, JO, JP, KE, KG, KH, KN, KP, KR, KW, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LU, LY, MA, MD, ME, MG, MK, MN, MW, MX, MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PA, PE, PG, PH, PL, PT, QA, RO, RS, RU, RW, SA, SC, SD, SE, SG, SK, SL,

(54) **Title:** METHOD FOR ANALYZING GLOBAL STABILITY OF FLUID CONVEYING PIPE-NONLINEAR ENERGY SINK SYSTEM

(54) 发明名称: 一种分析输流管-非线性能量阱系统全局稳定性的方法

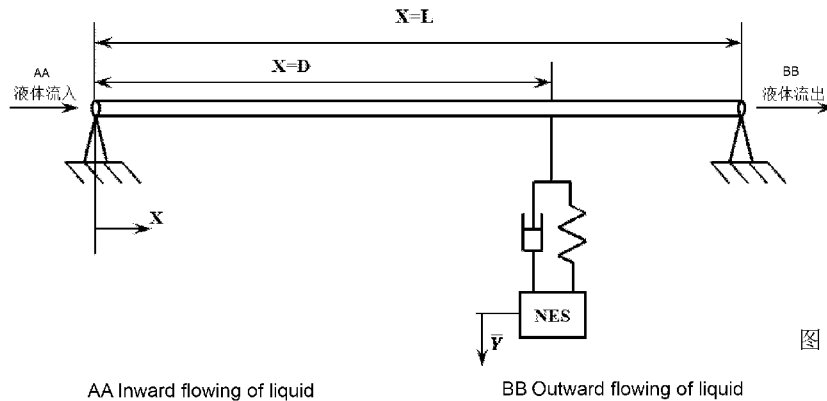


图 1

(57) **Abstract:** The present invention provides a method for analyzing the global stability of a fluid conveying pipe-nonlinear energy sink system, and belongs to the technical field of system stability proving and analyzing in a control system. In the method, a high-order partial differential model of the fluid conveying pipe-nonlinear energy sink system is established on the basis of a target energy transfer theory, is discretized into a second-order nonlinear ordinary differential form by using a Galerkin approximation method, and is further converted into a quadratic model containing gradient information for the first time; then, a global stability criterion of the system is obtained by means of an energy disturbance technology, and finally, the theoretical result is verified by using a numerical method. The present invention solves the theoretical proving problem of effectiveness of a nonlinear energy sink in the aspect of fluid conveying pipe vibration control for the first time, and gives a strict analysis process that the global stability thereof is exponential stability.

(57) **摘要:** 本发明提供了一种分析输流管-非线性能量阱系统全局稳定性的方法, 属于控制系统中的系统稳定性证明与分析技术领域。该方法基于目标能量传递理论建立的输流管-非线性能量阱系统的高阶偏微分模型, 通过 Galerkin 逼近方法将其离散为二阶非线性常微分形式, 并首次进一步转换为包含梯度信息的二次型模型; 进而通过能量扰动技术得到系统的全局稳定性判据, 最后通过数值方法对理论结果验证。本发明首次解决了非线性能量阱在输流管振动控制方面有效性的理论证明问题, 并给出了其全局稳定性是指数稳定的严格分析过程。

ST, SV, SY, TH, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US,
UZ, VC, VN, WS, ZA, ZM, ZW。

- (84) 指定国 (除另有指明, 要求每一种可提供的地区
保护): ARIPO (BW, GH, GM, KE, LR, LS, MW, MZ,
NA, RW, SD, SL, ST, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), 欧亚 (AM,
AZ, BY, KG, KZ, RU, TJ, TM), 欧洲 (AL, AT, BE, BG,
CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HR, HU,
IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, MK, MT, NL, NO, PL, PT,
RO, RS, SE, SI, SK, SM, TR), OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI,
CM, GA, GN, GQ, GW, KM, ML, MR, NE, SN, TD, TG)。

本国际公布:

- 包括国际检索报告 (条约第21条(3))。

一种分析输流管-非线性能量阱系统全局稳定性的方法

技术领域

本发明属于控制系统中的系统稳定性证明与分析技术领域，涉及到高阶偏微分方程模型的常微分化以及能量扰动技术，特别涉及一种基于李雅普诺夫稳定性理论的指数稳定分析方法。

背景技术

输流管在工业领域有着重要的应用价值和广泛的使用范围，比如热交换、燃油输送、液压等领域皆以管道输送流速变化范围很大的流体，流体流速的变化会诱导管道产生过量振动，进而使机械发生诸如噪声、材料疲劳以及漏液等故障，致使设备达不到要求的性能指标。对于输流管的振动控制方面，由于安装空间限制小，不需要能量输入，经济性好以及高可靠性等优势，被动振动控制器受到了越来越多的关注，其中一种基于非线性能量阱的被动振动控制器取得了广泛的关注及研究，并取得了一定的控制效果。作为一个强非线性附件，非线性能量阱的引入必然会对系统的稳定性产生影响，但缺乏输流管-非线性能量阱系统稳定性方面的研究。而本发明基于对输流管-非线性能量阱系统模型的理解，利用其凸特性与梯度特性建立系统的能量泛函和扰动泛函，然后利用能量扰动技术建立了系统的 Lyapunov 函数，并在 Lyapunov 稳定性理论框架下分析了系统是全局指数稳定的，最后利用数值方法对理论证明结果进行了验证。目前为止，没有专利公开基于 Lyapunov 稳定性理论和能量扰动技术的输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性分析方法。

发明内容

为了说明非线性能量阱的引入对系统的影响，需要输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性进行研究，本发明提出了一种输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性分析方法。

本发明通过对输流管-非线性能量阱模型的理解和分析，将原系统模型转换为含有凸函数梯度信息形式的系统模型，基于此模型精心构建了系统的能量泛函与扰动泛函，然后利用能量扰动技术得到了系统的 Lyapunov 函数，并在 Lyapunov 稳定性理论框架下得到了输流管-非线性能量阱系统是全局指数稳定的判据，最后利用数值仿真验证了理论证明的结果。

本发明的技术方案为：

一种分析输流管-非线性能量阱全局稳定性的方法，包括以下步骤：

步骤 1：输流管-非线性能量阱系统的建模及预处理

所述输流管的安装方式为两端简支，非线性能量阱与输流管管道相连；并且在不考虑重力、内部阻尼、外部张力以及增压效果的情况下，输流管-非线性能量阱（nonlinear energy sink, NES）系统的数学模型可写成如下形式：

$$\begin{aligned}
 & EI \frac{\partial^4 Y(X, T)}{\partial X^4} + \lambda EI \frac{\partial^5 Y(X, T)}{\partial X^4 \partial T} + M_f V^2 \frac{\partial^2 Y(X, T)}{\partial X^3} \\
 & + M_f V \frac{\partial^2 Y(X, T)}{\partial X \partial T} + (M_f + m_p) \frac{\partial^2 Y(X, T)}{\partial T^2} \\
 & + \left\{ K[Y(D, T) - \bar{Y}(T)]^3 + C \left[\frac{\partial Y(D, T)}{\partial T} - \frac{d\bar{Y}(T)}{dT} \right] \right\} \delta(X - D) = 0 \\
 & m_{NES} \frac{d^2 \bar{Y}(T)}{dT^2} + K[\bar{Y}(T) - Y(D, T)]^3 + C \left[\frac{d\bar{Y}(T)}{dT} - \frac{\partial Y(D, T)}{\partial T} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $Y(X, T)$ 表示输流管的截面位移函数； EI 表示输流管的弯曲刚度； λ 表示输流管的黏弹性系数； M_f 表示输流管内流体的质量； m_p 表示输流管本身的质量；

V 表示输流管内流体的流速； T 是时间变量； $\bar{Y}(T)$ 表示 NES 的位移函数； m_{NES} 表示 NES 的结构质量； K 表示 NES 的非线性（立方非线性）刚度； C 表示 NES 的阻尼； D 表示 NES 的安装位置； $\delta(X-D)$ 是狄拉克 δ 函数。

步骤 2：模型离散化

由于原输流管-非线性能量阱系统模型为高阶偏微分方程(partial differential equation 简写 PDE)形式，不便于后续的全局稳定性分析，故需要通过 Galerkin 近似方法将其转换为常微分方程(ordinary differential equation 简写 ODE)形式。通过利用标准 Galerkin 型，可以将输流管-NES 系统转换为一个更加容易处理的有限维的动力学系统；具体过程如下：

输流管-非线性能量阱系统位移的标准 Galerkin 型为：

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^n \phi_r(x) q_r(t) \quad (2)$$

其中， $\phi_r(x)$ 是输流管在无阻尼自由振动情况时的第 r 个特征函数； $q_r(t)$ 是离散系统的广义坐标； n 是 Galerkin 离散项数。

利用式(2)所表示的标准 Galerkin 型将式(1)所示的高阶 PDE 系统模型转化为式(3)所示的二阶非线性 ODE 形式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} + \mathbf{F}N(t) = \mathbf{0} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 + \tilde{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{C}}^T \\ \bar{\mathbf{C}} & \sigma \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} -k\phi_{rd} \\ k \end{bmatrix}, N(t) = (\bar{y} - \phi_{rd}^T \mathbf{q})^3, \mathbf{M}_0 = \delta_r, \mathbf{C}_0 = \alpha\lambda_r^4 \delta_r + 2\sqrt{\beta} v \mathbf{b}_r \\ \mathbf{K}_0 &= \lambda_r^4 \delta_r + v^2 \mathbf{c}_r, \tilde{\mathbf{C}} = \sigma \phi_{rd} \phi_{rd}^T, \bar{\mathbf{C}} = -\sigma \phi_{rd}^T \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)中， $\bar{y}$ 表示 NES 的位移， $\mathbf{R}^{n+1}$ 表示 $n+1$ 维空间， ε 表示 NES 的结构质量与管本身和管内液体质量之和的比值， σ 表示 NES 的无量纲阻尼， k 表示 NES

的无量纲刚度, t 表示无量纲时间变量, α 为输流管本身的无量纲黏弹性系数, β 表示管内液体的质量与管本身和管内液体质量之和的比值, v 表示管内液体的无量纲流速; $\lambda_r = r\pi, r=1, \dots, n$; $\boldsymbol{\phi}_r$ 、 $\boldsymbol{\phi}_{rd}$ 为式(2)中特征函数组成的向量; $\mathbf{q}$ 为式(2)中广义坐标组成的向量; $\boldsymbol{\delta}_r$ 、 $\mathbf{b}_r$ 、 $\mathbf{c}_r$ 分别是 $\boldsymbol{\phi}_r$ 与 $\boldsymbol{\phi}_r$ 、 $\boldsymbol{\phi}_r$ 与 $\boldsymbol{\phi}_r'$ 、 $\boldsymbol{\phi}_r$ 与 $\boldsymbol{\phi}_r''$ 的 Kronecker 积, 具体形式为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_r &= [\phi_1(x) \cdots \phi_n(x)]^T, \boldsymbol{\phi}_{rd} = [\phi_r(d) \cdots \phi_n(d)]^T, \mathbf{q} = [q_1(t) \cdots q_n(t)]^T \\ \boldsymbol{\delta}_r &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1(x) \phi_1(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1(x) \phi_n(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n(x) \phi_1(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_n(x) \phi_n(x) dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \mathbf{b}_r &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r'^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1(x) \phi_1'(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1(x) \phi_n'(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n(x) \phi_1'(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_n(x) \phi_n'(x) dx \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_r &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r'' dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1(x) \phi_1''(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1(x) \phi_n''(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n(x) \phi_1''(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_n(x) \phi_n''(x) dx \end{bmatrix} = -\frac{\pi^2}{2} \text{diag}(1^2, \dots, r^2)\end{aligned}\quad (5)$$

步骤 3: 模型的二次型化

基于式(3)所示的输流管-非线性能量阱系统模型的特性, 建立输流管-非线性能量阱系统的势能函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 如下:

$$\Phi(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{KZ}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{k}{4} (\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^4 \quad (6)$$

其中, $\langle \mathbf{KZ}, \mathbf{Z} \rangle$ 表示向量 $\mathbf{KZ}$ 与 $\mathbf{Z}$ 的欧式内积; 根据式(6)易得 $\Phi(\mathbf{Z})$ 是一个凸函数, 式(3)所示的系统模型可以写成如下形式:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \nabla\Phi(\mathbf{Z}) = \mathbf{0} \quad (7)$$

其中, $\nabla\Phi(\mathbf{Z})$ 表示凸函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 的梯度。

步骤 4: 全局稳定性分析

基于式(7)，定义式(3)所示系统模型的能量泛函 $E(t)$ 和扰动泛函 $W(t)$ 如下：

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \Phi(\mathbf{Z}) \quad (8)$$

$$W(t) = \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{C}\mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \quad (9)$$

基于定义的能量泛函和扰动泛函，定义如下 Lyapunov 函数：

$$V_L(t) = E(t) + \frac{1}{G} W(t) \quad (10)$$

其中， G 表示扰动泛函对 Lyapunov 函数的影响系数，且 $G > \max\left\{\frac{m_1}{\lambda_0}, \frac{3}{2}\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}\right\}$ ， m_1 为矩阵 $\mathbf{M}$ 的最大特征值， λ_0 为矩阵 $\mathbf{C}$ 的最小特征值， $\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}$ 是矩阵 $\mathbf{M}$ 和矩阵 $\mathbf{C}$ 的逆矩阵的乘积的最大特征值。

进而，利用泛函分析得到 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 满足如下指数稳定性判定条件：

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}\right) E(t) \leq V_L(t) \leq a_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (11)$$

其中， $a_0 = V_L(0)$ 。

考虑到 $G > \max\left\{\frac{m_1}{\lambda_0}, \frac{3}{2}\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}\right\}$ ，则 $0 < 1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0} < 1$ ，结合式(11)得到能量泛函 $E(t)$ 满足如下关系：

$$0 \leq E(t) \leq b_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (14)$$

其中， $b_0 = \frac{a_0}{1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}}$ ；至此，得到 $E(t)$ 的指数稳定判定条件：

结合式(14)、(5)和(4)，得到式(3)所示的输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性为指数稳定。

本发明的有益效果：

1) 基于 Galerkin 方法，本发明首次建立输流管-NES 系统的包含凸函数梯度

信息的二次型模型，其中该凸函数是在系统特性的基础上首次被提出和证明的；

2)基于二次型模型，分析证明该输流管-NES 系统是指数稳定的，并给出了其严格的分析过程；

3)本发明从稳定性的角度更为全面地说明了 NES 对于管道振动控制的有效性，而不再仅仅局限于一般的通过管道截面上响应的对比。

附图说明

图 1 是输流管-非线性能量阱系统结构简图。

图 2 是不同流速下输流管-非线性能量阱系统的能量函数、Lyapunov 函数及相应的指数函数；(a)至(c)依次对应的输流管内无量纲液体流速 v 为 1.0、2.0、3.0。其中输流管-非线性能量阱系统参数为 $\alpha=0.001, \beta=0.8, \varepsilon=0.1, \sigma=0.1, k=8000, d=0.5, X=0.3$ 。

图 3 是不同流速下，在无控制和非线性能量阱作为控制器时输流管上若干截面（即 x 分别为 0.2、0.5、0.8）的响应对比结果，(a)至(c)依次对应的输流管内无量纲液体流速 v 为 1.0、2.0、3.0。其中，图 3 中虚线表示无控制时输流管的响应；实线为 NES 作为控制器时输流管的位移响应，振动控制器参数设置为 $\alpha=0.001, \beta=0.8, \varepsilon=0.1, \sigma=0.1, k=8000, X=0.3$ 。

具体实施方式

以下结合附图和全局稳定性的证明推导过程，详细说明本发明的具体实施方式。

本实施例的具体过程是针对图 1 所示输流管-非线性能量阱系统的稳定性分析及仿真验证过程中进行的，详细设计步骤如下：

步骤 1：建立输流管-非线性能量阱的数学模型，其物理结构如图 1 所示，两端简支的输流管长度为 L ，输流管的抗弯刚度为 EI ，质量为 m_p ，黏弹性系数

为 λ 。作为振动控制器的非线性能量阱安装在距离输流管左端点距离为 D 的位置，非线性能量阱用来吸收由于流体进入管道时产生的振动能量，其结构由阻尼、非线性弹簧及质量块组成。在不考虑重力、内部阻尼、外部施加张力以及增压效果的情况下，则输流管-非线性能量阱系统的运动方程为如下形式：

$$\begin{aligned}
 & EI \frac{\partial^4 Y(X,T)}{\partial X^4} + \lambda EI \frac{\partial^5 Y(X,T)}{\partial X^4 \partial T} + M_f V^2 \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X^3} \\
 & + M_f V \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X \partial T} + (M_f + m_p) \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial T^2} \\
 & + \left\{ K[Y(D,T) - \bar{Y}(T)]^3 + C \left[\frac{\partial Y(D,T)}{\partial T} - \frac{d\bar{Y}(T)}{dT} \right] \right\} \delta(X-D) = 0 \\
 & m_{NES} \frac{d^2 \bar{Y}(T)}{dT^2} + K[\bar{Y}(T) - Y(D,T)]^3 + C \left[\frac{d\bar{Y}(T)}{dT} - \frac{\partial Y(D,T)}{\partial T} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $Y(X,T)$ 是输流管的纵向位移，相应地， $\bar{Y}(T)$ 是非线性能量阱的纵向位移， M_f 是输流管内流体的质量， m_{NES} 表示NES的结构质量。 V 表示管内流体的流速。 D 表示的是平行非线性能量阱系统的安装位置。而 K 表示NES的非线性（立方非线性）刚度； C 表示非线性能量阱的阻尼。

在方程组（1）的第一个方程中，其第一项表示弯曲恢复力；第二项表示输流管的黏弹性；第三项表示由液体流动产生的离心力；第四项表示Coriolis效应；第五项表示当液体充满管道时，管道和液体的惯性力；剩下的两项表示输流管和振动控制器之间的耦合。

需要指出的是，与充满液体的输流管系统的质量相比，非线性能量阱是一个轻质量的系统，如下所示：

$$\frac{m_{NES}}{M_f + m_p} = \varepsilon \ll 1 \tag{2}$$

其中， ε 为远小于1的参数。

为了使输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性分析及后面的数值验证具有

较好的一般性，式(1)所示的系统需要转换成无量纲形式，无量纲化过程如下：

$$\begin{aligned} y = \frac{Y}{L}, x = \frac{X}{L}, \bar{y} = \frac{\bar{Y}}{L}, d = \frac{D}{L}, k = \frac{KL^6}{EI}, v = VL\sqrt{\frac{M_f}{EI}}, t = \frac{T}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{M_f + m_p}} \\ \alpha = \frac{\lambda}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{M_f + m_p}}, \beta = \frac{M_f}{M_f + m_p}, \varepsilon = \frac{m_{NES}}{M_f + m_p}, \sigma = \frac{CL^2}{\sqrt{EI(M_f + m_p)}} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中， L 表示输流管的长度， x 表示输流管的长度自变量 X 的无量纲形式， y 是输流管纵向位移 $Y(X, T)$ 的无量纲形式， $\bar{y}$ 是非线性能量阱纵向位移 $\bar{Y}(T)$ 的无量纲形式， d 表示无量纲化的非线性能量阱的安装位置， k 为非线性能量阱的无量纲非线性刚度， v 表示输流管内液体的无量纲流速， t 表示无量纲时间变量， α 表示输流管的无量纲黏弹性系数， β 表示输流管管内液体质量与输流管质量和液体质量之和的比值， σ 表示非线性能量阱的无量纲阻尼。

将式(3)代入方程组(1)，得到方程组(1)的无量纲形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 y(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \\ + \left\{ k[y(d, t) - \bar{y}(t)]^3 + \sigma \left[\frac{\partial y(d, t)}{\partial t} - \frac{d\bar{y}(t)}{dt} \right] \right\} \delta(x - d) = 0 \\ \varepsilon \frac{d^2 \bar{y}(t)}{dt^2} + k[\bar{y}(t) - y(d, t)]^3 + \sigma \left[\frac{d\bar{y}(t)}{dt} - \frac{\partial y(d, t)}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

步骤 2：通过利用标准 Galerkin 型项，将式(4)所表示的输流管-振动控制器系统的高阶 PDE 模型近似的转换为一个更加容易处理的有限维的动力学系统。因此，系统的位移可以被扩展成如下形式：

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^n \phi_r(x) q_r(t) \quad (5)$$

其中， $\phi_r(x)$ 是输流管在无阻尼自由振动情况下的特征函数， $q_r(t)$ 是离散系统的广义坐标， n 是 Galerkin 离散项数。考虑到输流管是两端简支结构，因此选择特征函数

$$\phi_r(x) = \sin(\lambda_r x), \lambda_r = r\pi, r = 1, \dots, n \quad (6)$$

即 $\phi_r'''(x) = \lambda_r^4 \phi_r(x)$ 。

将方程(5)代入方程组(4)中, 得到如下形式方程组:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n [\lambda_r^4 \phi_r(x) q_r(t) + \alpha \lambda_r^4 \phi_r(x) \dot{q}_r(t) + v^2 \phi_r''(x) q_r(t) + 2\sqrt{\beta} v \phi_r'(x) \dot{q}_r(t) + \phi_r(x) \ddot{q}_r(t)] \\ & + \left\{ k \left[\sum_{r=1}^n \phi_r(d) q_r(t) - \bar{y}(t) \right]^3 + \sigma \left[\sum_{r=1}^n \phi_r(d) \dot{q}_r(t) - \dot{\bar{y}}(t) \right] \right\} \delta(x-d) = 0 \quad (7) \\ & \varepsilon \ddot{\bar{y}}(t) + k \left[\bar{y}(t) - \sum_{r=1}^n \phi_r(d) q_r(t) \right]^3 + \sigma \left[\dot{\bar{y}}(t) - \sum_{r=1}^n \phi_r(d) \dot{q}_r(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

为了简化和方便后续推导过程, 定义如下向量:

$$\boldsymbol{\phi}_r = [\phi_1(x) \cdots \phi_n(x)]^T, \boldsymbol{\phi}_{rd} = [\phi_1(d) \cdots \phi_n(d)]^T, \mathbf{q} = [q_1(t) \cdots q_n(t)]^T \quad (8)$$

则方程组(7)可以写成如下向量形式:

$$\begin{aligned} & \lambda_r^4 \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{q} + \alpha \lambda_r^4 \boldsymbol{\phi}_r^T \dot{\mathbf{q}} + v^2 \boldsymbol{\phi}_r''^T \mathbf{q} + 2\sqrt{\beta} v \boldsymbol{\phi}_r'^T \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi}_r^T \ddot{\mathbf{q}} \\ & + \left[k(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^3 + \sigma(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \dot{\mathbf{q}} - \dot{\bar{y}}) \right] \delta(x-d) = 0 \quad (9) \\ & \varepsilon \ddot{\bar{y}} + k(\bar{y} - \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q})^3 + \sigma(\dot{\bar{y}} - \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \dot{\mathbf{q}}) = 0 \end{aligned}$$

联合方程组(9)中的相似项, 可以得到如下形式

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\phi}_r^T \ddot{\mathbf{q}} + [\alpha \lambda_r^4 \boldsymbol{\phi}_r^T + 2\sqrt{\beta} v \boldsymbol{\phi}_r'^T] \dot{\mathbf{q}} + [\lambda_r^4 \boldsymbol{\phi}_r^T + v^2 \boldsymbol{\phi}_r''^T] \mathbf{q} \\ & + \left[k(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^3 + \sigma(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \dot{\mathbf{q}} - \dot{\bar{y}}) \right] \delta(x-d) = 0 \quad (10) \\ & \varepsilon \ddot{\bar{y}} + \sigma(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \dot{\mathbf{q}} - \dot{\bar{y}}) + k(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^3 = 0 \end{aligned}$$

方程组(10)中的第一个方程乘以 $\boldsymbol{\phi}_r$ 并在 $[0, 1]$ 内积分, 可得如下方程

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\delta}_r \ddot{\mathbf{q}} + [\alpha \lambda_r^4 \boldsymbol{\delta}_r + 2\sqrt{\beta} v \mathbf{b}_r] \dot{\mathbf{q}} + [\lambda_r^4 \boldsymbol{\delta}_r + v^2 \mathbf{c}_r] \mathbf{q} \\ & + \left[k(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^3 + \sigma(\boldsymbol{\phi}_{rd}^T \dot{\mathbf{q}} - \dot{\bar{y}}) \right] \boldsymbol{\phi}_{rd} = 0 \quad (11) \\ & \varepsilon \ddot{\bar{y}} + \sigma \dot{\bar{y}} - \sigma \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \dot{\mathbf{q}} + k(\bar{y} - \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q})^3 = 0 \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}_r$ 、 $\mathbf{b}_r$ 、 $\mathbf{c}_r$ 分别是 $\boldsymbol{\phi}_r$ 与 $\boldsymbol{\phi}_r$ 、 $\boldsymbol{\phi}_r$ 与 $\boldsymbol{\phi}_r'$ 、 $\boldsymbol{\phi}_r$ 与 $\boldsymbol{\phi}_r''$ 的 Kronecker 积, 其具体形式如下

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_r &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1(x) \phi_1(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1(x) \phi_n(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n(x) \phi_1(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_n(x) \phi_n(x) dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \\
\mathbf{b}_r &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r'^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1(x) \phi_1'(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1(x) \phi_n'(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n(x) \phi_1'(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_n(x) \phi_n'(x) dx \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}_r &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r'' dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_1(x) \phi_1''(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_1(x) \phi_n''(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n(x) \phi_1''(x) dx & \cdots & \int_0^1 \phi_n(x) \phi_n''(x) dx \end{bmatrix} = -\frac{\pi^2}{2} \text{diag}(1^2, \dots, r^2)
\end{aligned} \tag{12}$$

$\mathbf{I}$ 是单位阵，基于式(6)可以推导出 Kronecker 积 $\boldsymbol{\delta}_r$ 的具体形式为：

$$\int_0^1 \phi_r(x) \phi_r(x) dx = \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{2}, & i = j \end{cases}$$

因此可得 $\boldsymbol{\delta}_r = \frac{1}{2} \mathbf{I}$ 。同样地，可以推导出 Kronecker 积 $\mathbf{b}_r$ 的具体形式为：

$$\int_0^1 \phi_r(x) \phi_r'(x) dx = \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin'(j\pi x) dx = \begin{cases} \frac{2ij}{i^2 - j^2}, & i + j = 2\mu - 1 \\ 0, & i + j = 2\mu \end{cases}$$

其中 $\mu \in (1, 2, \dots, r)$ ，因此可以得到是一个反对称矩阵。相似地，可以得到

Kronecker 积 $\mathbf{c}_r$ 为对角阵，其形式为 $\mathbf{c}_r = -\frac{\pi^2}{2} \text{diag}(1^2, 2^2, \dots, r^2)$ 。

方程组 (11) 可以进一步地合并为向量积的形式

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta}_r \ddot{\mathbf{q}} + [\alpha \lambda_r^4 \boldsymbol{\delta}_r + 2\sqrt{\beta} v \mathbf{b}_r + \sigma \boldsymbol{\phi}_{rd} \boldsymbol{\phi}_{rd}^T - \sigma \boldsymbol{\phi}_{rd}] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} \\
&\quad + [\lambda_r^4 \boldsymbol{\delta}_r + v^2 \mathbf{c}_r] \mathbf{q} - k \boldsymbol{\phi}_{rd} (\bar{y} - \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q})^3 = 0 \\
&\varepsilon \ddot{\bar{y}} + [-\sigma \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \quad \sigma] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} + k (\bar{y} - \boldsymbol{\phi}_{rd}^T \mathbf{q})^3 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

至此, 将式(4)表示的输流管-NES 的四阶偏微分转化为如下二阶非线性常微分形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} + \mathbf{F}N(t) = \mathbf{0} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 + \tilde{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{C}}^T \\ \bar{\mathbf{C}} & \sigma \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} -k\phi_{rd} \\ k \end{bmatrix}, N(t) = (\bar{y} - \phi_{rd}^T \mathbf{q})^3, \mathbf{M}_0 = \delta_r, \mathbf{C}_0 = \alpha\lambda_r^4 \delta_r + 2\sqrt{\beta}v\mathbf{b}_r \\ \mathbf{K}_0 &= \lambda_r^4 \delta_r + v^2 \mathbf{c}_r, \tilde{\mathbf{C}} = \sigma\phi_{rd}\phi_{rd}^T, \bar{\mathbf{C}} = -\sigma\phi_{rd}^T \end{aligned} \quad (15)$$

步骤 3: 模型的二次型化

定义输流管-非线性能量阱系统的势能函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 如下:

$$\Phi(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}\mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{k}{4} (\phi_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^4 \quad (16)$$

其中 $\langle \mathbf{K}\mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle$ 表示向量 $\mathbf{K}\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Z}$ 的欧式内积。

根据式(16)容易推导出 $\Phi(\mathbf{Z})$ 的梯度 $\nabla\Phi(\mathbf{Z})$ 为

$$\nabla\Phi(\mathbf{Z}) = \mathbf{K}\mathbf{Z} + (\phi_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^3 [k\phi_{rd} \quad -k]^T \quad (17)$$

那么 $\Phi(\mathbf{Z})$ 的海森矩阵 $\nabla^2\Phi(\mathbf{Z})$ 如下

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi(\mathbf{Z}) &= \mathbf{K} + (\phi_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^2 [k\phi_{rd} \quad -k]^T [3\phi_{rd}^T \quad -3] \\ &= \mathbf{K} + 3k(\phi_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^2 \begin{bmatrix} \phi_{rd}^T \phi_{rd} & -\phi_{rd}^T \\ -\phi_{rd} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $k > 0$ 是非线性能量阱的无量纲刚度。由式(15)可知 $\mathbf{K}$ 是一个半正定矩阵;

由式(6)可知 $\phi_r(d) = \sin(r\pi d)$, 容易得到式(18)中矩阵 $\begin{bmatrix} \phi_{rd}^T \phi_{rd} & -\phi_{rd}^T \\ -\phi_{rd} & 1 \end{bmatrix}$ 的所有

特征值都大于等于 0, 即 $\begin{bmatrix} \phi_{rd}^T \phi_{rd} & -\phi_{rd}^T \\ -\phi_{rd} & 1 \end{bmatrix}$ 也是一个半正定矩阵。因此海森矩阵

$\nabla^2\Phi(\mathbf{Z})$ 是一个半正定矩阵, 这说明了 $\Phi(\mathbf{Z})$ 是一个凸函数。

接下来，基于凸函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 及其梯度特性，式（14）可进一步转化为包含凸函数梯度信息的形式，即

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \nabla\Phi(\mathbf{Z}) = 0 \quad (19)$$

步骤 4：全局稳定性分析

基于式(19)，定义输流管-NES 系统的能量泛函 $E(t)$ 及扰动泛函 $W(t)$ 如下：

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \Phi(\mathbf{Z}) \quad (20)$$

$$W(t) = \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{C}\mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \quad (21)$$

由式(15)可知， $\mathbf{M}$ 是一个正定矩阵， $\mathbf{K}$ 是一个半正定矩阵。需要注意的是，矩阵 $\mathbf{C}$ 并不是完全对称的，它是由矩阵 $\mathbf{C}_0$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 以及常数 σ 增广而来，其中 $\tilde{\mathbf{C}}$ 为对称阵。由式(15)可知， $\mathbf{C}_0$ 是矩阵 δ_r 和 $\mathbf{b}_r$ 的线性组合。回顾式(12)， δ_r 是一个对角阵， $\mathbf{b}_r$ 是一个反对称阵。由于反对称阵的二次型为 0，所以不等式 $\langle \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \geq \lambda_c^{min} \|\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2$ 成立，说明可以认为矩阵 $\mathbf{C}$ 是一个对称矩阵。

接下来需要对扰动泛函 $W(t)$ 进行必要的处理。根据式(21)，得到如下关系

$$W(t) \geq \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{1}{2} \lambda_0 \|\mathbf{Z}\|_2^2 \quad (22)$$

其中 λ_0 是矩阵 $\mathbf{C}$ 的最小特征值。

应用 Young 不等式

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \geq -\frac{1}{2\theta} \|\mathbf{Z}\|_2^2 - \frac{\theta}{2} \|\mathbf{Y}\|_2^2$$

其中 $\theta = \lambda_0$ 。则不等式(22)可以转换成如下形式：

$$W(t) \geq -\frac{1}{2\lambda_0} \|\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 - \frac{1}{2} \lambda_0 \|\mathbf{Z}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_0 \|\mathbf{Z}\|_2^2 = -\frac{1}{2\lambda_0} \|\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 \geq -\frac{m_1}{2\lambda_0} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \quad (23)$$

m_1 为式(15)中给出的矩阵 $\mathbf{M}$ 的最大特征值，因此式(23)的最后一项成立。

基于凸函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 与能量泛函 $E(t)$ 的定义, 容易得到 $\Phi(\mathbf{Z}) \geq 0$, 这意味着 $E(t) \geq \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle$ 。结合不等式(23)则可以得到

$$W(t) \geq -\frac{m_1}{\lambda_0} E(t) \quad (24)$$

对于式(20)所示的系统的能量函数, 可以推导出如下形式:

$$\dot{E}(t) = \langle \dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{Z}}, \nabla \Phi(\mathbf{Z}) \rangle = \langle \dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \nabla \Phi(\mathbf{Z}) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} \rangle \leq -\lambda_0 \|\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 \quad (25)$$

那么对于(21)所示的系统的扰动函数, 也可以得到其导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle \\ &= \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \langle \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle \\ &= \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

将式(19)代入式(26), 得

$$\dot{W}(t) = -\langle \nabla \Phi(\mathbf{Z}), \mathbf{Z} \rangle + \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \quad (27)$$

考虑到 $\Phi(\mathbf{Z})$ 是一个凸函数, 对于 $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{n+1}$, 得到如下不等式

$$\langle \nabla \Phi(\mathbf{Z}), \mathbf{Z} \rangle \geq \Phi(\mathbf{Z}) \quad (28)$$

因此, 结合式(27)和式(28), 得到如下不等式

$$\dot{W}(t) \leq -\Phi(\mathbf{Z}) + \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \quad (29)$$

将不等式(29)加到式(20), 得如下关系

$$\begin{aligned} E(t) + \dot{W}(t) &\leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \Phi(\mathbf{Z}) - \Phi(\mathbf{Z}) + \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \\ &= \frac{3}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle = \frac{3}{2} \mathbf{M}\mathbf{C}^{-1} \langle \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\mathbf{C}^{-1}$ 为矩阵 $\mathbf{C}$ 的逆矩阵。令 $G > \frac{3}{2} \lambda_{\mathbf{M}\mathbf{C}^{-1}}^{\max}$, 并且将式(24)代入(29)可得

$$E(t) + \dot{W}(t) \leq -GE(t) \quad (31)$$

即

$$E(t) + G\dot{E}(t) + \dot{W}(t) \leq 0 \quad (32)$$

对于任意 $\theta > 0$ ，存在 Young 不等式

$$-\frac{1}{2\theta} \|\mathbf{X}\|_2^2 - \frac{\theta}{2} \|\mathbf{Y}\|_2^2 \leq \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \leq \frac{1}{2\theta} \|\mathbf{X}\|_2^2 + \frac{\theta}{2} \|\mathbf{Y}\|_2^2 \quad (33)$$

那么式(21)满足如下不等式关系

$$W(t) \leq \frac{\|\mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2}{2\theta} + \frac{\theta}{2} \|\mathbf{Z}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{C}}^{max} \|\mathbf{Z}\|_2^2 \quad (34)$$

其中 $\lambda_{\mathbf{C}}^{max}$ 是矩阵 $\mathbf{C}$ 的最大特征值。考虑到二次型的性质，不等式(34)可以被推导为如下形式

$$\begin{aligned} W(t) &\leq \frac{1}{2\theta} \|\mathbf{M}\|_2^2 \|\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 + \frac{1}{2} (\theta + \lambda_{\mathbf{C}}^{max}) \|\mathbf{Z}\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2\theta} (\lambda_{\mathbf{M}}^{max})^2 \|\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 + \frac{1}{2} (\theta + \lambda_{\mathbf{C}}^{max}) \|\mathbf{Z}\|_2^2 \end{aligned} \quad (35)$$

其中， $\lambda_{\mathbf{M}}^{max}$ 为矩阵 $\mathbf{M}$ 的最大特征值。

从凸函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 的定义，易得 $\Phi(\mathbf{Z})$ 的最后一项大于等于 0，即

$$\frac{k}{4} (\phi_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^4 \geq 0 \quad (36)$$

那么容易得到

$$\Phi(\mathbf{Z}) \geq \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{K}}^{min} \|\mathbf{Z}\|_2^2 \quad (37)$$

其中 $\lambda_{\mathbf{K}}^{min}$ 是式(14)所表示系统的刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 的最小特征值。因此，系统的能量泛函满足如下不等式

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{M}}^{min} \|\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{K}}^{min} \|\mathbf{Z}\|_2^2 \quad (38)$$

上式两边同乘以一个正实数 P 后依然成立

$$PE(t) \geq \frac{1}{2} P \lambda_{\mathbf{M}}^{\min} \|\dot{\mathbf{Z}}\|_2^2 + \frac{1}{2} P \lambda_{\mathbf{K}}^{\min} \|\mathbf{Z}\|_2^2 \quad (39)$$

则存在正实数 P 可以使如下不等式成立

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P \lambda_{\mathbf{M}}^{\min} &\geq \frac{1}{2\theta} (\lambda_{\mathbf{M}}^{\max})^2 \\ \frac{1}{2} P \lambda_{\mathbf{K}}^{\min} &\geq \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{C}}^{\max} \end{aligned} \quad (40)$$

那么, 结合不等式(35)、(39)和(40)可以得到

$$W(t) \leq PE(t) \quad (41)$$

不等式(32)的第一项可以进一步地被分解为如下形式

$$(1-s)E(t) + sE(t) + G\dot{E}(t) + \dot{W}(t) \leq 0 \quad (42)$$

其中 $s \in [0, 1]$ 。将不等式(41)代入不等式(42)可得

$$(1-s)E(t) + \frac{s}{P}W(t) + G\dot{E}(t) + \dot{W}(t) \leq 0 \quad (43)$$

其可以进一步地被因式分解为如下形式

$$\left(1-s-\frac{Gs}{P}\right)E(t) + \frac{Gs}{P}\left[E(t) + \frac{1}{G}W(t)\right] + G\left[\dot{E}(t) + \frac{1}{G}\dot{W}(t)\right] \leq 0 \quad (44)$$

如果 s 足够小, 那么不等式(44)的第一项的系数大于 0, 即 $1-s-\frac{Gs}{P} > 0$ 。从

式(20)表示的能量泛函的定义可知 $E(t) \geq 0$ 。因此不等式(44)可进一步被转换为如下形式

$$\frac{Gs}{P}\left[E(t) + \frac{1}{G}W(t)\right] + G\left[\dot{E}(t) + \frac{1}{G}\dot{W}(t)\right] \leq 0 \quad (45)$$

定义 Lyapunov 函数: $V_L(t) = E(t) + \frac{1}{G}W(t)$, 并将其代入不等式(45),

可得

$$V_L(t) \leq a_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (46)$$

其中 $a_0 = V_L(0)$ 。利用不等式(24)可以得到 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 满足

$$V_L(t) = E(t) + \frac{1}{G}W(t) \geq \left(1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}\right) E(t) \quad (47)$$

注意到 $G > \max\left\{\frac{m_1}{\lambda_0}, \frac{3}{2}\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}\right\}$, 可以得到 $0 < 1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0} < 1$ 。并且从式(20)表示的能量泛函和扰动泛函的定义容易得到 $E(t) \geq 0$ 。因此易得不等式(47)满足如下关系

$$V_L(t) \geq \left(1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}\right) E(t) \geq 0 \quad (48)$$

结合不等式(46)和(48), 可以获得 Lyapunov 稳定性理论框架下的指数稳定判据

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}\right) E(t) \leq V_L(t) \leq a_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (49)$$

从上式可以得到系统(14)的能量 $E(t)$ 满足如下关系

$$0 \leq E(t) \leq b_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (50)$$

$$\text{其中 } b_0 = \frac{a_0}{1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}}。$$

上述不等式(50)即为式(14)所示系统的振动能量 $E(t)$ 在 Lyapunov 稳定性理论下的指数稳定判定条件。

Galerkin 方法表明, 对于方程(5), 可以通过增加逼近项和合适的特征函数可以获得足够精确的解。那么, 式(14)表示的系统的振动能量 $E(t)$ 等于式(4)表示的原系统的振动能量, 所以振动能量同样满足指数稳定判定条件(50), 即可以认为式(4)表示的原系统为指数稳定。

步骤 5: 仿真验证

在这一步里，以图 1 所示输流管-非线性能量阱系统为例来验证步骤 4 的理论结果。并通过对比有无非线性能量阱时输流管的位移响应情况，来对非线性能量阱的振动控制效果进行说明。基于式(4)，将图 1 所标示的输流管-非线性能量阱系统的参数设置如下为 $\alpha=0.001, \beta=0.8, \varepsilon=0.1, \sigma=0.1, d=0.5$, $k=8000$ ，并且输流管两端简支表明其边界条件如下：

$$y(0,t) = \dot{y}(0,t) = y(1,t) = \dot{y}(1,t) = 0$$

然后通过仿真不同无量纲流速 v 情况下，输流管-非线性能量阱系统的能量量函数 $E(t)$ ，Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 以及输流管的位移响应 $y(x,t)$ 来验证步骤 4 的理论结果并说明非线性能量阱的振动控制效果。

然而，由于式(4)所表示的系统是一个高阶偏微分动力学系统，其瞬态动力学的解析解是非常难以求解的，只能通过数值方法来近似求解。为了获得高精度的近似解，式(4)所表示的系统的 Galerkin 过程中必须以至少两阶近似项来对输流管的位移函数 $y(x,t)$ 截断。为了获得更好的数值收敛性，以及降低仿真过程的难度和减少仿真过程所用时间，选取并确定 $n=2$ 。为了激活振荡，系统的初始条件设置为

$$\dot{q}_1(0) = X, \quad q_1(0) = \dot{q}_2(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{\bar{y}}(0) = \bar{y}(0) = 0。$$

其中 X 为常数。

图 2 中(a)为无量纲流速 $v=1.0$ ，仿真激励 $X=0.3$ 的情况下，输流管-非线性能量阱系统的能量函数 $E(t)$ 及 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 的仿真结果，图中能量函数 $E(t)$ 用实线表示，Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 用点划线表示。则根据上述结果，很容易确认一个指数函数 $0.025e^{-0.4t}$ ，使 $v=1.0$ 时式(49)成立（如图 2 中(a)的虚线、点划线及实线的关系）。图 2 中(b)是无量纲流速 $v=2.0$ 时，能量函数 $E(t)$ 及 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 的仿真结果，则易确定一个指数函数 $0.025e^{-0.35t}$ ，使得不等

式 $0 \leq E(t) \leq V_L(t) \leq 0.025e^{-0.35t}$ 成立（如图 2 中(b)的虚线、点划线及实线的关系），即式(49)成立。当无量纲流速 $v = 3.0$ 时，仿真结果如图 2 中(c)所示，根据图 2 中(c)虚线、点划线及实线的关系，可以确定一个指数函数 $0.025e^{-0.11t}$ 使得能量函数 $E(t)$ 和 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 满足式(49)所示关系。上述结果验证了步骤 4 给出的结果，也就是式(14)所表示的系统是指数稳定的。进一步地考虑到 Galerkin 方法的逼近特性，能够推断出式(4)所表示的原系统同样是指数稳定。进而验证了本发明所设计的全局稳定性分析方法的有效性与可行性。

为了进一步说明非线性能量阱的振动控制效果以及引入后对输流管的影响，对不同条件下输流管的位移响应进行了仿真和分析，结果如图 3 所示。图 3 中(a)~(c)分别是不同的无量纲流速下（依次对应于 $v = 1.0, 2.0, 3.0$ ），仿真激励 $X = 0.3$ 时，输流管上三个截面 $x = 0.2, 0.5, 0.8$ （对应于图中长度轴）处的位移响应情况，即 $y(0.2, t), y(0.5, t), y(0.8, t)$ 。其中虚线表示的无控制时输流管各截面的位移响应，实线表示非线性能量阱作为振动控制器时输流管的位移响应情况。对比图 3 中实线与虚线的变化情况，可以很容易的看出非线性能量阱能够很好地抑制输流管的振动，使其位移响应很快地降低到很小的范围内。

以上所述实施例仅表达本发明的实施方式，但并不能因此而理解为对本发明专利的范围的限制，应当指出，对于本领域的技术人员来说，在不脱离本发明构思的前提下，还可以做出若干变形和改进，这些均属于本发明的保护范围。

权利要求书

1. 一种分析输流管-非线性能量阱系统全局稳定性的方法，其特征在于，该方法通过建立一个势能函数，将输流管-非线性能量阱系统模型转换为一个包含梯度项的二次型模型，并基于此构建输流管-非线性能量阱系统的能量泛函和扰动泛函，进而通过能量扰动技术和泛函分析得到 Lyapunov 稳定性理论框架下输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性判据；该方法具体包括以下步骤：

步骤 1：输流管-非线性能量阱系统的建模及预处理

所述输流管的安装方式为两端简支，非线性能量阱与输流管管道相连；在不考虑重力、内部阻尼、外部张力以及增压效果的情况下，输流管-非线性能量阱系统的数学模型为：

$$\begin{aligned}
 & EI \frac{\partial^4 Y(X,T)}{\partial X^4} + \lambda EI \frac{\partial^5 Y(X,T)}{\partial X^4 \partial T} + M_f V^2 \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X^3} \\
 & + M_f V \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X \partial T} + (M_f + m_p) \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial T^2} \\
 & + \left\{ K [Y(D,T) - \bar{Y}(T)]^3 + C \left[\frac{\partial Y(D,T)}{\partial T} - \frac{d\bar{Y}(T)}{dT} \right] \right\} \delta(X-D) = 0 \\
 & m_{NES} \frac{d^2 \bar{Y}(T)}{dT^2} + K [\bar{Y}(T) - Y(D,T)]^3 + C \left[\frac{d\bar{Y}(T)}{dT} - \frac{\partial Y(D,T)}{\partial T} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $Y(X,T)$ 表示输流管的截面位移函数； EI 表示输流管的弯曲刚度； λ 表示输流管的黏弹性系数； M_f 表示输流管内流体的质量； m_p 表示输流管本身的质量； V 表示输流管内流体的流速； T 是时间变量； $\bar{Y}(T)$ 表示非线性能量阱的位移函数； m_{NES} 表示非线性能量阱的结构质量； K 表示非线性能量阱的非线性刚度； C 表示非线性能量阱的阻尼； D 表示非线性能量阱的安装位置； $\delta(X-D)$ 是狄拉克 δ 函数；

将输流管-非线性能量阱系统数学模型的参数进行如下无量纲化过程：

$$\begin{aligned}
 y = \frac{Y}{L}, x = \frac{X}{L}, \bar{y} = \frac{\bar{Y}}{L}, d = \frac{D}{L}, k = \frac{KL^6}{EI}, v = VL \sqrt{\frac{M_f}{EI}}, t = \frac{T}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M_f + m_p}} \\
 \alpha = \frac{\lambda}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M_f + m_p}}, \beta = \frac{M_f}{M_f + m_p}, \epsilon = \frac{m_{NES}}{M_f + m_p}, \sigma = \frac{CL^2}{\sqrt{EI(M_f + m_p)}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

式(2)中， L 表示输流管的长度， x 表示输流管的长度自变量 X 的无量纲形式， y 是输流管纵向位移 $Y(X,T)$ 的无量纲形式， $\bar{y}$ 是非线性能量阱纵向位移 $\bar{Y}(T)$ 的无量纲形式， d 表示无量纲化的非线性能量阱的安装位置， k 为非线性能量阱的无量纲非线性刚度， v 表示输流管

内液体的无量纲流速, t 表示无量纲时间变量, α 表示输流管的无量纲黏弹性系数, β 表示输流管内液体质量与输流管质量和液体质量之和的比值, ε 表示非线性能量阱的结构质量与输流管本身和输流管内液体质量之和的比值, σ 表示非线性能量阱的无量纲阻尼;

将式(2)代入方程组(1)中, 得到输流管-非线性能量阱系统的无量纲化数学模型:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \\ + \left\{ k[y(d,t) - \bar{y}(t)]^3 + \sigma \left[\frac{\partial y(d,t)}{\partial t} - \frac{d\bar{y}(t)}{dt} \right] \right\} \delta(x-d) = 0 \\ \varepsilon \frac{d^2 \bar{y}(t)}{dt^2} + k[\bar{y}(t) - y(d,t)]^3 + \sigma \left[\frac{d\bar{y}(t)}{dt} - \frac{\partial y(d,t)}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

步骤 2: 模型离散化

输流管-非线性能量阱系统的位移函数的标准 Galerkin 型为:

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^n \phi_r(x) q_r(t) \quad (4)$$

其中, $\phi_r(x)$ 是输流管在无阻尼自由振动情况时的第 r 个特征函数; $q_r(t)$ 是离散系统的广义坐标; n 是 Galerkin 离散项数;

将式(4)代入式(3)中, 得到式(5)所示的二阶非线性常微分方程形式:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} + \mathbf{F}N(t) = \mathbf{0} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 + \tilde{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{C}}^T \\ \bar{\mathbf{C}} & \sigma \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -k\phi_{rd} \\ k \end{bmatrix}, N(t) = (\bar{y} - \phi_{rd}^T \mathbf{q})^3, \mathbf{M}_0 = \delta_r, \mathbf{C}_0 = \alpha \lambda_r^4 \delta_r + 2\sqrt{\beta} v \mathbf{b}_r \\ \mathbf{K}_0 = \lambda_r^4 \delta_r + v^2 \mathbf{c}_r, \tilde{\mathbf{C}} = \sigma \phi_{rd} \phi_{rd}^T, \bar{\mathbf{C}} = -\sigma \phi_{rd}^T \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)中, $\mathbf{R}^{n+1}$ 表示 $n+1$ 维空间; $\lambda_r = r\pi, r=1, \dots, n$; ϕ_r 、 ϕ_{rd} 为式(4)中特征函数组成的向量; $\mathbf{q}$ 为式(4)中广义坐标组成的向量; δ_r 、 $\mathbf{b}_r$ 、 $\mathbf{c}_r$ 分别是 ϕ_r 与 ϕ_r 、 ϕ_r 与 ϕ_r' 、 ϕ_r 与 ϕ_r'' 的 Kronecker 积;

步骤 3: 模型的二次型化

基于式(5), 建立输流管-非线性能量阱系统的势能函数 $\Phi(\mathbf{Z})$, 且 $\Phi(\mathbf{Z})$ 为凸函数:

$$\Phi(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{KZ}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{k}{4} (\phi_{rd}^T \mathbf{q} - \bar{y})^4 \quad (7)$$

其中, $\langle \mathbf{KZ}, \mathbf{Z} \rangle$ 表示向量 $\mathbf{KZ}$ 和 $\mathbf{Z}$ 的欧式内积; 则将式(5)转化为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \nabla\Phi(\mathbf{Z}) = \mathbf{0} \quad (8)$$

其中, $\nabla\Phi(\mathbf{Z})$ 表示凸函数 $\Phi(\mathbf{Z})$ 的梯度;

步骤 4: 全局稳定性分析

基于式(8), 定义输流管-非线性能量阱系统的能量泛函 $E(t)$ 和扰动泛函 $W(t)$:

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \dot{\mathbf{Z}} \rangle + \Phi(\mathbf{Z}) \quad (9)$$

$$W(t) = \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{CZ}, \mathbf{Z} \rangle \quad (10)$$

基于上述能量泛函和扰动泛函, 定义 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 如下:

$$V_L(t) = E(t) + \frac{1}{G} W(t) \quad (11)$$

其中, G 表示扰动泛函对 Lyapunov 函数的影响系数, 且 $G > \max\left\{\frac{m_1}{\lambda_0}, \frac{3}{2}\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}\right\}$, m_1 为矩阵 $\mathbf{M}$ 的最大特征值, λ_0 为矩阵 $\mathbf{C}$ 的最小特征值, $\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}$ 是矩阵 $\mathbf{M}$ 和矩阵 $\mathbf{C}$ 的逆矩阵 $\mathbf{C}^{-1}$ 的乘积的最大特征值;

进而, 利用泛函分析得到 Lyapunov 函数 $V_L(t)$ 满足如下指数稳定性判定条件:

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}\right) E(t) \leq V_L(t) \leq a_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (12)$$

其中, $a_0 = V_L(0)$, s 和 P 为大于 0 的参数;

由于 $G > \max\left\{\frac{m_1}{\lambda_0}, \frac{3}{2}\lambda_{\mathbf{MC}^{-1}}^{\max}\right\}$, 则 $0 < 1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0} < 1$, 同时结合式(12)得到能量泛函 $E(t)$ 满足如下关系:

$$0 \leq E(t) \leq b_0 e^{-\frac{s}{P}t} \quad (13)$$

其中 $b_0 = \frac{a_0}{1 - \frac{1}{G} \frac{m_1}{\lambda_0}}$; 至此, 得到式(13)为 $E(t)$ 的指数稳定判定条件;

结合式(13)、(5)和(4), 得到式(3)所示的输流管-非线性能量阱系统的全局稳定性为指数稳定。

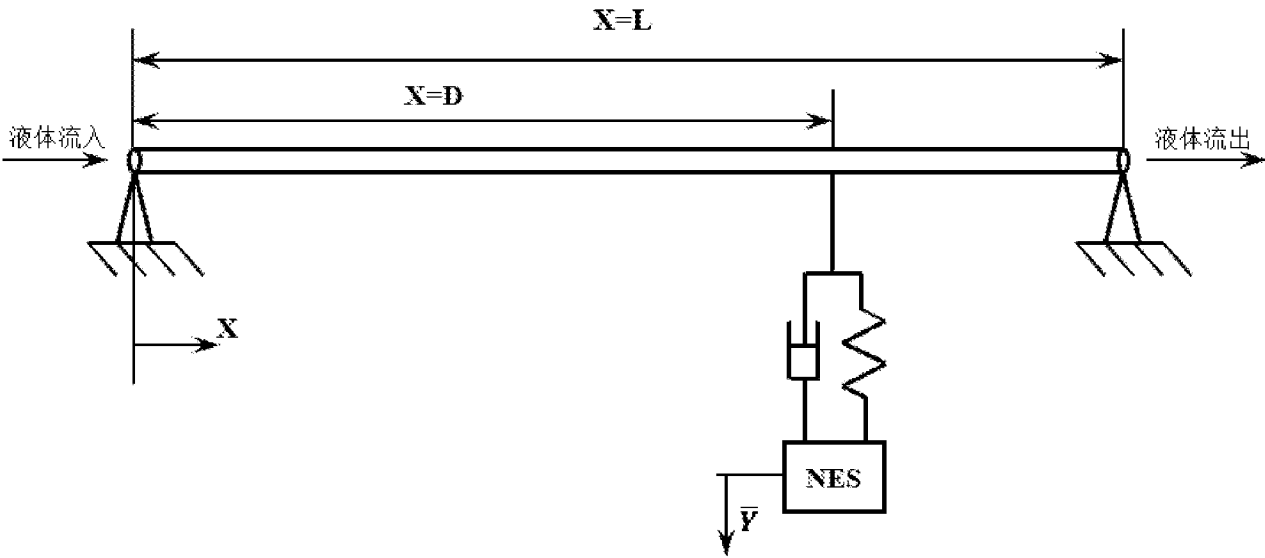
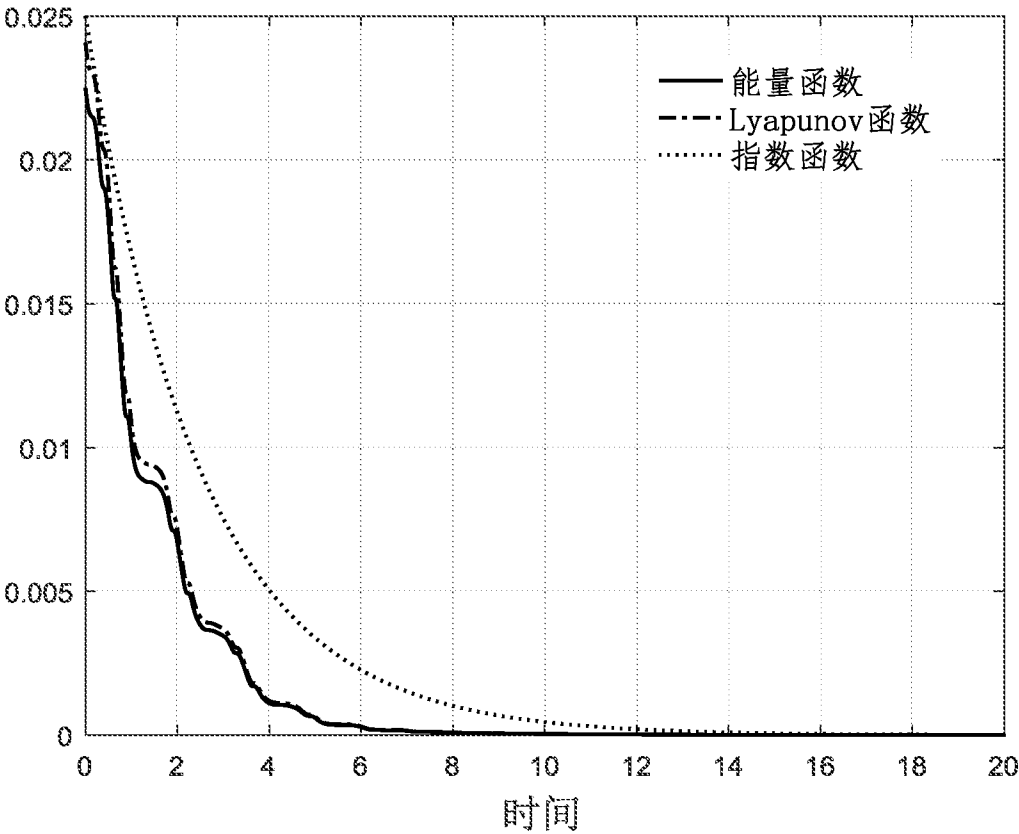
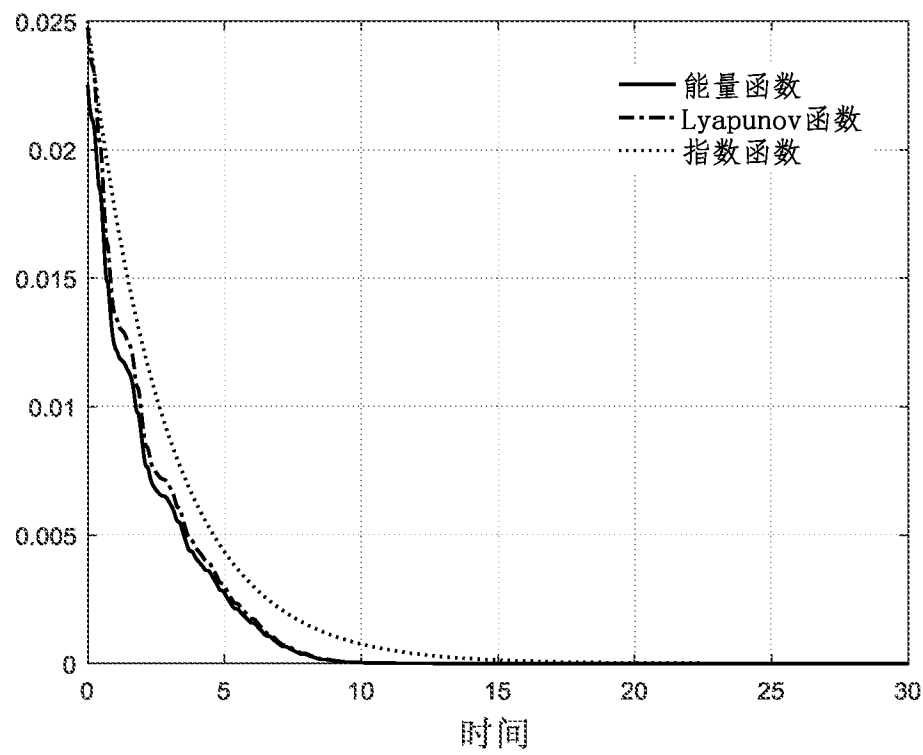


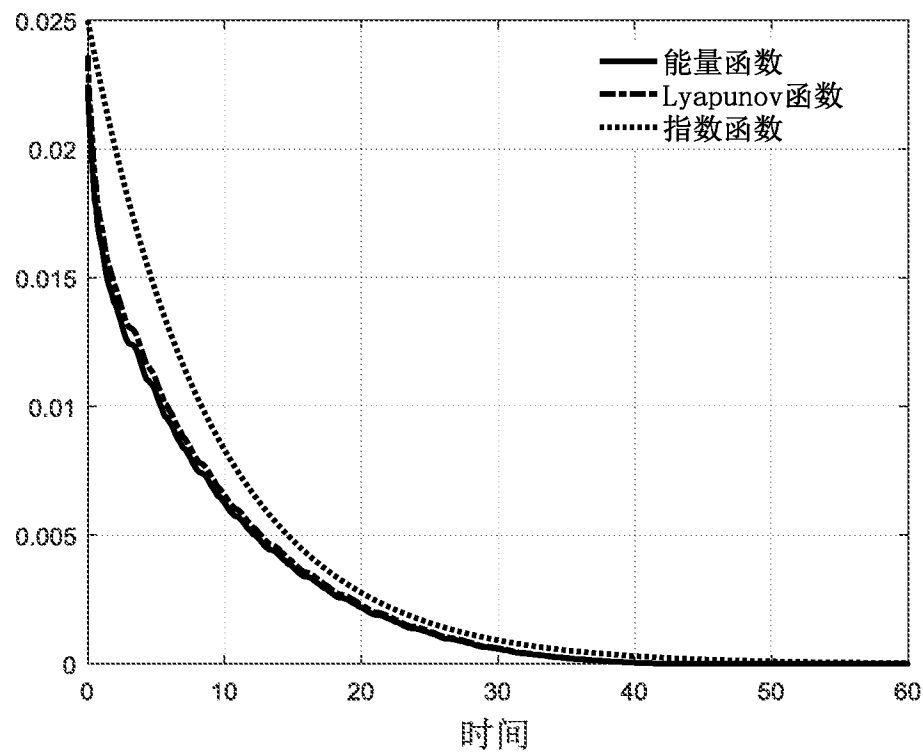
图 1



(a)

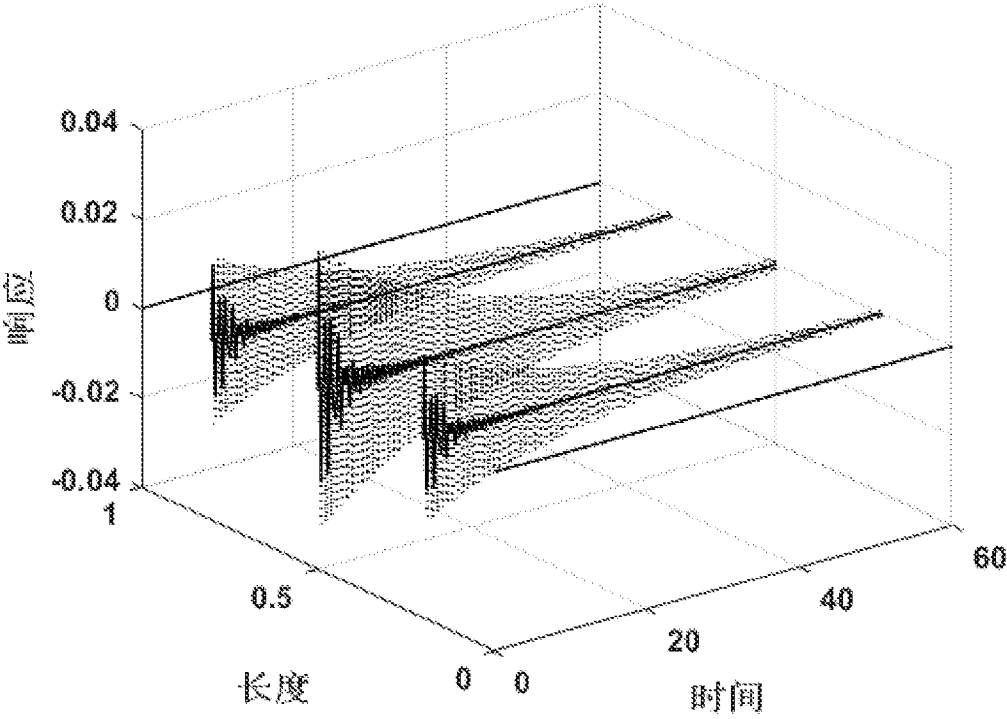


(b)

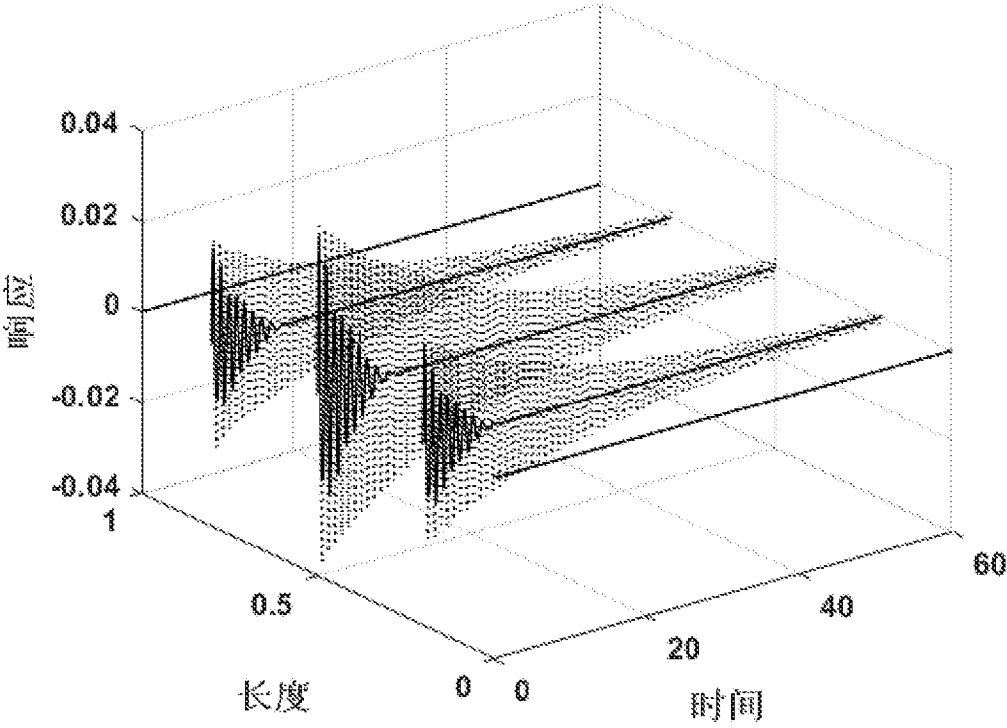


(c)

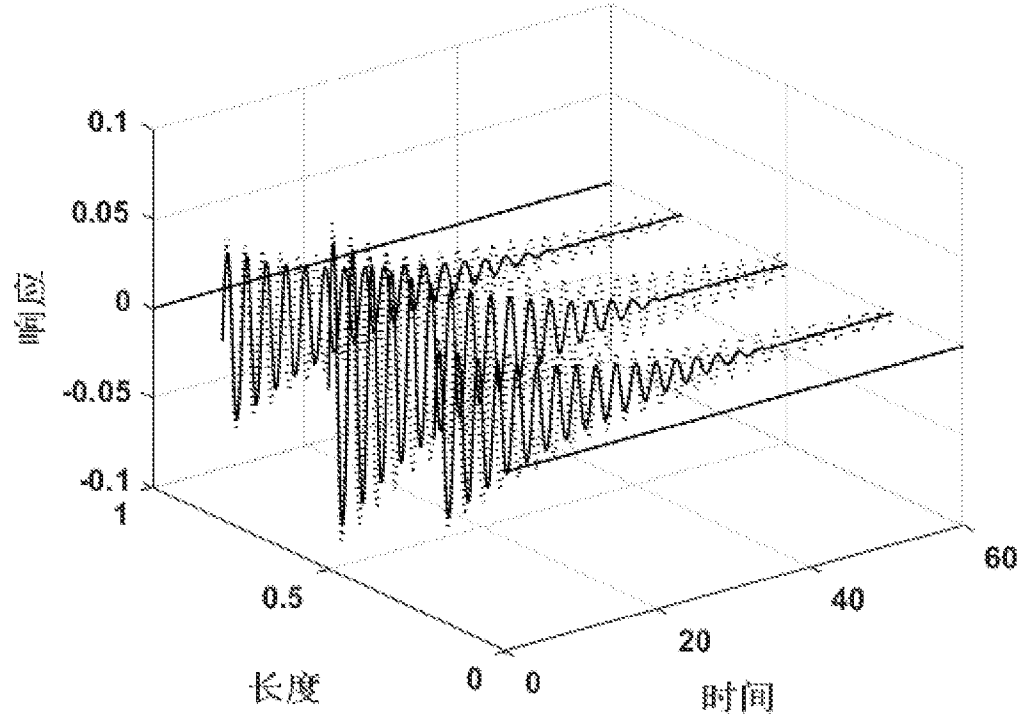
图 2



(a)



(b)



(c)

图 3

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.

PCT/CN2020/101592

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER

G06F 30/20(2020.01)i; G06F 113/14(2020.01)i

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

G06F30 G06F113

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used)

CNABS, CNTXT, CNKI, 百度学术: 非线性能量阱, 稳定性, 离散, 伽辽金, 李雅普诺夫, 泛函; VEN, USTXT, WOTXT, EPTXT, Google: nonlinear energy sink, stability, discretize, Galerkin, Lyapunov, functional

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	CN 107169220 A (DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY) 15 September 2017 (2017-09-15) entire document	1
A	CN 102799111 A (CHINA ELECTRIC POWER RESEARCH INSTITUTE STATE GRID CORP CHINA et al.) 28 November 2012 (2012-11-28) entire document	1
A	CN 110633555 A (YANGZHOU UNIVERSITY) 31 December 2019 (2019-12-31) entire document	1
A	US 8121708 B1 (SANDIA CORPORATION) 21 February 2012 (2012-02-21) entire document	1
A	US 2006037822 A1 (MCFARLAND, D.Michael et al.) 23 February 2006 (2006-02-23) entire document	1



Further documents are listed in the continuation of Box C.



See patent family annex.

* Special categories of cited documents:

“A” document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

“E” earlier application or patent but published on or after the international filing date

“L” document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

“O” document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

“P” document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

“T” later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

“X” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

“Y” document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art

“&” document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

09 March 2021

Date of mailing of the international search report

26 March 2021

Name and mailing address of the ISA/CN

China National Intellectual Property Administration (ISA/
CN)
No. 6, Xitucheng Road, Jimenqiao, Haidian District, Beijing
100088
China

Facsimile No. (86-10)62019451

Authorized officer

Telephone No.

INTERNATIONAL SEARCH REPORT
Information on patent family members

International application No.

PCT/CN2020/101592

Patent document cited in search report			Publication date (day/month/year)	Patent family member(s)			Publication date (day/month/year)
CN	107169220	A	15 September 2017	CN	107169220	B	29 October 2019
CN	102799111	A	28 November 2012	CN	102799111	B	03 August 2016
CN	110633555	A	31 December 2019	None			
US	8121708	B1	21 February 2012	None			
US	2006037822	A1	23 February 2006	US	7568565	B2	04 August 2009

国际检索报告

国际申请号

PCT/CN2020/101592

A. 主题的分类

G06F 30/20(2020.01)i; G06F 113/14(2020.01)i

按照国际专利分类(IPC)或者同时按照国家分类和IPC两种分类

B. 检索领域

检索的最低限度文献(标明分类系统和分类号)

G06F30 G06F113

包含在检索领域中的除最低限度文献以外的检索文献

在国际检索时查阅的电子数据库(数据库的名称, 和使用的检索词(如使用))

CNABS, CNTXT, CNKI, 百度学术: 非线性能量阱, 稳定性, 离散, 伽辽金, 李雅普诺夫, 泛函; VEN, USTXT, WOTXT, EPTXT, Google: nonlinear energy sink, stability, discretize, Galerkin, Lyapunov, functional

C. 相关文件

类 型*	引用文件, 必要时, 指明相关段落	相关的权利要求
A	CN 107169220 A (大连理工大学) 2017年 9月 15日 (2017 - 09 - 15) 全文	1
A	CN 102799111 A (中国电力科学研究院 等) 2012年 11月 28日 (2012 - 11 - 28) 全文	1
A	CN 110633555 A (扬州大学) 2019年 12月 31日 (2019 - 12 - 31) 全文	1
A	US 8121708 B1 (SANDIA CORPORATION) 2012年 2月 21日 (2012 - 02 - 21) 全文	1
A	US 2006037822 A1 (MCFARLAND, D.Michael 等) 2006年 2月 23日 (2006 - 02 - 23) 全文	1

☐ 其余文件在C栏的续页中列出。☒ 见同族专利附件。

* 引用文件的具体类型:

“A” 认为不特别相关的表示了现有技术一般状态的文件

“E” 在国际申请日的当天或之后公布的在先申请或专利

“L” 可能对优先权要求构成怀疑的文件, 或为确定另一篇引用文件的公布日而引用的或者因其他特殊理由而引用的文件(如具体说明的)

“O” 涉及口头公开、使用、展览或其他方式公开的文件

“P” 公布日先于国际申请日但迟于所要求的优先权日的文件

“T” 在申请日或优先权日之后公布, 与申请不相抵触, 但为了理解发明之理论或原理的在后文件

“X” 特别相关的文件, 单独考虑该文件, 认定要求保护的发明不是新颖的或不具有创造性

“Y” 特别相关的文件, 当该文件与另一篇或者多篇该类文件结合并且这种结合对于本领域技术人员为显而易见时, 要求保护的发明不具有创造性

“&” 同族专利的文件

国际检索实际完成的日期

2021年 3月 9日

国际检索报告邮寄日期

2021年 3月 26日

ISA/CN的名称和邮寄地址

中国国家知识产权局(ISA/CN)

中国北京市海淀区蓟门桥西土城路6号 100088

传真号 (86-10)62019451

受权官员

熊桦

电话号码 86-(20)-28957049

国际检索报告
关于同族专利的信息

国际申请号

PCT/CN2020/101592

检索报告引用的专利文件			公布日 (年/月/日)	同族专利	公布日 (年/月/日)
CN	107169220	A	2017年 9月 15日	CN 107169220 B	2019年 10月 29日
CN	102799111	A	2012年 11月 28日	CN 102799111 B	2016年 8月 3日
CN	110633555	A	2019年 12月 31日	无	
US	8121708	B1	2012年 2月 21日	无	
US	2006037822	A1	2006年 2月 23日	US 7568565 B2	2009年 8月 4日